I. DUMITRACHE

TEHNICA REGLĂRII AUTOMATE

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI - 1980

Scanned with OKEN Scanner

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

Conf. dr. ing. ION DUMITRACHE

TEHNICA REGLĂRII AUTOMATE

Curs pentru subingineri

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Lucrarea Tehnica reglării automate *prezintă într-o formă unitară principalele probleme ale teoriei și practicii reglării automate pornind de la modelarea și identificarea proceselor tehnologice pînă la elaborarea și implementarea algoritmilor de reglare și conducere. Astfel, în cadrul primelor trei capitole ale lucrării sînt prezentate problemele analizei sistemelor liniare continue monovariabile folosind în acest scop diferite modele matematice pentru descrierea funcționării elementelor și sistemelor de reglare automată. Evidențierea performanțelor și în special evoluția acestora ca urmare a modificării parametrilor sistemelor de reglare automată, atît în domeniul timpului cît și în domeniul frecvențelor, permite înțelegerea tuturor problemelor specifice analizei sistemelor automate liniare monovariabile.*

Alegerii și dimensionării optime a echipamentelor de automatizare i se acordă o atenție deosebită în cadrul lucrării. Astfel, pornind de la aspectele legate de identificarea proceselor și de la clasificarea acestora din punctul de vedere al modelului lor matematic sînt prezentate metode analitice și practice de alegere și acordare optimă a regulatoarelor automate, a elementelor de execuție și a traductoarelor. Pe baza unor criterii de performanță impuse se determină legile de reglare pentru procese lente și rapide, cu considerarea atît a variabilelor de intrare cît și a mărimilor perturbatoare. Sînt prezentate în cadrul capitolelor 7 și 8 structuri speciale de sisteme de reglare, precum și algoritmi de reglare după perturbație, de reglare combinată, de reglare în cascadă și de reglare multivariabilă, precum și metode de alegere și acordare a echipamentelor de automatizare în cazul acestor structuri speciale.

O atenție deosebită se acordă în lucrare analizei și sintezei sistemelor neliniare, insistîndu-se asupra influenței neliniarităților asupra performanțelor sistemelor de reglare automată. Sînt prezentate în detaliu problemele specifice sistemelor de reglare cu regulatoare bipoziționale și tripoziționale, problemele alegerii și acordării optime ale regulatoarelor neliniare.

În continuare se prezintă structuri evoluate de sisteme automate precum și probleme ale reglării și conducerii numerice a proceselor tehnologice.

Prin conținutul și nivelul de prezentare a problemelor specifice sistemelor automate, considerăm că lucrarea va constitui un manual util, atît pentru studenții Facultății de automatică, specialitatea Automatizări industriale, învățămînt de subingineri, cît și pentru studenții de la alte specialități, care au prevăzut în planul de învățămînt cursuri similare. Lucrarea prezintă utilitate de asemenea pentru inginerii și tehnicienii care sînt confruntați cu probleme ale analizei și sintezei sistemelor automate.

AUTORUL

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

Cap. 1. **Introducere** 9

1.1. Obiectul automaticii. Automatizarea proceselor tehnologice . . . 9
1.2. Structuri de sisteme automate. Rolul reacției negative 11
1.3. Mărimi și elemente caracteristice în sistemele de reglare automată 15
1.4. Clasificarea sistemelor automate. Etapele dezvoltării automaticii . 21
1.5. Probleme ale sistemelor automate. Metode de studiu 22
1.6. Dezvoltarea automatizării la noi în țară 24

Cap. 2. **Determinarea modelelor matematice ale elementelor și sistemelor liniare** 26

2.1. Regimuri de funcționare 26
2.2. Modele matematice liniare de tipul intrare-ieșire 29
2.2.1. Ecuații diferențiale ale elementelor componente ale unui sistem automat 30
2.2.2. Funcția de transfer. Calculul funcției de transfer pentru elementele tip ale sistemelor de reglare automată 40
2.3. Modele matematice intrare-stare-ieșire 44

Cap. 3. **Calculul performanțelor sistemelor de reglare automată** 47

3.1. Calculul răspunsului unui sistem prin rezolvarea ecuațiilor diferențiale 47
3.1.1. Calculul performanțelor staționare și tranzitorii pentru un sistem de ordinul întîi 49
3.1.2. Calculul performanțelor pentru un sistem de ordinul doi . . 53
3.2. Calculul răspunsului pe baza funcțiilor de transfer 59
3.2.1. Calculul funcției de transfer a sistemelor de reglare automată 62
3.2.2. Calculul performanțelor sistemului de reglare automată cu ajutorul funcției de transfer 72
3.2.2.1. Analiza stabilității sistemelor de reglare automată . . 75
3.2.2.2. Calculul erorii în regim staționar cu ajutorul funcției de transfer 78
3.3. Calculul performanțelor în domeniul frecvențelor 83
3.3.1. Caracteristica amplitudine-fază 85
3.3.2. Caracteristici de frecvență în reprezentare logaritmică . . . 89
3.3.3. Caracteristici de frecvență pentru sistemul închis 98
3.3.4. Performanțele unui sistem în domeniul frecvențelor 102

Scanned with OKEN Scanner

Cap 4. **Corecția sistemelor automate** 112
4.1. Generalități. Corecția în serie, paralel și în reacție 112
4.2. Îmbunătățirea stabilității sistemelor automate 114
4.3. Îmbunătățirea preciziei sistemelor automate 119

Cap. 5. **Identificarea și reprezentarea matematică a proceselor tehnice** 131
5.1. Principiile și metodele utilizate pentru identificare 131
5.2. Identificarea experimentală a proceselor 135
5.3. Determinarea caracteristicilor dinamice folosind semnale de probă periodice 142
5.4. Determinarea caracteristicilor dinamice folosind semnale de probă aleatoare 144
5.5. Identificarea proceselor prin utilizarea modelelor ajustabile . . . 150
5.6. Clasificarea proceselor după modelul matematic al acestora . . . 152

Cap. 6. **Proiectarea sistemelor de reglare automată** 155
6.1. Obiectivele proiectării. Criterii de performanță 155
6.2. Considerații privind alegerea elementelor de execuție pentru un proces tehnologic dat 158
6.2.1. Elemente de acționare. Tipuri, caracteristici 159
6.2.2. Organe de reglare. Tipuri, caracteristici 162
6.2.3. Alegerea și dimensionarea elementelor de execuție 166
6.3. Considerații privind alegerea traductoarelor în sistemele de reglare automată 168
6.4. Principiile alegerii și acordării regulatoarelor 170
6.4.1. Tipuri de regulatoare. Caracteristici, performanțe 170
6.4.2. Criterii de alegere a tipului de regulator 185
6.4.3. Alegerea și acordarea regulatoarelor pentru procese rapide . 188
6.4.3.1. Criteriul modulului 189
6.4.3.2. Criteriul simetriei 193
6.4.4. Alegerea și acordarea regulatoarelor pentru procese lente . . 196
6.4.5. Criterii experimentale de acordare a regulatoarelor 207
6.5. Proiectarea sistemelor de reglare automată pornind de la funcția de transfer $H_0(s)$ 215

Cap. 7. **Sisteme de reglare automată cu structură specială** 220
7.1. Sisteme de reglare în cascadă 220
7.2. Sisteme cu reacție după stare 228
7.3. Sisteme de reglare după perturbație și reglare combinată 234
7.4. Sisteme cu compensarea timpului mort 239

Cap. 8. **Sisteme multivariabile** 243
8.1. Reprezentarea matematică a sistemelor 243
8.2. Alegerea și acordarea regulatoarelor pentru procese multivariabile 250

Cap. 9. **Sisteme automate cu acțiune discontinuă (discretă)** 259
9.1. Considerații generale asupra sistemelor cu acțiune discontinuă . . 259
9.2. Sisteme automate cu eșantionare 262
9.2.1. Eșantionarea și refacerea semnalelor 263

Scanned with OKEN Scanner

9.2.2. Transformata în z. Funcţia de transfer în z 266
9.2.3. Calculul răspunsului unui sistem cu eşantionare 274
9.3. Calculul performanţelor sistemelor cu eşantionare 278
9.3.1. Calculul stabilităţii sistemelor cu eşantionare 278
9.3.2. Calculul erorii staţionare 280
9.4. Corecţia şi proiectarea sistemelor cu eşantionare 282
9.4.1. Corecţia sistemelor cu eşantionare 282
9.4.2. Proiectarea sistemelor de reglare numerică 284

Cap. 10. **Sisteme automate neliniare** 298
10.1. Generalităţi. Tipuri de neliniarităţi 298
10.2. Structuri de sisteme neliniare 302
10.3. Analiza SAN cu ajutorul funcţiei de descriere 306
10.4. Analiza sistemelor neliniare prin metoda planului fazelor 313
10.4.1. Traiectoriile de fază pentru un sistem de ordinul doi . . . 315
10.4.2. Cicluri limită în planul fazelor 318
10.5. Analiza sistemelor de reglare cu regulatoare bipoziţionale şi tripoziţionale 319
10.6. Stabilitatea sistemelor neliniare 333
10.7. Sisteme neliniare cu structură variabilă 338

Cap. 11. **Sisteme automate extremale şi optimale** 342
11.1. Procese cu caracteristică extremală 342
11.2. Structuri de sisteme extremale 343
11.2.1. Sisteme extremale cu memorarea extremului 344
11.2.2. Sisteme extremale cu controlul derivatei 346
11.2.3. Sisteme extremale de tip pas cu pas 348
11.2.4. Sisteme extremale cu comutaţie impusă 348
11.3. Sisteme de comandă şi conducere optimală 350
11.4. Metode utilizate pentru rezolvarea problemelor de optimizare . . 358

Cap. 12. **Sisteme adaptive** 365
12.1. Introducere 365
12.2. Clasificarea sistemelor adaptive 366
12.2.1. Sisteme adaptive fără semnale de probă. Sisteme adaptive cu model etalon 367
12.2.2. Sisteme adaptive cu semnale de probă 370

Cap. 13. **Noţiuni privind conducerea proceselor cu ajutorul calculatoarelor** . . 373
13.1. Generalităţi 373
13.2. Structura generală a calculatoarelor de proces 375
13.3. Funcţiile calculatoarelor de proces 379
13.4. Consideraţii privind alegerea sistemelor de conducere cu calculatorul a proceselor tehnologice 390
13.5. Aplicaţii ale microcalculatoarelor şi calculatoarelor de proces pentru automatizarea complexă a proceselor 393
13.6. Simularea sistemelor automate cu ajutorul calculatoarelor analogice şi numerice 401

Scanned with OKEN Scanner

13.6.1. Simularea sistemelor automate cu ajutorul calculatorului analogic 402
13.6.2. Simularea numerică a sistemelor de reglare automată . . . 419

Cap. 14. **Proiectarea sistemelor de reglare automată. Aplicații numerice** . . . 425

14.1. Proiectarea unui sistem de reglare a turației unui motor de curent continuu 425
14.2. Proiectarea unui sistem de reglare a debitului 432
14.3. Proiectarea unui sistem de reglare a nivelului 437
Anexe 441
Bibliografie 451

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 1

INTRODUCERE

1.1. OBIECTUL AUTOMATICII. AUTOMATIZAREA PROCESELOR TEHNOLOGICE

Omul, ca ființă superioară, a fost preocupat din cele mai vechi timpuri de a cunoaște și stăpîni natura, de a dirija fenomene ale naturii în scopul ușurării existenței sale. Mulțimea de fenomene pe care ființa inteligentă și rațională — omul — le constată, le observă și le interpretează, prezintă un grad mai mare sau mai redus de complexitate și evident de accesibilitate mai mare sau mai scăzută. Pentru înțelegerea și interpretarea unor astfel de fenomene, omul a asociat acestora mărimi ce caracterizează evoluția spațio-temporală a acestor fenomene.

În procesul cunoașterii, omul urmărește evoluția în timp a unor mărimi caracteristice în raport cu evoluția altor mărimi, evidențiind astfel grupul mărimilor ce definesc „cauza" și grupul mărimilor ce definesc „efectul". Observațiile asupra presupuselor cauze și presupuselor efecte pot conduce la evidențierea unor legi care, creînd relațiile dintre cauze și efecte, caracterizează fenomenele.

Gradul de cunoaștere în continuă evoluție a fenomenelor a permis omului să intervină, controlînd unele fenomene în scopul îmbunătățirii condițiilor sale de viață, al reducerii eforturilor depuse pentru asigurarea condițiilor de viață.

Stabilirea unor legi ce caracterizează fenomene ale naturii, definirea unor modele ale fenomenelor a permis omului o cunoaștere și interpretare aprofundată a multor fenomene, reușind să le dirijeze în scopul îmbunătățirii condițiilor sale de viață, al reducerii eforturilor fizice și intelectuale, al ușurării existenței sale.

În acest proces, omul a parcurs următoarele etape:

Etapa mecanizării, în care a fost preocupat de realizarea de noi obiecte materiale care să adapteze eforturile fizice necesare pe măsura posibilităților sale, respectiv să reducă la minimum eforturile sale fizice. Astfel a creat unelte primitive ca: pîrghia, roata, scripeții, multiplicatoarele de forță de cuplu cu ajutorul cărora și-a ușurat viața. Paralel cu

Scanned with OKEN Scanner

reducerea eforturilor fizice, omul a fost preocupat de reducerea eforturilor sale intelectuale, creînd ansamble de calcul mecanizat. În acest proces de mecanizare a muncii sale, omul este nemijlocit legat de procesul de producție, iar intervențiile sale fizice și intelectuale sînt indispensabile producerii de bunuri materiale.

Etapa automatizării, în care omul a fost preocupat să creeze mijloace materiale care să reducă sau să elimine complet intervenția sa directă în desfășurarea proceselor de producție. Prin automatizarea proceselor de producție se elimină intervenția directă a omului asupra acestora, omului revenindu-i în acest caz rolul de conducere generală (de determinare a condițiilor de desfășurare și control al desfășurării). Astfel, în această etapă omul desfășoară cu precădere o activitate intelectuală.

Etapa cibernizării, în care omul este preocupat de crearea unor asemenea obiecte materiale, care să reducă funcția de conducere generală a omului. Astfel, au fost create calculatoare cu ajutorul cărora pot fi stabilite strategii de conducere a proceselor de producție.

Aceste etape au apărut succesiv și au cunoscut o continuă evoluție, pe măsura mai bunei cunoașteri a realității obiective paralel cu perfecționarea proceselor de producție.

Pornind de la legi deja evidențiate la fenomene ale naturii, apelînd la inventivitatea sa, omul a creat mijloace materiale de mecanizare și automatizare cu ajutorul cărora și-a ușurat munca fizică și intelectuală. Pentru aceste mijloace de mecanizare și automatizare au fost evidențiate, de asemenea, grupuri de mărimi ce constituie cauza și grupuri de mărimi ce constituie efectul. Astfel a fost posibilă stabilirea cauzalității la asemenea obiecte materiale create artificial de om.

Ansamblul de obiecte materiale care asigură conducerea unui proces tehnic sau de altă natură fără intervenția directă a omului reprezintă un *echipament de automatizare*.

Știința care se ocupă cu studiul principiilor și aparatelor prin intermediul cărora se asigură conducerea proceselor tehnice fără intervenția directă a omului poartă denumirea de *Automatică*, *Automatizarea* reprezintă introducerea în practică a principiilor automaticii.

Pornind de la realitatea obiectivă a existenței unor procese tehnice cauzale (respectiv cauza determină efectul și nu invers) și a unor obiecte materiale create de om (cu respectarea cauzalității) în scopul conducerii automate a acestor procese, se poate defini *noțiunea de sistem automat*. Astfel, ansamblul format din procesul (tehnic) condus și echipamentul de automatizare (de conducere), care asigură desfășurarea procesului după anumite legi, poartă denumirea de *sistem automat*.

Menținerea constantă a temperaturii într-un cuptor electric fără intervenția directă a omului presupune utilizarea unor echipamente sau dispozitive de automatizare care asigură măsurarea continuă a temperaturii, compararea acestei valori cu o valoare dorită a temperaturii, amplificarea sau prelucrarea erorii ce apare între cele două valori și comanda asupra energiei electrice introduse în cuptor. Toate aceste echipamente sau dispozitive de automatizare împreună cu cuptorul (sau procesul) supus automatizării alcătuiesc un sistem automat. Fiecare dintre dispozitivele de automatizare menționate sînt caracterizate printr-o mă-

Scanned with OKEN Scanner

rime ce reprezintă cauza și o mărime ce reprezintă efectul, între acestea existînd o relație de dependență, cauza implică (determină) efectul.

Pentru simplificarea reprezentării se poate asocia fiecărui element component al sistemului un model ce caracterizează dependența între cauze și efecte (sau între intrările și ieșirile elementelor) [51].

În general, prin sistem vom înțelege un model fizic realizabil al unui ansamblu de obiecte naturale sau create artificial de om, la care un grup al mărimilor ce constituie cauza determină un alt grup de mărimi ce constituie efectul.

1.2. STRUCTURI DE SISTEME AUTOMATE. ROLUL REACȚIEI NEGATIVE

Pornind de la definiția sistemului automat putem asocia acestuia un model structural alcătuit din două subsisteme (fig. 1.1): subsistemul condus S_2 (procesul supus automatizării și subsistemul de conducere sau conducător S_1 (echipamentul de automatizare).

Structura de sistem prezentată în figura 1.1 este o structură deschisă, reprezentînd totodată o structură minimală care asigură o relație funcțională dorită între grupul (setul) mărimilor de la ieșire y_i (i=1, 2, ..., p) și setul variabilelor de la intrare u_i (i=1, 2, ..., m).

Pentru această structură, subsistemul S_1 generează setul variabilelor m_i (i=1, 2, ..., k) în funcție de u_i astfel încît evoluția subsistemului S_2 să fie cea dorită, impusă printr-o relație dată $\mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{y}$ (unde **u** și **y** reprezintă vectorii coloană formați din variabilele u_i și y_i). Pentru acest sistem sensul de transmitere a informației este unidirecțional, de la intrare spre ieșire.

În figura 1.2 se prezintă o schemă elementară de sistem automat deschis pentru comanda debitului de fluid ce se introduce într-un rezervor. Deschiderea robinetului de reglare V_1, și deci creșterea debitului de fluid, este determinată de poziția tijei elementului de acționare pneumatic cu membrană C. Valoarea presiunii la suprafața membranei este determinată de poziția paletei B față de ajutajul A, poziție fixată prin intermediul mărimii u. Ieșirea (sau efectul) în acest caz este considerată nivelul lichidului în recipientul R, nivel legat cauzal de mărimea m, respectiv de debitul de fluid introdus în vas.

În această schemă (fig. 1.2, b) s-au evidențiat cele două subsisteme: procesul cu intrarea m și ieșirea y (nivelul) și echipamentul de comandă cu intrarea u și ieșirea m, de asemenea legate printr-o relație de cauza-

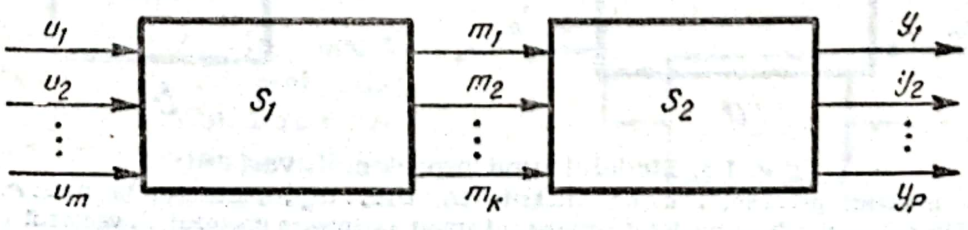


Fig. 1.1. Schema generală a unui sistem deschis.

Scanned with OKEN Scanner

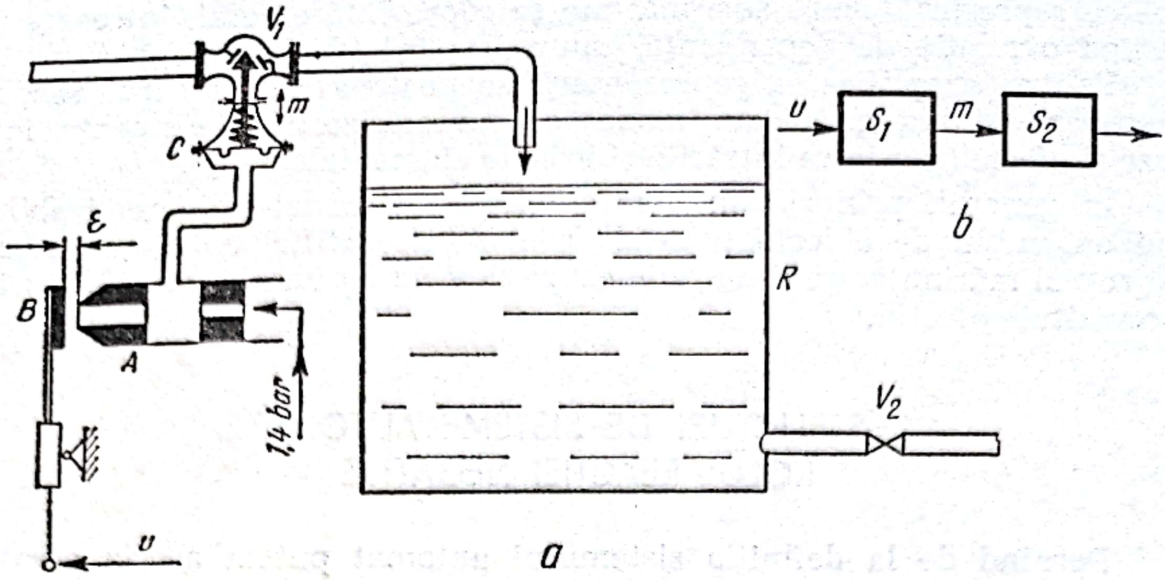


Fig. 1.2. Schema unui sistem deschis pentru controlul nivelului în rezervor:
a — schema funcțională; *b* — schema structurală.

litate. Astfel, pentru subsistemul condus alcătuit din rezervorul alimentat prin conductă a fost creat subsistemul alcătuit din elementul de amplificare de tip ajutaj-paletă și elementul de acționare cu membrană. De remarcat faptul că nivelul în rezervor nu este influențat numai de deschiderea ventilului V_2 ci și de debitul evacuat. Astfel, subsistemul condus S_2 are mai multe mărimi care pot fi încadrate în categoria mărimilor de intrare. În acest caz debitul evacuat prin robinetul V_2 este considerat ca o mărime perturbatoare, mărime al cărui efect se transmite direct asupra nivelului, deci asupra ieșirii sistemului.

În general, acest subsistem condus (procesul supus automatizării) poate fi reprezentat ca în figura 1.3, unde s-au evidențiat următoarele mărimi caracteristice:

y este vectorul mărimilor de ieșire;
u — vectorul mărimilor de intrare;
p — vectorul mărimilor perturbatoare.

În cazul unui proces simplu, cu o singură intrare și o singură ieșire, deci al unui proces monovariabil, modelul acestuia poate fi reprezentat ca în

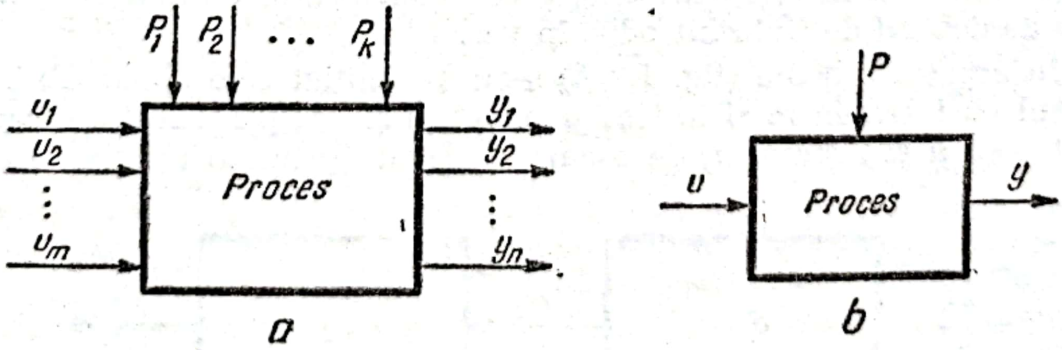


Fig. 1.3. Modelul unui proces multivariabil:
a — modelul procesului având intrările U_1, $U_2 \dots U_m$, perturbațiile $P_1 \dots P_k$ și ieșirile $y_1, \dots y_n$; *b* — modelul procesului având la intrare vectorul **U**, vectorul perturbațiilor **P** și vectorul ieșirilor **y**.

Scanned with OKEN Scanner

figura 1.3, *b*. Spre deosebire de acest model monovariabil, în cazul mai multor intrări și mai multor ieșiri operăm cu un model multivariabil, ca în figura 1.3. *a*.

Mărimile de intrare ale procesului automatizat sînt de două tipuri:

— mărimi de execuție (comandă), ce sînt determinate de subsistemul de conducere S_1;

— mărimi perturbatoare.

Principalele mărimi perturbatoare sînt cele de sarcină. În cazul procesului considerat, perturbația este determinată de consumul de lichid din rezervor, deci de sarcina acestuia (debitul de lichid evacuat prin robinetul V_2).

Se observă că sistemul considerat, pentru o intrare dată, ca urmare a efectului mărimii perturbatoare, poate avea diverse valori ale mărimii de ieșire (nivelul). Rezultă că o structură deschisă de sistem automat nu asigură o bună precizie în realizarea relației intrare-ieșire.

Un alt exemplu de sistem deschis îl constituie pornirea unui motor electric cu ajutorul unui contactor. Motorul, ca proces supus comenzii automate, are ca ieșire turația iar ca mărime de intrare tensiunea de alimentare. Închiderea contactelor acestuia, care asigură cuplarea motorului la rețea, se realizează printr-o schemă de comandă care implică închiderea contactului unui buton de pornire. Și în acest caz, apariția unei perturbații externe determinată de variația sarcinii are ca efect modificarea mărimii de la ieșire (turația). Putem spune deci că un sistem cu structură deschisă este foarte sensibil la perturbațiile ce apar în proces (subsistemul de bază) sau în cadrul sistemului de conducere. Pentru compensarea acestei modificări a turației se impune modificarea tensiunii de alimentare în mod corespunzător. Aceasta presupune cunoașterea evoluției mărimii de la ieșire.

În cazul în care subsistemul de conducere S_1 elaborează acțiunea de comandă atît funcție de intrarea u cît și funcție de ieșirea y a subsistemului condus, se obține o structură de sistem cu reacție (fig. 1.4).

Subsistemul S_3 are rolul informațional de a transmite la intrarea subsistemului S_1 informații despre evoluția ieșirii; semnalul transmis y_r, este denumit *semnal de reacție* sau mărime de *reacție*. Prezența acestei legături inverse, de la ieșirea la intrarea sistemului, poate să asigure o reducere a sensibilității la perturbații a acestuia. Comanda pentru realizarea unei funcționări dorite a subsistemului cu structură dată (procesul) în cazul unui sistem cu structură închisă se realizează în funcție de rezultatul comparării între intrarea u a sistemului și ieșirea y a acestuia.

Subsistemul S_1, în acest caz, elaborează o strategie de conducere pentru obținerea relației dorite intrare-ieșire și pe baza informației transmise de la ieșire la intrare prin inter-

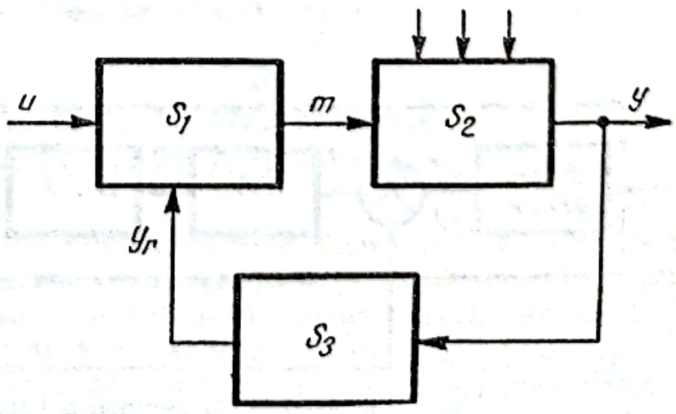


Fig. 1.4. Schema generală a unui sistem închis.

Scanned with OKEN Scanner

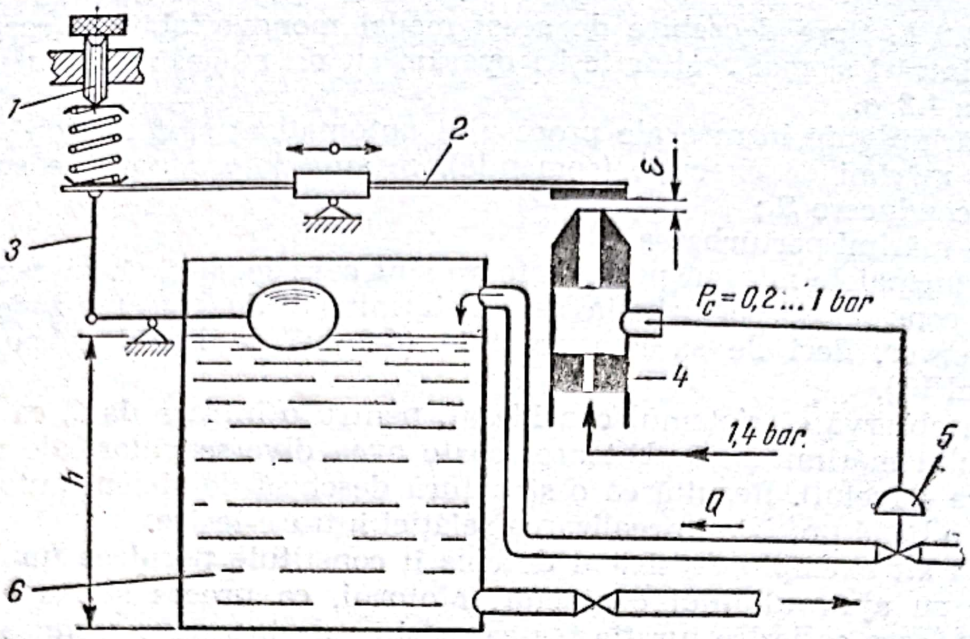


Fig. 1.5. Sistem de reglare a nivelului:
1 — element de fixare a referinței; *2, 3* — pîrghie; *4* — ajutaj; *5* — elementul de execuție; *6* — vas.

mediul reacției. Subsistemul S_1 interpretează decizional, comparativ, cele două variabile de intrare și de reacție, determinînd, pe baza unei strategii impuse, variabilele de intrare în subsistemul condus.

Dacă în figura 1.2 se adaugă un subsistem suplimentar care măsoară și transmite la intrare informații asupra nivelului în vas, se obține o structură de sistem închis (fig. 1.5).

Poziția paletei față de ajutaj este determinată de diferența între acțiunea resortului care reprezintă intrarea în sistem și acțiunea tijei *3* determinată de nivelul în vas. Orice modificare a nivelului sub acțiunea mărimii perturbatoare este transmisă la intrarea subsistemului S_1 și comparată cu mărimea u. În acest caz, mărimea u de la intrare reprezintă programul impus sistemului.

În cazul unui motor la care se urmărește menținerea constantă a turației, măsurarea turației și transmiterea informației la intrarea sistemului asigură realizarea unui grad de invarianță a acesteia la perturbații (fig. 1.6).

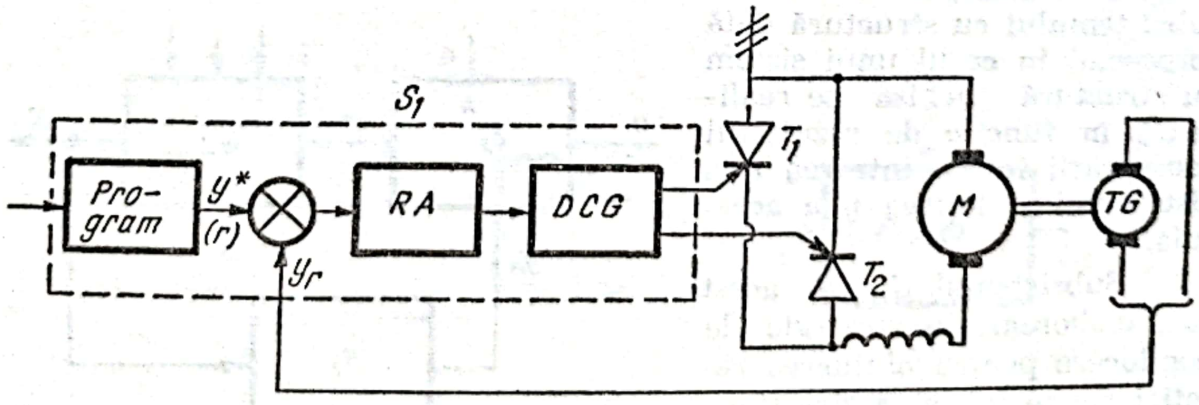


Fig. 1.6. Sistem de reglare a turației unui motor de c.c.:
RA — regulatorul automat; *DCG* — dispozitivul de comandă pe grilă; T_1, T_2 — tiristoare; *M* — motorul; *TG* — tahogeneratorul.

Scanned with OKEN Scanner

Comanda tiristoarelor T_1 și T_2 pentru realizarea unui curent rotoric corespunzător unei anumite turații este determinată de diferența între r, care reprezintă o valoare dorită de referință a turației, și y_r, care reprezintă valoarea reală a turației măsurată continuu cu ajutorul tahogeneratorului TG. Această diferență este interpretată decizional de blocul de reglare automată RA și transmisă dispozitivului de comandă pe grilă DCG. Impulsurile generate de DCG asigură comanda tiristoarelor în sensul dorit, obținîndu-se la bornele motorului tensiunea necesară.

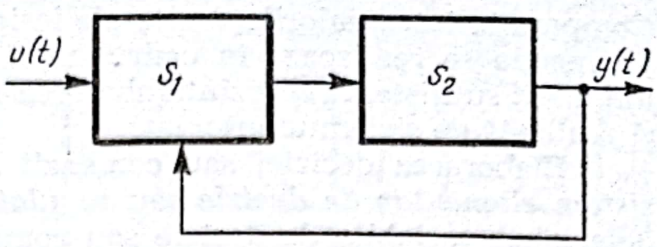


Fig. 1.7. Schema unui sistem cu reacție rigidă.

De remarcat faptul că în ambele exemple măsurarea mărimii de ieșire și transmiterea informației asupra evoluției acesteia la intrare introduce o anumită întîrziere, care atrage o funcționare necorespunzătoare a sistemului.

Pentru a se reduce la minimum timpul de informare a sistemului de interpretare decizională asupra evoluției ieșirii, se poate transmite la comparator direct mărimea de ieșire.

Legătura funcțională între mărimea de reacție și mărimea de ieșire în acest caz este denumită *legătură rigidă*.

Structura unui sistem automat, cu timp informațional minim (legătură inversă rigidă), este prezentată în figura 1.7.

Printre efectele reacției negative într-un sistem automat remarcăm:

— creșterea preciziei;

— reducerea sensibilității sistemului la variațiile caracteristicilor acestuia și ale perturbațiilor;

— reducerea efectelor neliniarităților și a distorsiunilor;

— creșterea benzii de frecvență în care sistemul se comportă satisfăcător.

În funcție de natura variației mărimii de intrare, sistemele automate pot fi cu program sau cu consemn; la acestea se impune variația intrării după o anumită regulă. Aceste sisteme sînt cunoscute sub denumirea de *sisteme de reglare automată*. În cazul în care nu se cunoaște apriori variația mărimii de intrare, ci se impune numai o dependență voită $u \longrightarrow y$, spunem că avem sisteme *automate de urmărire*.

1.3. MĂRIMI ȘI ELEMENTE CARACTERISTICE ÎN SISTEMELE DE REGLARE AUTOMATĂ

Scopul unui sistem de reglare automată este de a realiza la ieșirea sistemului automat o mărime impusă prin program. Ținînd seama că un sistem cu legătură directă transmite la intrarea subsistemului decizional direct mărimea de la ieșire, pentru a se asigura comparația între program și această mărime, este necesară prezența unui subsistem prin intermediul căruia se aplică la intrarea sistemului mărimea de referință y_{ref} sau mărimea de ieșire dorită $r \equiv y_{dorit} \equiv y^* \equiv y_{ref}$.

Scanned with OKEN Scanner

Comparația între valorile dorite ale ieșirii cu valorile y transmise pe calea de reacție se realizează în cadrul unui subsistem de comparație. Ieșirea din acest subsistem reprezintă abaterea ε dintre cele două variabile, dorită și realizată de sistemul automat.

Elaborarea deciziei sau comenzii se realizează în cadrul unui *subsistem elementar de decizie* sau *regulator automat*, care, în funcție de ε, determină variabila de decizie sau comandă $u(t)$. Această comandă acționează în sensul realizării egalității între valoarea dorită a ieșirii, y_{dorit} și valoarea reală a ieșirii y deci în sensul $y^*=y_{dorit}=y$. Aplicarea variabilei de decizie sau de comandă la subsistemul condus (la proces) se realizează prin intermediul subsistemului de execuție, care pe baza variabilei $u(t)$ elaborează variabila de execuție $m(t)$. Acest subsistem de execuție asociază variabilei de execuție, de obicei, energia necesară intervenției dorite asupra procesului în sensul modificării surselor de energie ale acestuia. Subsistemele de execuție sau elementele de execuție pot fi privite ca generatoare de cuplu (forță) care folosesc energia externă, fiind comandate de semnalele obținute de la subsistemul de decizie. Astfel, elementele de execuție au un dublu rol: informațional și de vehiculare a unor puteri importante.

Ținînd seama de modul de transmitere și prelucrare a informației în cadrul subsistemului conducător, se poate întocmi schema funcțională a unui sistem de reglare automată cu legătură inversă (reacție) rigidă, figura 1.8, *a*.

În schemă s-au evidențiat următoarele subsisteme sau elemente funcționale:

S_{11} — subsistemul de intrare (elementul de fixare a referinței);
S_{12} — subsistemul de comparație (elementul de comparație);
S_{13} — subsistemul de decizie sau de comandă (regulatorul automat);
S_{14} — subsistemul de execuție (elementul de execuție).

În ceea ce privește prezența elementului de fixare a referinței S_{11} (programatorul), menționăm că acesta poate fi exclus din structura sistemului, dat fiind că importantă pentru sistemul de reglare automată este cunoașterea intrării y^*, a referinței $r\equiv y^*$ în elementul de comparație.

În cazul general, cînd mărimea de la ieșire este transmisă la intrarea comparatorului prin intermediul unui traductor, denumit *traductor de reacție*, schema funcțională a unui sistem de reglare automată este prezentată în figura 1.8, *b*.

Dacă ținem seama de faptul că atît elementul de execuție cît și traductorul de reacție care permite măsurarea mărimii de ieșire sînt determinate de tipul și natura procesului supus automatizării (v. subcap. 6.2), se poate întocmi o schemă simplificată pentru sistemul de reglare automată (fig. 1.8, *c*).

Obiectul reglat include în acest caz procesul tehnologic, elementul de execuție și traductorul de pe calea de reacție, schema prezentată în figura 1.8, *c* fiind similară cu schema prezentată în figura 1.7. Regulatorul automat elaborează strategia de conducere a obiectului reglat, iar în literatura de specialitate [33, 5] această mărime este notată cu u. Astfel, obiectul supus conducerii are în acest caz ca intrări mărimea u și pertur-

Scanned with OKEN Scanner

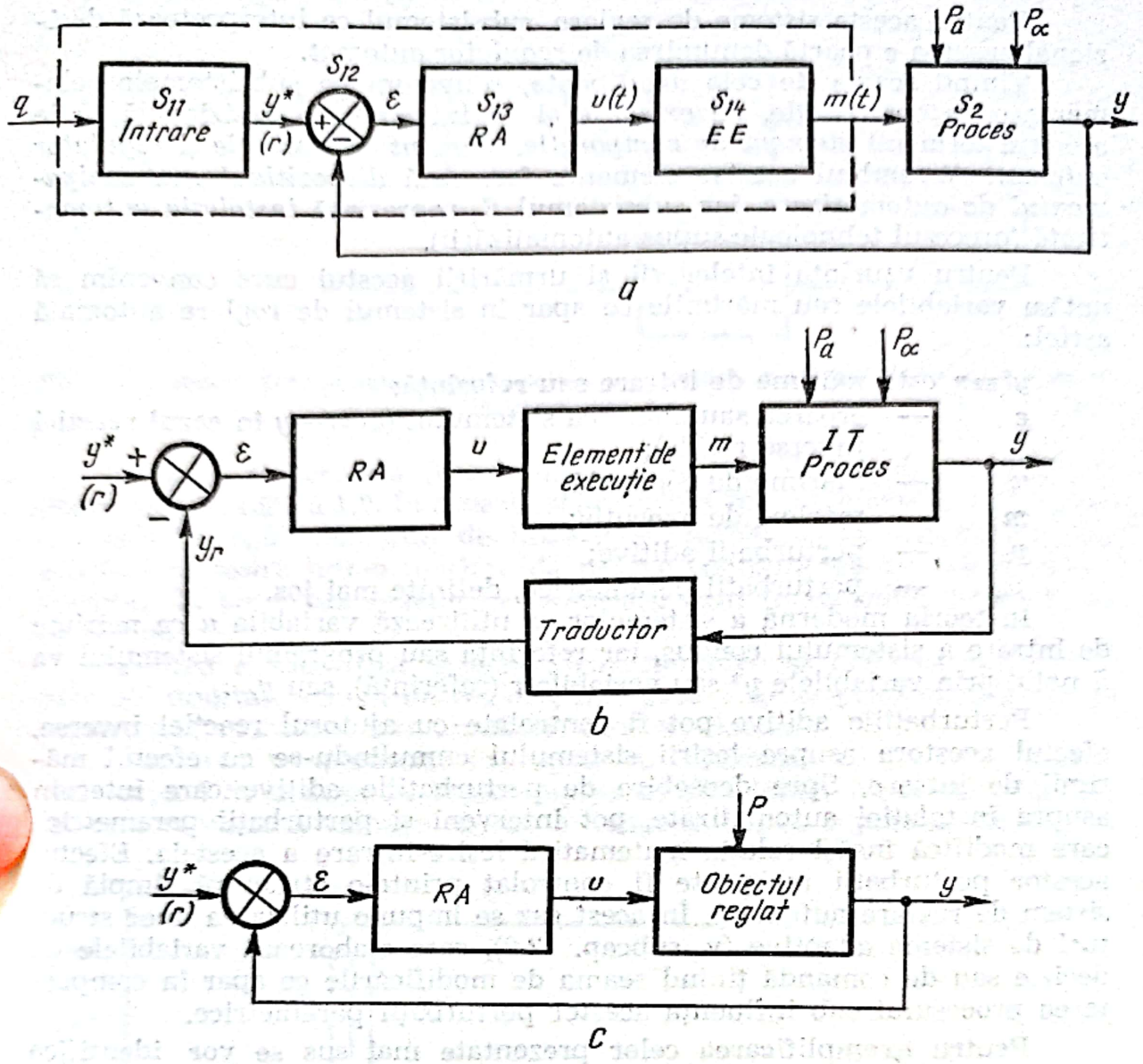


Fig. 1.8. Schema funcțională a unui sistem de reglare automată:
a — schema desfășurată cu reacție rigidă; *q* — programul impus; *r(t)* referința; *ε(t)* abaterea; *u(t)* comanda; *m(t)* — mărimea de execuție; *b* — schema funcțională a sistemului de reglare automată cu traductor inclus pe calea de reacție; *c* — schema simplificată cu reacție rigidă.

bația P iar ca ieșire mărimea y. Variabila ε ce reprezintă abaterea sau eroarea sistemului de reglare se obține prin comparația prin diferență a variabilei de intrare $y^* \equiv r$ și a variabilei de ieșire y. În acest caz eroarea este dată de relațiile:

$$\varepsilon = y^* - y \quad \text{sau} \quad \varepsilon = y_{ref} - y = r - y.$$

Dacă comparația nu se face prin diferență, sistemul automat este cu comparație „general strategică".

La sistemele de reglare automată cu comparație liniar-adaptivă (sau prin diferență), reglarea se realizează după eroare, întrucît variabila de execuție (sau mărimea motoare) $m(t)$ este elaborată în funcție de abaterea ε și nu în funcție numai de intrarea y^*.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru aceste sisteme de reglare, subsistemul ce interpretează decizional eroarea ε poartă denumirea de *regulator automat.*

Ţinînd seama de cele menţionate, convenim ca subsistemelor elementare de comparaţie, de execuţie şi de interpretare decizională să le asociem termenii *element de comparaţie, element de execuţie* şi *regulator automat.* Ansamblul acestor elemente formează *dispozitivul* sau *echipamentul de automatizare,* iar subsistemul S_2 reprezintă *instalaţia automatizată* (procesul tehnologic supus automatizării).

Pentru uşurinţa înţelegerii şi urmăririi acestui curs convenim să notăm variabilele sau mărimile ce apar în sistemul de reglare automată astfel:

$y^* \equiv r$ este mărime de intrare sau referinţă;
ε — eroarea sau abaterea sistemului ($\varepsilon = r - y$ în cazul reacţiei inverse rigide);
u — mărime de comandă;
m — mărime de execuţie;
p_a — perturbaţii aditive;
p_α — perturbaţii parametrice, definite mai jos.

În teoria modernă a sistemelor se utilizează variabila u ca mărime de intrare a sistemului condus, iar referinţa sau programul sistemului va fi notat prin variabilele y^* sau variabila r (referinţă), sau y_{ref}.

Perturbaţiile aditive pot fi controlate cu ajutorul reacţiei inverse, efectul acestora asupra ieşirii sistemului cumulîndu-se cu efectul mărimii de intrare. Spre deosebire de perturbaţiile aditive care intervin asupra instalaţiei automatizate, pot interveni şi perturbaţii parametrice care modifică însăşi relaţia matematică ieşire-intrare a acesteia. Efectul acestor perturbaţii nu poate fi controlat printr-o structură simplă de sistem de reglare automată. În acest caz se impune utilizarea unor structuri de sisteme adaptive (v. subcap. 12.2), care elaborează variabilele de decizie sau de comandă ţinînd seama de modificările ce apar în comportarea procesului sub influenţa acestor perturbaţii parametrice.

Pentru exemplificarea celor prezentate mai sus se vor identifica elementele funcţionale şi mărimile caracteristice ce intervin în sistemul de reglare din figura 1.5:

— instalaţia automatizată este rezervorul cu intrarea Q (debitul de fluid) şi ieşirea nivelul h;

— elementul de execuţie cu intrarea reprezentată de presiunea de comandă p_c şi ieşirea debitul de fluid (în cadrul acestui subsistem evidenţiem elementul de acţionare pneumatic cu membrană şi organul de reglare a cărei intrare este deplasarea tijei elementului de acţionare iar ieşirea — debitul Q);

— regulatorul automat este alcătuit în acest caz din amplificatorul pneumatic de tip ajutaj-paletă, cu intrarea reprezentată de deplasarea paletei şi avînd ca ieşire presiunea de comandă p_c;

— comparatorul în acest caz este pîrghia *2*, care asigură comparaţia între deplasarea fixată cu ajutorul resortului *1* şi deplasarea pîrghiei *3*, determinată de nivelul h în vas (ieşirea din acest element este reprezentată prin poziţia paletei faţă de ajutaj).

Scanned with OKEN Scanner

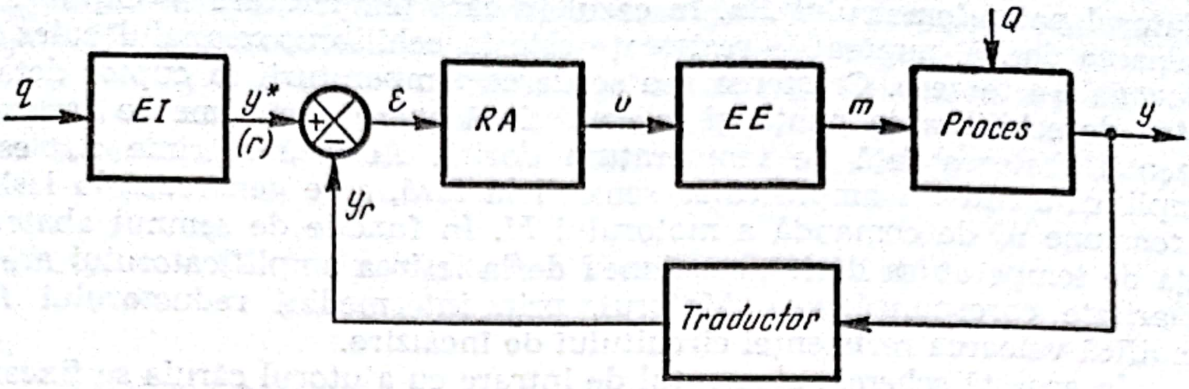


Fig. 1.9. Schema funcțională a unui sistem de reglare automată (SRA) cu element de prescriere *EI*.

Schema structurală (funcțională) a acestui sistem de reglare este prezentată în figura 1.9. În această schemă sînt incluse elementul de fixare a referinței, sau elementul de intrare, și elementul de transformare a mărimii de ieșire într-o mărime de reacție comparabilă cu referința sistemului. În acest caz reacția se realizează prin intermediul unui sistem cu pîrghii.

Pentru a identifica mărimile caracteristice și elementele funcționale ale unui alt sistem de reglare, în figura 1.10 se prezintă schema de reglare a temperaturii într-un cuptor încălzit electric.

Sesizarea temperaturii în cuptor se realizează cu ajutorul termorezistenței *TR*, inclusă în brațul punții de rezistențe. Referința sistemului care reprezintă valoarea dorită a temperaturii în cuptor se fixează cu

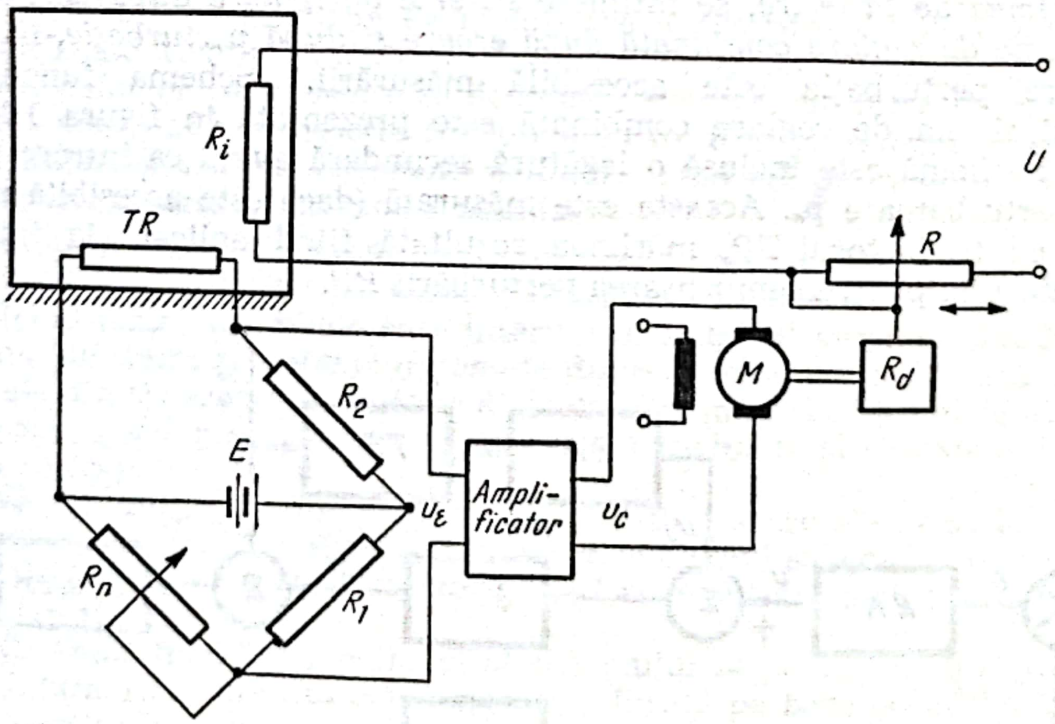


Fig. 1.10. Sistem de reglare a temperaturii într-un cuptor:
TR — termorezistență; *Rn* — rezistență reglabilă pentru fixarea referinței; R_1, R_2 — rezistențe în brațele punții; *M* — motorul de acționare; *Rd* — reductor; *Ri* — rezistența de încălzire; *R* — rezistența reglabilă pentru reglarea curentului de încălzire.

Scanned with OKEN Scanner

ajutorul potențiometrului *Rn*. În cazul în care temperatura în cuptor are valoarea dorită, puntea de rezistențe este în echilibru, semnalul cules în diagonală este zero. Creșterea sau scăderea temperaturii în cuptor determină dezechilibrarea punții și în consecință apare o mărime ce caracterizează abaterea față de temperatura dorită. Această mărime u_ε este amplificată într-un amplificator sensibil la fază, care generează la ieșire o tensiune u_c de comandă a motorului *M*. În funcție de semnul abaterii față de temperatura dorită, tensiunea de la ieșirea amplificatorului are o polaritate corespunzătoare. Motorul, prin intermediul reductorului R_d, modifică valoarea rezistenței circuitului de încălzire.

În această schemă, elementul de intrare cu ajutorul căruia se fixează referința este rezistența *Rn*, iar elementul prin intermediul căruia se culeg informații asupra variațiilor de temperatură în cuptor este termorezistența *TR*. Elementul de comparație este format din puntea de rezistențe R_1, R_2, *Rn* și *TR*. Elementul de execuție este motorul *M* cu rezistența reglabilă *R*, iar regulatorul este însuși amplificatorul *A*. Schema structurală a acestui sistem este identică cu schema prezentată în figura 1.9, cu observația că variația mărimii de la ieșire se transmite la intrarea elementului de comparație cu întîrzierea determinată de constanta de timp a termorezistenței. Reacția în acest caz este o legătură funcțională denumită elastică, întrucît ieșirea nu se mai transmite instantaneu la intrarea elementului de comparație. Realizarea dependenței intrare-ieșire la acest sistem este influențată de întîrzierea introdusă de elementul de pe calea de reacție.

Spre deosebire de aceste sisteme de reglare automată *care acționează după eroarea sau abaterea între programul sau referința sistemului și mărimea de la ieșire*, se întîlnesc *sisteme de reglare după perturbație* și *sisteme de reglare combinată după eroare și după perturbație*, în cazul în care perturbația este accesibilă măsurării. Schema funcțională a unui sistem de reglare combinată este prezentată în figura 1.11. În această schemă este inclusă o legătură secundară avînd ca intrare mărimea perturbatoare p_a. Aceasta este măsurată (dacă este accesibilă măsurării) cu traductorul *TP*, mărimea rezultată fiind aplicată la intrarea regulatorului pentru compensarea perturbării *RP*.

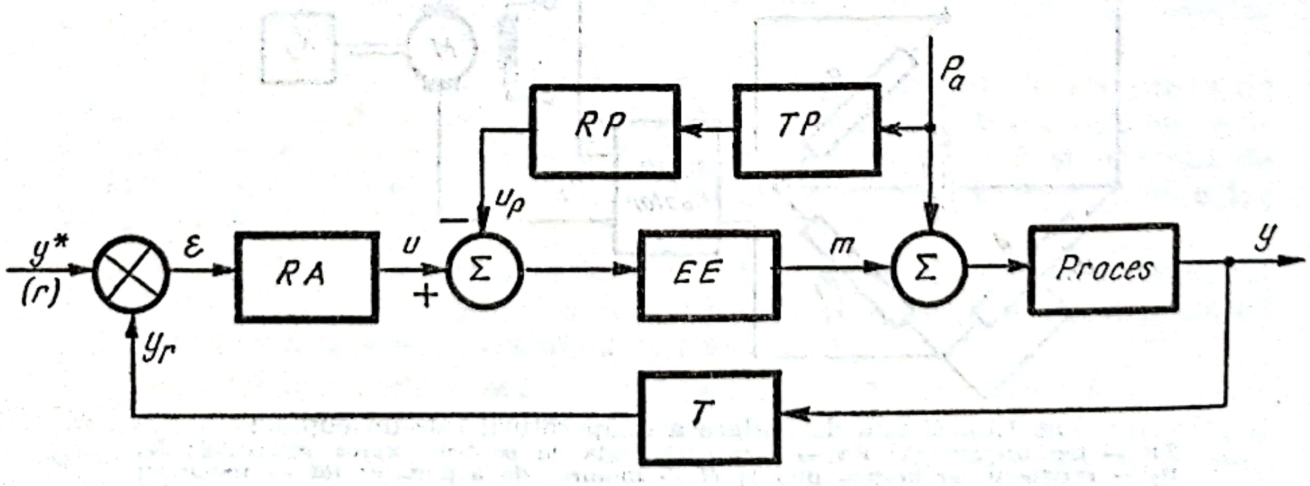


Fig. 1.11. Schema unui sistem de reglare combinată.

O asemenea structură înlătură dezavantajele sistemului de reglare după eroare compensînd direct efectul perturbației, eliminîndu-se astfel întîrzierea în transmiterea semnalului de la ieșire la intrare pentru ca sistemul să acționeze la apariția abaterii. Această categorie de sisteme precum și alte sisteme de reglare speciale sînt prezentate în capitolul 7.

1.4. CLASIFICAREA SISTEMELOR AUTOMATE. ETAPELE DEZVOLTĂRII AUTOMATICII

Sistemele automate se pot clasifica după mai multe criterii, avînd la bază fie structura fie relația funcțională ce le caracterizează. După structură, așa cum s-a arătat în subcapitolul 1.2, sistemele automate pot fi cu structură deschisă și cu structură închisă.

● După *cantitatea de informație apriorică* disponibilă despre subsistemul condus (instalația tehnologică) putem clasifica sistemele în *sisteme cu informație apriorică completă* și *sisteme cu informație apriorică incompletă*. În primul caz, subsistemul condus este complet definit iar caracteristicile sale sînt invariabile în timp, pe cînd în cazul sistemelor cu informație apriorică incompletă caracteristicile procesului condus sînt variabile în timp. Perturbațiile parametrice ce acționează asupra procesului modifică parametrii sau caracteristicile de transfer ale procesului, astfel încît subsistemul conducător va trebui să se adapteze continuu acestor modificări pentru a se asigura desfășurarea procesului după programul impus. Asemenea sisteme sînt denumite *sisteme adaptive*, iar din punct de vedere structural, pe lîngă circuitul de reacție negativă, acestea conțin elemente funcționale care asigură identificarea continuă a procesului și elaborează strategia de modificare a algoritmului de conducere.

● După relația funcțională între mărimile de intrare și de ieșire ale subsistemelor componente se deosebesc *sisteme automate liniare*, cînd modelul matematic ce descrie funcționarea tuturor subsistemelor este un model liniar, și *sisteme automate neliniare*, cînd cel puțin unul din subsisteme este descris de un model neliniar.

● După natura semnalelor prelucrate în sistemul automat, se deosebesc *sisteme automate cu acțiune continuă* sau *sisteme automate continue* (cînd toate variabilele care intervin în sistemul automat sînt funcții continue de timp) și *sisteme automate discrete* (cînd cel puțin una dintre mărimile din sistem are o variație discretă, discontinuă). Sistemele discrete se împart în *sisteme automate cu impulsuri modulate* și *sisteme automate numerice* (cap. 9).

● În funcție de numărul variabilelor de intrare și/sau de ieșire ale sistemului se deosebesc *sisteme monovariabile* (cînd sistemul are o intrare și o ieșire) și *sisteme multivariabile* (cînd sistemul are mai multe mărimi de intrare și/sau ieșire).

● După modelul funcțional al sistemului se poate face o clasificare ca în figura 1.12. Această clasificare este făcută pe baza ecuațiilor ce descriu funcționarea sistemelor.

Sistemele cu parametrii distribuiți necesită ecuații cu derivate parțiale pentru descrierea lor (de exemplu curenții și tensiunile de-a lungul unei linii electrice lungi). O ecuație cu derivate parțiale este o relație

Scanned with OKEN Scanner

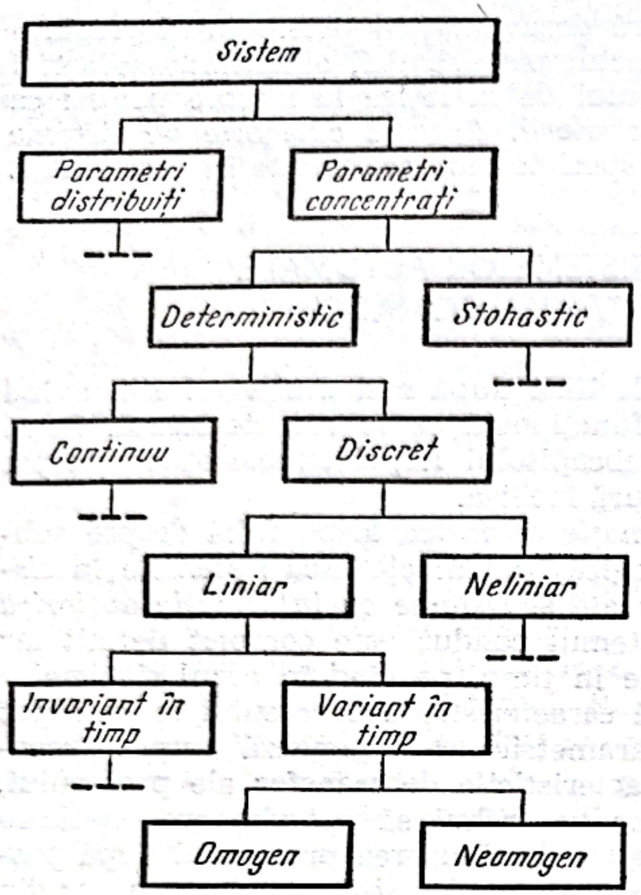


Fig. 1.12. Schemă pentru clasificarea sistemelor.

care implică una sau mai multe variabile dependente și două sau mai multe variabile independente, împreună cu derivatele parțiale ale variabilelor dependente în raport cu variabilele independente. Un exemplu de ecuație cu derivate parțiale este ecuația difuziei

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = K \frac{\partial \theta}{\partial t},$$

unde $\theta = \theta(x, t)$ este variabila dependentă și reprezintă temperatura într-o bară de oțel la o anumită poziție x și la un anumit timp t.

La sistemele cu parametrii concentrați, disiparea și înmagazinarea de energie pot fi concentrate într-un număr finit de poziții spațiale discrete. Aceste sisteme sînt descrise prin ecuații diferențiale ordinare sau prin ecuații cu diferențe finite.

● Sistemele care conțin parametri și semnale (inclusiv intrări) care sînt descrise într-o formă probabilistică sînt denumite *sisteme stohastice*. Spre deosebire de aceste sisteme, în cazul cînd toate semnalele și toți parametrii sistemului sînt perfect determinate la fiecare valoare a timpului *sistemele sînt deterministice*.

● În cazul în care parametrii modelului matematic al sistemului automat sînt constanți în timp (ecuație diferențială cu coeficienți constanți), sistemul este *invariant în timp*. Spre deosebire de aceste sisteme invariante, în cazul în care parametrii modelului matematic sînt funcție de timp, sistemul descris de un asemenea model este un *sistem variabil în timp* sau cu *parametrii variabili*.

● Dacă comportarea sistemului este determinată în întregime de condițiile sale inițiale, neavînd intrări, sistemul este omogen (ecuație diferențială omogenă, fără excitație externă). Sistemul neomogen este descris de un model la care intervine acțiunea mărimilor de intrare.

Linia punctată din figura 1.12 evidențiază existența unor subclase asemănătoare la fiecare nivel.

1.5. PROBLEME ALE SISTEMELOR AUTOMATE. METODE DE STUDIU

Principalele probleme ale sistemelor automate sînt legate de analiza și sinteza acestora, de determinarea modelelor matematice ale instalațiilor supuse automatizării, de optimizarea funcționării lor etc.

Scanned with OKEN Scanner

Analiza sistemelor automate reprezintă o etapă în studiul acestora și constă în determinarea mărimii de ieșire (respectiv a răspunsului), a comportării în regim staționar și tranzitoriu a sistemelor în condițiile în care sînt cunoscute mărimile de intrare sau/și mărimile perturbatoare precum și structura și modelul funcțional al întregului sistem. Prin analiză se urmărește determinarea performanțelor realizate de sistem în procesul de automatizare a unei instalații tehnologice date. Analiza performanțelor evidențiază gradul de precizie cu care se realizează relația dorită între intrarea și ieșirea sistemului automat, precum și influența anumitor parametri ai sistemului asupra performanțelor sale.

Sinteza sau proiectarea unui sistem automat presupune rezolvarea mai multor probleme, și anume:

— stabilirea criteriilor de performanță pentru sistem pornind de la considerațiile și restricțiile impuse de instalația tehnologică;

— întocmirea schemei structurale a sistemului automat cu evidențierea tuturor elementelor componente;

— alegerea corespunzătoare a elementelor de măsură și a elementelor de execuție;

— alegerea și acordarea optimă a regulatorului automat în vederea satisfacerii criteriilor de performanță impuse apriori;

— verificarea prin analiză a performanțelor realizate de sistemul automat proiectat.

În cazul în care anumite performanțe ale sistemului proiectat și analizat nu au fost realizate, se trece la reproiectare sau la corecția sistemului.

Corecția unui sistem automat constă în introducerea în structura acestuia a unor elemente „corectoare" în scopul îmbunătățirii performanțelor. Alegerea și dimensionarea acestor sisteme de corecție se face în concordanță cu structura și modelul funcțional inițial al sistemului și cu performanțele ce se impun a fi corectate.

Realizarea unei proiectări cît mai riguroase a unui sistem automat convențional presupune o cunoaștere cu o precizie cît mai bună și cît mai completă a modelului matematic al instalației supusă automatizării. Astfel, una dintre cele mai importante probleme în proiectarea sistemelor automate este identificarea cît mai precisă a procesului automatizat. În cazul sistemelor adaptive această identificare trebuie efectuată continuu și automat, cu mare precizie și viteză, astfel încît informațiile culese despre evoluția procesului să fie utilizate eficient la elaborarea strategiei de conducere a acestuia.

În cazul în care se urmărește ca sistemul automat să aibă o comportare optimă, adică să se comporte cel mai bine dintr-un anumit punct de vedere, avem de rezolvat probleme de comandă sau de conducere optimală a unui proces. Extremizarea unui criteriu de performanță dat, pentru sisteme definite analitic prin modele matematice cunoscute apriori, constituie o problemă de optim. Pe lîngă aceste probleme tratate pentru sistemele continue și discrete, liniare și neliniare, în cadrul lucrării vor fi prezentate și unele aspecte ale conducerii cu calculatorul a proceselor, ale proiectării asistată de calculator a sistemelor automate.

Scanned with OKEN Scanner

Metodele de calcul cele mai uzuale pentru analiza sistemelor apelează la modelele matematice de tipul ecuațiilor diferențiale, de tipul funcțiilor de transfer și de tipul caracteristicilor de frecvență.

Aceste metode stau la baza teoriei clasice a sistemelor automate, putînd fi utilizate atît pentru analiză cît și pentru proiectare. Pentru proiectarea sistemelor sînt utilizate următoarele metode clasice: metoda distribuției poli-zerouri, metoda locului rădăcinilor, diagramele Nyquist și Bode.

Utilizarea unor modele de tip matriceal-vectorial cu considerarea stării sistemului, modele ce stau la baza teoriei moderne a sistemelor automate, permite accesul comod la tehnica de calcul numeric, rezolvîndu-se cu eficiență și precizie atît problemele de analiză cît și problemele de sinteză (proiectare). Aceste modele evoluate permit reprezentarea unitară a sistemelor mult mai realistă și posibilitatea realizării unor sisteme cu grad mare de complexitate.

1.6. DEZVOLTAREA AUTOMATIZĂRII LA NOI ÎN ȚARĂ

Automatizarea reprezintă introducerea în practică a principiilor automaticii. Printre consecințele directe ale introducerii automatizării remarcăm creșterea productivității muncii, creșterea calității și cantității produselor realizate, îmbunătățirea condițiilor de muncă și ridicarea nivelului de pregătire a personalului de exploatare a instalațiilor de automatizare. Ținînd seama de aceste consecințe, în țara noastră sînt create condițiile introducerii pe scară largă a automatizării.

Remarcabile rezultate în această direcție au fost obținute în decursul ultimelor două cincinale, crescînd considerabil gradul de dotare cu mijloace de automatizare a economiei naționale, multe dintre acestea fiind concepute și realizate de specialiștii noștrii.

În cadrul Centralei industriale de echipamente de telecomunicații și automatizări (CIETA), care grupează toate întreprinderile producătoare de echipamente și panouri de automatizare (I.E.A., întreprinderile Automatica, Electromagnetica, Electroaparataj, Întreprinderea de elemente pneumatice de automatizare și măsură Bîrlad, Întreprinderea de aparataj electric și de instalații Titu etc.) precum și Institutul de cercetări și proiectări automatizări (I.P.A.T.C.T.) se desfășoară o bogată activitate privind proiectarea, realizarea și montarea unor noi sisteme de automatizare, noi echipamente electronice și pneumatice pentru automatizarea proceselor. Astfel, remarcăm sistemele de reglare electronice pentru procese rapide (acționări electrice) noul sistem unificat electronic de reglare pentru procese lente realizat cu circuite integrate, sistemele de comandă și afișare numerică a cotei de tip NUMEROM, sisteme de conducere cu microcalculatoare etc.

Cercetările întreprinse pînă în prezent în direcția asimilării unui sistem de reglare numerică vor conduce la realizarea unor sisteme moderne pentru reglarea și conducerea proceselor tehnologice.

Dezvoltarea tehnologiei electronice și asimilarea în țară a circuitelor integrate pe scară largă deschid largi perspective echipamentelor de automatizare cu microprocesoare. Automatizarea complexă a proceselor

Scanned with OKEN Scanner

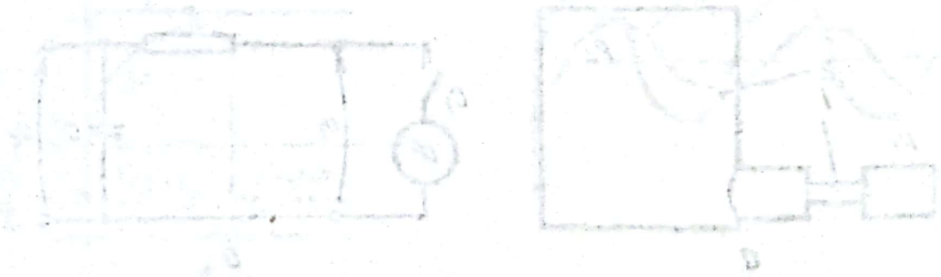
cu ajutorul calculatoarelor se extinde tot mai mult în concordanţă cu cerinţele de performanţă tot mai severe impuse proceselor industriale automatizate.

Dezvoltarea sistemului de echipamente de conducere ECAROM, a sistemului de reglare numerică şi a sistemelor programabile secvenţiale face posibilă automatizarea complexă a tot mai multor procese.

Paralel cu realizarea unor echipamente de automatizare după concepţie proprie, competitive cu produse similare realizate în lume, se proiectează şi implementează în industrie sisteme complexe de automatizare. Astfel, pentru întreprinderile industriale chimice, mecanice, centrale electrice, întreprinderi metalurgice, întreprinderi de maşini-unelte, proiectele realizate de specialiştii noştrii sînt implementate cu echipamente de concepţie proprie. Multe dintre echipamentele şi sistemele produse în ţară sînt exportate sub forma unor livrări complexe în diverse ţări ale lumii (R.D.G., R. P. Chineză, R. S. F. Iugoslavia, Republica Arabă Egipt, R. P. Bulgaria etc.).

Sarcini deosebit de importante revin industriei de echipamente şi instalaţii de automatizare în cincinalul 1981—1985, precum şi în perioada de perspectivă pînă în 1990.

Paralel cu această activitate de concepţie şi proiectare a echipamentelor de automatizare, în ţara noastră se desfăşoară o activitate susţinută de cercetare în domeniul teoriei sistemelor automate, activitate apreciată şi recunoscută atît în ţară cît şi peste hotare.



Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 2

DETERMINAREA MODELELOR MATEMATICE ALE ELEMENTELOR ŞI SISTEMELOR LINIARE

2.1. REGIMURI DE FUNCŢIONARE

Principalele componente ale unui sistem de reglare automată prezentate în subcapitolul 1.3 sînt: instalaţia tehnologică, traductorul de măsură, elementul de execuţie şi regulatorul automat. Pentru realizarea relaţiei funcţionale intrare-ieşire a sistemului, fiecare component al acestuia intervine prin modelul său funcţional respectiv prin relaţia dintre intrarea şi ieşirea corespunzătoare. Funcţionarea sistemului poate fi definită printr-un *model staţionar*, caz în care forma de variaţie în timp a intrării şi a ieşirii este identică (sistemul fiind caracterizat prin caracteristica sa statică), sau printr-un model general care include elemente acumulatoare de energie şi disipatoare de energie. Un asemenea model general permite a caracteriza funcţionarea sistemului în *regim dinamic* sau *regim tranzitoriu*.

Pentru a ilustra noţiunea de regim staţionar şi regim tranzitoriu considerăm un sistem pneumatic alcătuit dintr-un tub capilar *1* (o rezistenţă pneumatică) şi un vas *2* (capacitate), conform figurii 2.1, *a*.

Dacă la intrarea tubului capilar se aplică o presiune p_1, care se menţine constantă, şi se măsoară continuu presiunea p_2 în vas, se constată

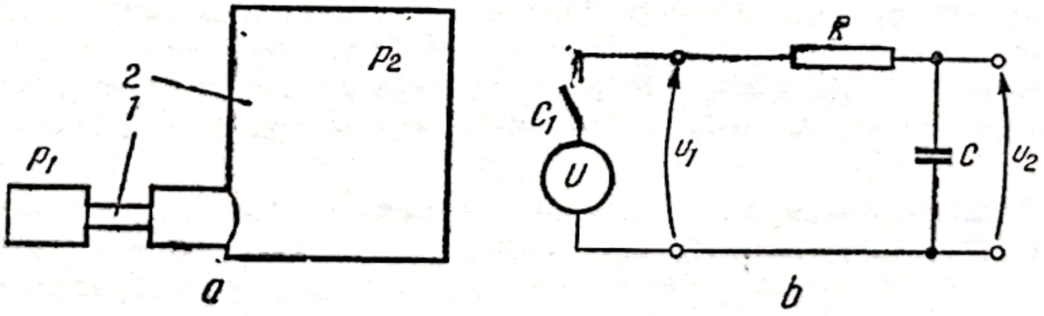


Fig. 2.1. Schema unui circuit RC:
a — circuit *RC* pneumatic; *1* — rezistenţă; *2* — capacitatea; *b* — circuit *RC* electric.

Scanned with OKEN Scanner

o continuă creștere a acesteia pînă la valoarea presiunii p_1. La atingerea acestei valori, prin tubul capilar nu mai curge fluid, s-a atins un regim staționar fixat la valoarea presiunii p_1. Variația presiunii p_2 în vas de la valoarea zero la valoarea p_1 are loc pe baza acumulării de fluid (gaz), aceasta caracterizînd regimul dinamic sau tranzitoriu. Regimul dinamic se definește ca fiind răspunsul cuprins între două regimuri staționare. În exemplul considerat, cele două regimuri staționare sînt fixate prin valorile zero și $p_2=p_1$ ale presiunii în vas.

Caracteristica dinamică asociată regimului tranzitoriu se definește prin variația mărimii de la ieșire în timp pentru o formă cunoscută de variație a mărimii de intrare. Într-o manieră similară se poate evidenția regimul staționar și tranzitoriu la un circuit electric de tip *RC* (fig. 2.1, *b*). Închiderea contactului C_1 determină aplicarea la intrarea circuitului a tensiunii u_1. Încărcarea capacității C_1 are loc prin rezistența R cu o întîrziere determinată de constanta RC. Legea după care se încarcă capacitatea C este descrisă prin ecuația

$$RC\frac{du_2}{dt}+u_2=u_1. \tag{2.1}$$

Regimul staționar se atinge atunci cînd

$$u_2=u_1. \tag{2.2}$$

În figura 2.2, *a* se prezintă legea de variație a tensiunii la bornele capacității C cînd la intrarea circuitului se aplică tensiunea u_1=const. Dacă la intrare se aplică un semnal sinusoidal, tensiunea la ieșire are de asemenea o formă sinusoidală, însă defazată față de tensiunea de la intrare (fig. 2.2, *b*) și de amplitudine mai mică.

Este de remarcat faptul că forma de variație a mărimii de ieșire în regim tranzitoriu depinde de forma de variație a mărimii de la intrare precum și de natura elementelor componente ale sistemului considerat.

Înainte de a trece la prezentarea modelelor matematice pentru diferite elemente componente și sisteme automate vom defini principalele tipuri de semnale utilizate în automatică.

Semnalele utilizate frecvent în studiul sistemelor liniare sînt semnalele deterministice de tip: *treaptă unitară, rampă unitară, impuls unitar, semnal sinusoidal.*

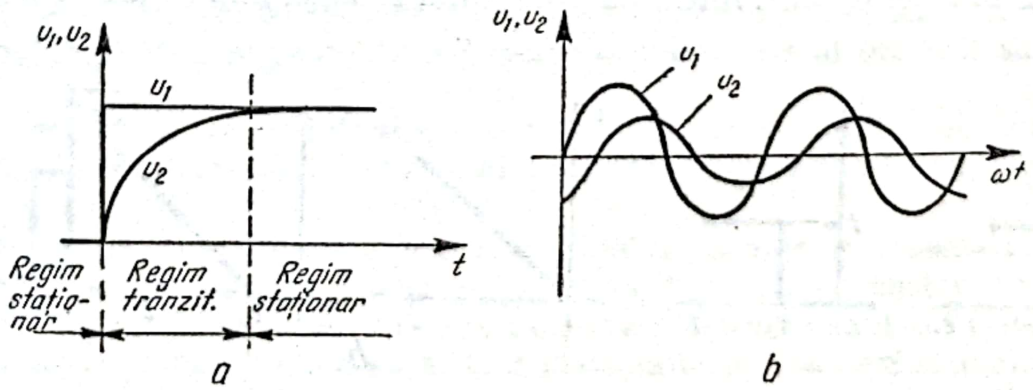


Fig. 2.2. Răspunsul unui circuit *RC*:
a — răspunsul la intrare treaptă; *b* — răspunsul la intrare sinusoidală.

Scanned with OKEN Scanner

Aceste semnale, deşi nu apar sub forma lor ideală în funcţionarea reală a sistemelor, sînt utilizate în studiul sistemelor cu rezultate suficient de bune. O categorie de semnale ce poate fi utilizată cu precizie şi eficienţă mărită în studiul sistemelor automate este reprezentată de semnalele stohastice. Utilizarea acestor semnale în studiul sistemelor automate necesită folosirea unui formalism matematic adecvat, calculul probabilităţilor şi metode statistice [31,5].

Funcţia sau semnalul treaptă unitară se defineşte prin:

$$u_0(t-t_0)=\begin{cases} 1 \text{ pentru } t>t_0; \\ 0 \text{ pentru } t\leqslant t_0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Discontinuitatea funcţiei treaptă unitară (fig. 2.3, *a*) poate să apară în origine ($t_0=0$) sau la momentul $t=t_0$.

Funcţia rampă unitară $v(t)$ se defineşte prin:

$$v(t)=\int_{-\infty}^{t} u_0(\tau-t_0)\,d\tau=\begin{cases} t-t_0 \text{ pentru } t>t_0; \\ 0 \quad\quad \text{pentru } t\leqslant t_0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Această funcţie poate porni din origine ($t_0=0$) sau de la momentul $t=t_0$ (fig. 2.3, *b*).

Funcţia impuls unitar $\delta(t)$ poate fi definită prin relaţia

$$\delta(t)=\lim_{\Delta t\to 0^+}\left[\frac{u_0(t)-u_0(t-\Delta t)}{\Delta t}\right], \tag{2.5}$$

unde $u_0(t)$ reprezintă funcţia treaptă unitară iar $\Delta t\to 0^+$ indică faptul că Δt tinde spre zero din dreapta. Reprezentarea grafică a acestei funcţii este dată în figura 2.3, *c*. La limită această funcţie va avea o valoare ce tinde spre ∞ şi o durată ce tinde spre zero. Aria de sub curbă este egală cu unitatea pentru toate valorile lui Δt (înălţimea impulsului fiind $1/\Delta t$, iar lăţimea egală cu Δt) şi deci se păstrează şi la limită relaţia

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt=1. \tag{2.6}$$

Ţinînd seama de această relaţie, se poate demonstra următoarea proprietate a funcţiei impuls: integrala produsului funcţiei impuls unitar $\delta(t-t_0)$

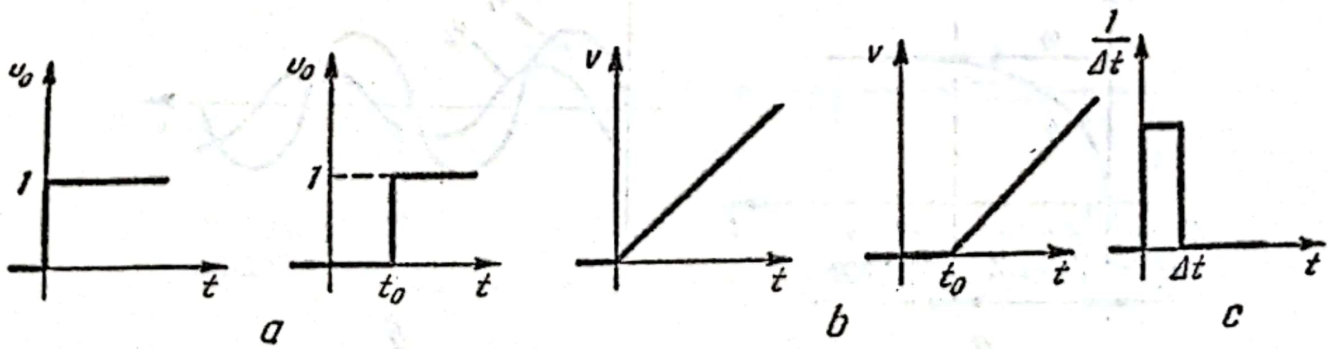


Fig. 2.3. Tipuri de semnale utilizate în automatică:
a — treaptă unitară; *b* — rampă unitară; *c* — impuls unitar.

Scanned with OKEN Scanner

și a funcției $f(t)$, care este continuă la $t=t_0$, pe un interval care include t_0, este egală cu funcția $f(t)$ evaluată la t_0

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\delta\,(t-t_0)\,dt=f(t_0). \tag{2.7}$$

Semnalul sinusoidal este de asemenea un semnal deterministic utilizat pentru analiza în frecvență a sistemelor automate. Este definit matematic cu ajutorul funcțiilor trigonometrice sinus sau cosinus, de exemplu

$$u=Um\ \sin\omega t. \tag{2.8}$$

Posibilitatea de realizare fizică ușoară a acestei forme de semnal ca și simplitatea formalismului său matematic justifică larga lui utilizare.

2.2. MODELE MATEMATICE LINIARE DE TIPUL INTRARE-IEȘIRE

Pentru întocmirea unui model cît mai exact al unui sistem dat se impune mai întîi a defini scopul întocmirii modelului și a delimita legăturile cu lumea înconjurătoare, evidențiind variabilele de interes pentru structura considerată. Următoarea etapă constă în stabilirea modelului sistemului pe baza legilor fizicii, mecanicii, chimiei, electrotehnicii etc., care definesc funcționarea elementelor componente.

Toate sistemele fizice de natură electrică, mecanică, termică, fluidică conțin mecanisme de acumulare, de disipare sau transformare a energiei. Întocmirea modelului unui asemenea sistem impune evidențierea unor elemente idealizate ce alcătuiesc acest sistem și în cadrul cărora are loc acumularea, disiparea sau transformarea de energie. Un asemenea model obținut este un model fizic. Stabilirea ecuațiilor de funcționare a fiecărui element idealizat permite întocmirea modelului matematic al întregului sistem, model ce se poate prezenta sub formă de relații algebrice, ecuații diferențiale, expresii integrale liniare sau neliniare, cu coeficienți constanți sau variabili în timp.

Aplicînd legi și teoreme cum ar fi teoremele I și a II-a a lui Kirchhoff, principiul lui D'Alembert, legea conservării masei de fluid, legea conservării energiei etc., se poate stabili modelul matematic al oricărui sistem fizic.

Verificarea compatibilității modelului teoretic obținut cu lumea reală reprezintă o ultimă etapă în elaborarea unui model al unui sistem fizic.

Modelele matematice utilizate în studiul sistemelor automate pot fi de tipul intrare-ieșire (ecuații diferențiale, funcții de transfer, caracteristici de frecvență) și de tipul intrare-stare-ieșire (ecuații de stare și ecuații de legătură). Natura modelului matematic ce descrie funcționarea unui sistem determină tipul sistemului (liniar sau neliniar, variabil sau invariant, cu parametrii concentrați sau cu parametrii distribuiți etc.).

Scanned with OKEN Scanner

2.2.1. ECUAȚII DIFERENȚIALE ALE ELEMENTELOR COMPONENTE ALE UNUI SISTEM AUTOMAT

O ecuație diferențială ordinară este o egalitate care implică una sau mai multe variabile dependente, o variabilă independentă și una sau mai multe derivate ale variabilelor dependente în raport cu variabila independentă. Legea a II-a a lui Newton se poate scrie sub forma unei ecuații diferențiale

$$F=M\frac{dv}{dt}, \tag{2.9}$$

unde viteza $v\equiv v(t)$ și forța $F\equiv F(t)$ sînt variabilele dependente, iar timpul este variabila independentă.

Pentru obținerea ecuației diferențiale ce descrie funcționarea unui element trebuie evidențiată mai întîi natura transformărilor energetice ce au loc în timpul funcționării (acumulare, disipare, transformarea energiei dintr-o formă în alta).

Într-un circuit electric alcătuit dintr-o rezistență, o inductanță și o capacitate, întîlnim fenomenul de disipare prin rezistență, de acumulare a energiei potențiale în capacitate și a energiei cinetice în inductanță.

Relațiile ce definesc aceste fenomene în cazul în care notăm cu i curentul ce parcurge elementul de circuit idealizat iar cu u tensiunea la bornele acestuia (fig. 2.4) sînt:

$$U_R=R\cdot i; \qquad U_L=L\frac{di}{dt}; \qquad U_c=\frac{1}{C}\int_0^t i\,dt+u_{c0}.$$

Prin aplicarea teoremei a doua a lui Kirchhoff acestui circuit se obține

$$u_1(t)=U_R+U_L+U_c=Ri+L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\int_0^t i\,dt+u_{c0}, \tag{2.10}$$

sau, dacă ținem seama că $u_2(t)$ este tensiunea ce interesează la bornele de ieșire ale circuitului, iar $u_{c0}=0$, ecuația (2.10) devine

$$u_1(t)=LC\frac{d^2u_2(t)}{dt^2}+RC\frac{du_2(t)}{dt}+u_2(t). \tag{2.11}$$

Această ecuație reprezintă modelul matematic al sistemului electric prezentat în figura 2.4, considerînd elementele de circuit ca avînd o com-

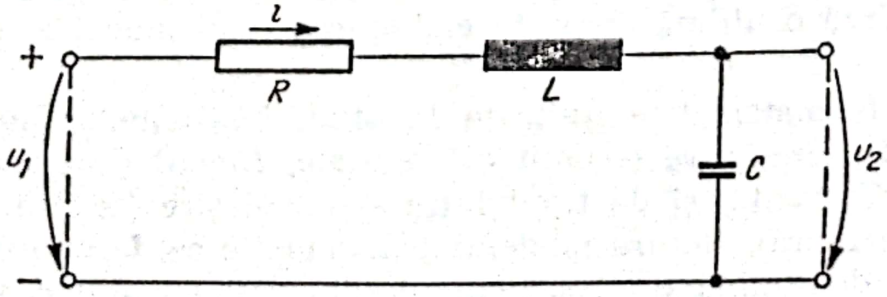


Fig. 2.4. Schema unui circuit electric RLC.

Scanned with OKEN Scanner

portare ideală. Astfel, prin aplicarea legilor fizicii și electrotehnicii s-a obținut o ecuație diferențială de ordinul doi care caracterizează funcționarea acestui sistem electric.

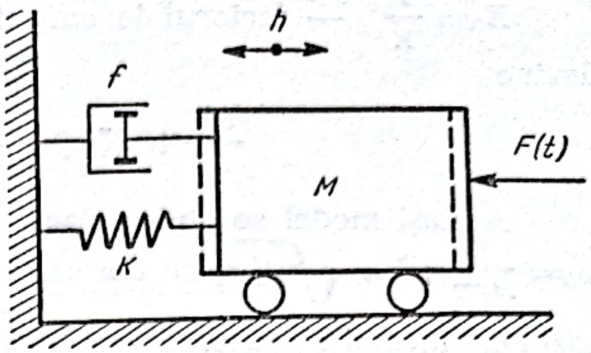


Fig. 2.5. Schema unui sistem mecanic:
M — masă inerțială; K — constanta de elasticitate a resortului; f — coeficient de frecare vîscoasă; $F(t)$ — forță externă.

Într-o manieră similară se scrie modelul matematic pentru un sistem mecanic în componența căruia intervin de asemenea elemente acumulatoare și disipatoare de energie (masa inerțială M acumulatoare de energie cinetică, resortul acumulator de energie potențială și amortizorul ca fiind element disipator de energie — fig. 2.5). Considerînd aceste elemente ideale, pot fi scrise ecuațiile ce descriu funcționarea lor dacă notăm prin v viteza de deplasare a masei sub acțiunea forței externe $F(t)$ aplicate sistemului:

$$F_i = M\frac{dv}{dt} = M\frac{d^2h}{dt^2} \text{ — forța inerțială;}$$

$$F_e = K\int_0^t v\,dt = Kh \text{ — forța elastică;}$$

$$F_f = f\cdot v = f\frac{dh}{dt} \text{ — forța de frecare vîscoasă.}$$

Pentru a obține ecuația generală a sistemului mecanic prezentat în figura 2.5 aplicăm principiul lui D'Alembert

$$M\frac{d^2h}{dt^2} + f\frac{dh}{dt} + Kh = F(t). \tag{2.12}$$

Această ecuație diferențială, ca și ecuația (2.11), este o ecuație liniară cu coeficienți constanți. În cazul în care se ia în considerare dependența elasticității K a resortului de deplasare h precum și dependența coeficientului de frecare vîscoasă f de viteza de deplasare a masei M, modelul matematic este un model neliniar

$$M\frac{d^2h}{dt^2} + f(h,\dot{h})\frac{dh}{dt} + K(h,\dot{h})h = F(t). \tag{2.13}$$

Pentru modelul liniar (2.12), identificînd mărimea de intrare $u(t)=F(t)$ iar mărimea de ieșire $y(t)=h(t)$ și adoptînd notațiile:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} \text{ — pulsația naturală a sistemului;}$$

$$\zeta = \frac{f}{2\sqrt{K\cdot M}} \text{ — factorul de amortizare;}$$

Scanned with OKEN Scanner

$K_0=\frac{1}{K}$ — factorul de amplificare al sistemului, forma modelului devine

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\zeta\omega_n\frac{dy}{dt}+\omega_n^2y=\omega_n^2K_0u. \tag{2.14}$$

Același model se obține dacă în ecuația (2.11) introducem notațiile: $\omega_n=\frac{1}{\sqrt{LC}}$; $\zeta=\sqrt{\frac{C}{L}}$, cu observația că factorul de amplificare $K_0=1$ în cazul circuitului electric.

Această ecuație caracterizează funcționarea unui sistem de ordinul doi indiferent de tipul elementelor componente ale acestuia (mecanice, electrice, hidraulice). Mărimile K_0, ω_n, ζ reprezintă parametrii caracteristici ai sistemului de ordinul doi, iar comportarea în regim staționar și tranzitoriu a sistemului este influențată sensibil de variațiile acestor parametri (v. paragr. 3.1.2). Comportarea în regim staționar a acestui sistem este descrisă prin ecuația de proporționalitate

$$y(t)=K_0\cdot u(t).$$

Această relație evidențiază o comportare liniară a sistemului în regim staționar dacă factorul de proporționalitate este independent de variabilele u și y.

Pentru elementul de ordinul întîi descris prin ecuația (2.1) se pot defini parametrii caracteristici dacă modelul matematic este scris sub forma

$$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=K_0\cdot u(t), \tag{2.15}$$

unde: prin $T=RC$ s-a notat constanta de timp a sistemului de ordinul întîi, iar prin K_0 (în cazul considerat $K_0=1$) s-a notat factorul de amplificare (sau coeficientul de transfer) în regim staționar.

Pentru a obține modelul unui alt sistem cu întîrziere de ordinul doi (avînd două constante de timp), considerăm sistemul alcătuit din două rezervoare legate în serie printr-o rezistență hidraulică (fig. 2.6, *a*).

Pentru obținerea ecuației de funcționare a acestui sistem admitem că procesul de curgere a lichidului prin robinetele V_1, V_2 și V_3 este laminar iar rezistențele hidraulice ale acestora le notăm prin R_0, R_1 și R_2. Aplicînd ecuația continuității pentru cele două rezervoare se obține:

$$\begin{aligned} S_1dh_1&=(Q_1-Q_2)dt;\\ S_2dh_2&=(Q_2-Q_3)dt, \end{aligned} \tag{2.16}$$

unde S_1, S_2 sînt ariile suprafețelor bazelor rezervoarelor;

h_1, h_2 reprezintă nivelele.

Debitele la ieșirea din cele două rezervoare sînt determinate de înălțimea h a lichidului în rezervor și de rezistența corespunzătoare robinetelor V_2 și V_3:

$$Q_2=\frac{h_1}{R_1};\qquad Q_3=\frac{h_2}{R_2}. \tag{2.17}$$

Scanned with OKEN Scanner

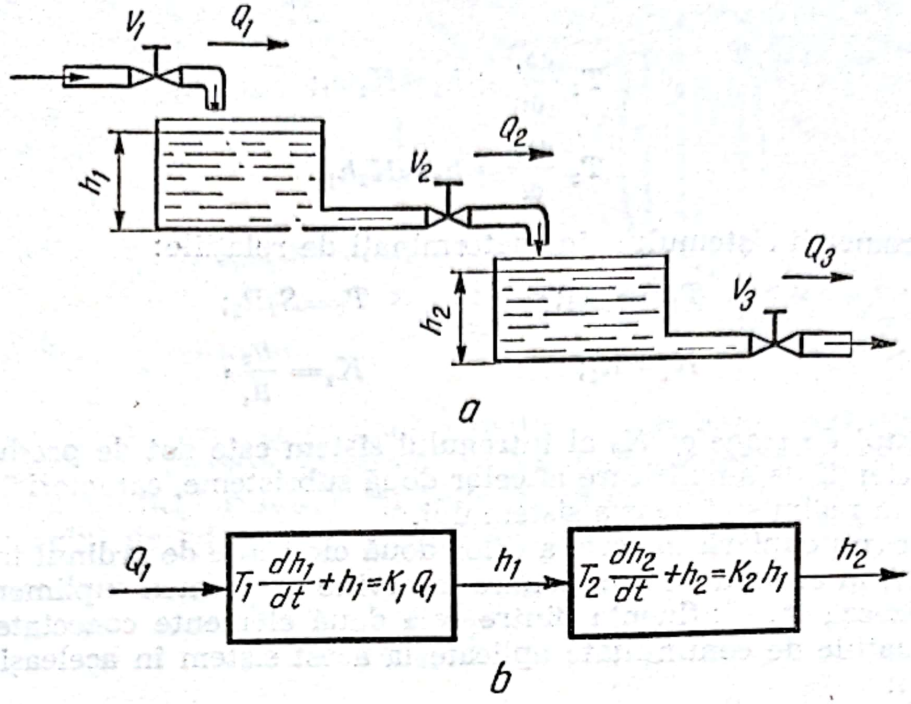


Fig. 2.6. Schema unui sistem alcătuit din două subsisteme legate în serie:

a — schema desfășurată a vaselor legate în serie fără interinfluență;
b — schema echivalentă.

Înlocuind (2.17) în (2.16) și eliminînd variabilele intermediare se obține ecuația generală a ansamblului alcătuit din cele două rezervoare ca o dependență a înălțimii h_2 de debitul Q_1 aplicat la intrare

$$S_1R_1S_2R_2\frac{d^2h_2}{dt^2}+(S_1R_1+S_2R_2)\frac{dh_2}{dt}+h_2=R_2Q_1. \qquad (2.18)$$

Dacă notăm prin $S_1R_1=T_1$ și $S_2R_2=T_2$ constantele de timp corespunzătoare celor două elemente acumulatoare de lichid precum și $R_2=K_0$, ecuația (2.18) devine

$$T_1T_2\frac{d^2y}{dt^2}+(T_1+T_2)\frac{dy}{dt}+y=K_0u, \qquad (2.19)$$

unde s-a considerat ieșirea sistemului $y=h_2$ și intrarea acestuia $Q_1=u$.

Coeficientul de proporționalitate K_0 caracterizează comportarea în regim staționar a sistemului. Un asemenea sistem caracterizat prin două constante de timp (T_1 și T_2) este un sistem cu întîrziere de ordinul doi, spre deosebire de sistemul cu întîrziere de ordinul întîi care conține o singură constantă de timp. Acest sistem este alcătuit din două subsisteme de ordinul întîi (fig. 2.6, *b*).

Într-adevăr, din relațiile (2.16) și (2.17) rezultă modelul matematic al celor două subsisteme conectate în serie ca în figura 2.6, *a*:

$$S_1\frac{dh_1}{dt}+\frac{h_1}{R_1}=Q_1;$$

$$S_2\frac{dh_2}{dt}+\frac{h_2}{R_2}=\frac{h_1}{R_1}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau:

$$T_1 \frac{dh_1}{dt} + h_1 = K_1 Q_1;$$

$$T_2 \frac{dh_2}{dt} + h_2 = K_2 h_1,$$

unde parametrii sistemului sînt determinaţi de relaţiile:

$$T_1 = S_1 R_1; \qquad T_2 = S_2 R_2;$$

$$K_1 = R_1; \qquad K_2 = \frac{R_2}{R_1}.$$

Coeficientul de transfer K_0 al întregului sistem este dat de produsul dintre coeficienţii de amplificare ai celor două subsisteme, caracterizînd funcţionarea în regim staţionar a sistemului.

În cazul cuplării în serie a celor două elemente de ordinul întîi ca în figura 2.7, în ecuaţia de funcţionare intervine un termen suplimentar care caracterizează interinfluenţa dintre cele două elemente conectate.

Ecuaţiile de continuitate aplicate la acest sistem în aceleaşi condiţii au forma:

$$S_1 \frac{dh_1}{dt} = Q_1 - Q_2;$$

$$S_2 \frac{dh_2}{dt} = Q_2 - Q_3; \qquad (2.20)$$

$$Q_2 = \frac{h_1 - h_2}{R_1};$$

$$Q_3 = \frac{h_2}{R_2}.$$

Prin eliminarea variabilelor intermediare şi ţinînd seama de notaţiile anterioare, ecuaţia generală a sistemului în acest caz are forma

$$T_1 T_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + (T_1 + T_2 + R_1 S_2) \frac{dy}{dt} + y = K_0 u_1. \qquad (2.21)$$

De observat că în regim staţionar se obţine aceeaşi ecuaţie ($y = K_0 u$).

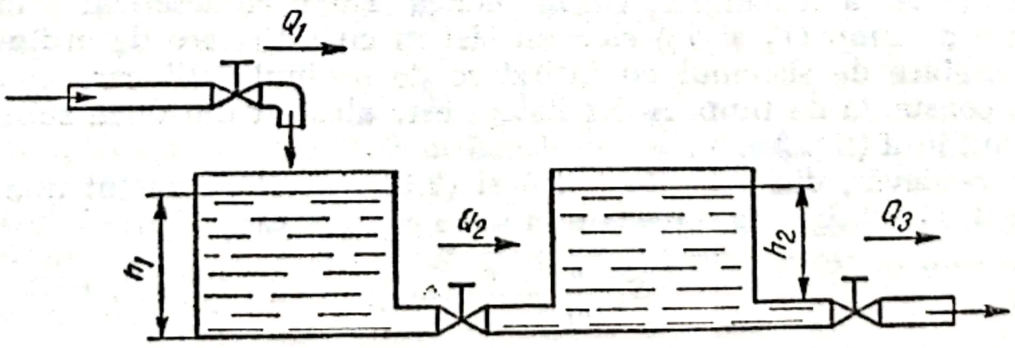


Fig. 2.7. Schema unui sistem alcătuit din două subsisteme cuplate în serie cu interinfluenţă între ele.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru circuitul electric prezentat în figura 2.8, se obține un model similar existînd în acest caz o interinfluență între cele două circuite electrice RC

$$R_1C_1R_2C_2\frac{d^2u_2}{dt^2}+(R_1C_1+$$

$$+R_2C_2+R_1C_2)\frac{du_2}{dt}+u_2=u_1.$$

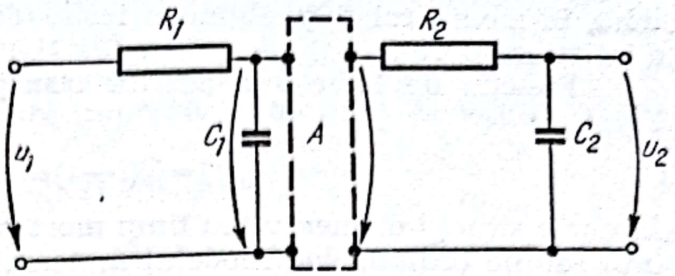


Fig. 2.8. Schema echivalentă a unui sistem alcătuit din două elemente RC cuplate în serie și adaptorul de impedanță A.

Pentru separarea celor două circuite și eliminarea factorului de interinfluență din ecuația generală, se impune prezența între cele două circuite a amplificatorului A, cu factorul de amplificare egal cu unitatea, care are rolul de adaptor de impedanțe. În acest caz, cu ajutorul ecuațiilor:

$$R_1C_1\frac{du_2'}{dt}+u_2'=u_1;$$

$$R_2C_2\frac{du_2}{dt}+u_2=u_2',$$

se obține

$$R_1C_1R_2C_2\frac{d^2u_2}{dt^2}+(R_1C_1+R_2C_2)\frac{du_2}{dt}+u_2=u_1$$

sau relația

$$T_1T_2\frac{d^2y}{dt^2}+(T_1+T_2)\frac{dy}{dt}+y=u,$$

care este similară cu ecuația (2.19).

În cazul unor procese formate din mai multe capacități (acumulatoare) și rezistențe, ecuația de funcționare conține termeni de interinfluență dacă nu se asigură separarea între circuite. Separarea se poate realiza cu ajutorul unor amplificatoare sau adaptoare de impedanță, cu impedanță de intrare foarte mare și impedanță de ieșire foarte mică.

Un element frecvent întîlnit în practica reglării automate este elementul cu timp mort. Un exemplu tipic de proces cu timp mort este reprezentat printr-o bandă transportoare (fig. 2.9). Dacă se consideră la momentul t debitul $Q(t)$ de material încărcat din buncăr pe bandă, atunci transportul acestui material pe banda de lungime L care se deplasează cu viteza v se realizează cu o întîrziere $\tau=\frac{L}{V}$. Putem spune că la o mărime de intrare

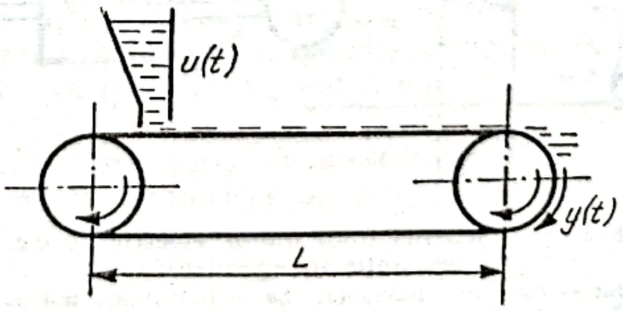


Fig. 2.9. Schema unui transportor.

dată, la momentul t se obține o ieșire după un timp τ (care reprezintă o întîrziere pură).

Funcția de la ieșirea acestui transportor se poate defini prin relația

$$y(t)=Q(t-\tau)=u(t-\tau). \tag{2.22}$$

În unele situații elementul cu timp mort prezintă și o întîrziere de ordinul întîi sau de ordinul doi, modelul matematic al unui proces cu timp mort și întîrziere de ordinul întîi fiind de forma

$$T\frac{dy}{dt}+y(t)=K_0u(t-\tau). \tag{2.23}$$

Particularitățile unui proces cu timp mort supus automatizării sînt prezentate în paragraful 6.4.2.

Unele procese tehnologice au o funcționare descrisă printr-o integrală (mărimea de ieșire este proporțională cu integrala în timp a variabilei de intrare). Un exemplu de asemenea proces este un rezervor hidraulic la care nivelul este determinat de debitul Q introdus în rezervor și de aria suprafeței S a lichidului în rezervor

$$H=\frac{1}{S}\int_0^t Q\,dt+H_0, \tag{2.24}$$

unde H_0 este nivelul inițial al lichidului în vas.

Relația (2.24) reprezintă ecuația conservării masei de fluid ($SdH=Qdt$).

Un element a cărui funcționare este descrisă prin ecuația (2.24) este cunoscut ca element integrator.

Un sistem frecvent întîlnit în automatică, fie ca proces supus automatizării fie ca un element de execuție, este motorul electric (fig. 2.10).

Presupunînd excitația independentă cu un curent de excitație i_e=const., ecuațiile care descriu funcționarea motorului se obțin aplicînd teorema a doua a lui Kirchhoff circuitului de alimentare a motorului și legea echilibrului cuplurilor care intervin în funcționarea acestuia:

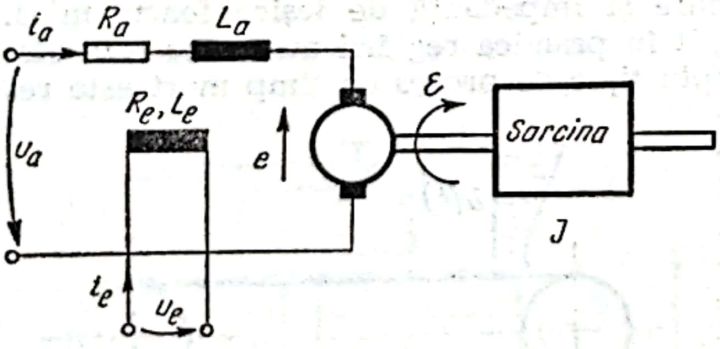


Fig. 2.10. Schema unui motor electric de c.c. cu excitație independentă:

Ra — rezistența indusului; *La* — inductanța indusului; *Re* — rezistența circuitului de excitație; *Le* — inductanța circuitului de excitație.

$$u_a-e=R_ai_a+L_a\frac{di_a}{dt};$$

$$e=K_e\cdot\omega; \tag{2.25}$$

$$C_m=K_mi_a=J\frac{d\omega}{dt}+C_{rez},$$

unde: u_a este tensiunea de alimentare a motorului și reprezintă mărimea de intrare în acest sistem;

i_a — curentul din circuitul de alimentare (circuitul rotoric);
R_a, L_a — parametrii circuitului indusului;
e — tensiunea contraelectromotoare;
ω — viteza unghiulară (reprezintă mărimea de ieşire a sistemului);
K_e, K_m — constante de proporţionalitate;
C_m — cuplul motor;
C_{rez} — cuplul rezistent;
J — momentul de inerţie al maselor în rotaţie.

Ecuaţia generală a motorului obţinută din (2.25) prin eliminarea variabilelor intermediare are forma

$$L_a J \frac{d^2\omega}{dt^2} + R_a J \frac{d\omega}{dt} + K_e K_m \omega = K_m u_a - R_a C_{rez}. \tag{2.26}$$

Această ecuaţie evidenţiază faptul că motorul, avînd ca intrare tensiunea de alimentare şi ca ieşire viteza unghiulară, se comportă ca un element cu întîrziere de ordinul al doilea.

Regimul staţionar al motorului este descris prin ecuaţia

$$K_e K_m \omega = K_m u_a - R_a C_{rez}$$

sau

$$\omega = \frac{u_a}{K_e} - \frac{R_a}{K_e K_m} C_{rez}. \tag{2.27}$$

Această relaţie evidenţiază influenţa intrării u_a şi a mărimii perturbatoare C_{rez} asupra turaţiei de regim staţionar a motorului.

Alte elemente de execuţie electrice, pneumatice, hidraulice sînt descrise de ecuaţii diferenţiale similare putînd fi elemente cu acţiune proporţională sau integrală, cu întîrziere de ordinul întîi sau de ordinul doi.

Traductoarele care intervin în structura unui sistem de reglare pot fi descrise, ţinînd seama de tipul şi principiile lor de funcţionare, de ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi, de ordinul al doilea sau mai mare, de relaţii de proporţionalitate sau prin relaţii derivative sau integratoare. Problemele legate de alegerea traductoarelor pentru sistemele de reglare cu referiri şi la modelul matematic al acestora sînt prezentate în subcapitolul 6.3.

Categoria cea mai importantă de elemente componente ale sistemelor de reglare sînt regulatoarele automate. După relaţia funcţională ieşire-intrare, regulatoarele automate pot fi, regulatoare proporţionale *P*, regulatoare proporţional-integrale *PI*, regulatoare proporţional-derivative *PD*, regulatoare proporţional-integral-derivative *PID*, regulatoare proporţional-derivativ-derivativ PDD_2 etc.

Modelul matematic aproximativ (idealizat) al acestor regulatoare (nu se iau în considerare anumite mici întîrzieri ce apar în funcţionarea acestora) este:

regulatorul *P*

$$u(t) = K_R \varepsilon(t);$$

Scanned with OKEN Scanner

regulatorul *PI*

$$u(t)=K_R\left[\varepsilon(t)+\frac{1}{T_i}\int_0^t \varepsilon(t)\mathrm{d}t\right];$$

regulatorul *PD*

$$u(t)=K_R\left[\varepsilon(t)+T_d\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}\right]; \qquad (2.28)$$

regulatorul *PID*

$$u(t)=K_R\left[\varepsilon(t)+\frac{1}{T_i}\int_0^t \varepsilon(t)\mathrm{d}t+Td\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}\right];$$

regulatorul PDD_2

$$u=K_R\left[\varepsilon(t)+T_{d_1}\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}+T_{d_2}^2\frac{\mathrm{d}^2\varepsilon}{\mathrm{d}t^2}\right].$$

În funcție de tipul procesului supus automatizării, de tipul elementelor de automatizare (traductoare, elemente de execuție, regulatoare), respectiv în funcție de modelul matematic al elementelor utilizate într-o structură de sisteme de reglare, se obține modelul matematic general al sistemului (poate fi și al unui element)

$$a_n\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+a_0y=b_m\frac{\mathrm{d}^m u}{\mathrm{d}t^m}+b_{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1}u}{\mathrm{d}t^{m-1}}+\ldots+b_1\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+$$
$$+b_0u, \qquad (2.29)$$

sau

$$\sum_{i=0}^{n}a_i\frac{\mathrm{d}^i y}{\mathrm{d}t^i}=\sum_{j=0}^{m}b_j\frac{\mathrm{d}^j u}{\mathrm{d}t^j},$$

unde a_i, b_j sînt coeficienții ecuației diferențiale determinați de parametrii caracteristici sistemului (factori de amplificare, constante de timp, factor de amortizare, pulsații naturale etc.).

Dacă se consideră $a_n=1$, prin împărțirea cu a_n a tuturor termenilor ecuației (2.29), se obține

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}a_0y=b_m\frac{\mathrm{d}^m u}{\mathrm{d}t^m}+\ldots+b_1\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+b_0u.$$

Această ecuație reprezintă un model matematic ce poate caracteriza funcționarea sistemului în jurul unui punct static de funcționare, caz în care variabilele y și u reprezintă abateri în jurul acestuia, abateri care să permită utilizarea unui model matematic liniar.

Un sistem descris de o ecuație de forma (2.29) este un sistem liniar invariant (coeficienții a_i, b_j sînt constanți). Un sistem liniar are proprietatea că dacă o intrare $u_1(t)$ produce o ieșire $y_1(t)$ și o intrare $u_2(t)$ produce o ieșire $y_2(t)$, atunci o intrare de forma $c_1u_1(t)+c_2u_2(t)$ produce o

Scanned with OKEN Scanner

ieşire de forma $c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$ pentru toate perechile de intrări $u_1(t)$ şi $u_2(t)$ şi toate perechile de constante c_1 şi c_2.

Conceptul de liniaritate poate fi definit prin principiul superpoziţiei, aplicabil numai sistemelor liniare. Astfel, răspunsul $y(t)$ al unui sistem liniar la mai multe intrări $u_1(t)$, $u_2(t)$, . . ., $u_k(t)$ ce acţionează simultan este egal cu suma răspunsurilor la fiecare intrare considerată singură. Soluţia generală a ecuaţiei (2.29) este univoc determinată de $u(t)$, $t\geqslant 0$ şi de condiţiile iniţiale la momentul $t=0$, $\left.\frac{d^iy}{dt^i}\right|_{t=0}$ $i=0,1,\ldots n-1$.

Pentru a ilustra modul de obţinere a ecuaţiei diferenţiale a unui sistem de reglare automată considerăm sistemul din figura 2.11, unde fiecare component. al sistemului este descris printr-o ecuaţie diferenţială.

Eliminînd variabilele intermediare ce intervin în sistem obţinem mai întîi o relaţie de dependenţă între y şi m

$$m=\frac{5}{2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{2}y$$

apoi între m şi u, respectiv între m şi ε

$$\frac{dm}{dt}=\frac{1}{5}u=\frac{1}{5}\cdot 10\cdot\varepsilon=2\varepsilon,$$

rezultînd:

$$\frac{5}{2}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{1}{2}\frac{dy}{dt}=2\varepsilon$$

sau

$$5\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}=4\varepsilon.$$

Ţinînd seama de ecuaţia comparatorului $\varepsilon=r-y_r$ şi de ecuaţia ce descrie funcţionarea traductorului, obţinem prin eliminarea mărimii y_r

$$y_r=\frac{1}{4}\left[4r-5\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right]$$

sau, după înlocuirea mărimii y_r în ecuaţia traductorului de pe calea de reacţie, se obţine

$$0{,}5\left[\frac{dr}{dt}-\frac{5}{4}\frac{d^3y}{dt^3}-\frac{1}{4}\frac{d^2y}{dt^2}\right]+\left[r-\frac{5}{4}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{1}{4}\frac{dy}{dt}\right]=y.$$

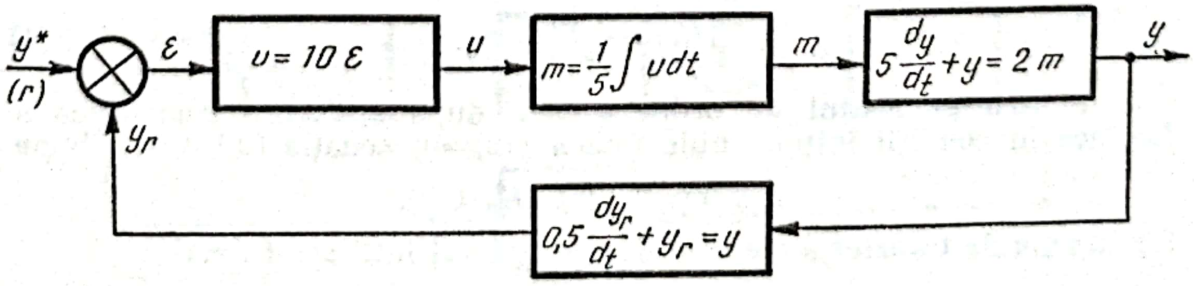


Fig. 2.11. Schema unui SRA cu regulator proporţional, element de execuţie integral, procesul de ordinul întîi.

Scanned with OKEN Scanner

Prin gruparea și ordonarea termenilor în ultima ecuație se obține ecuația generală a sistemului

$$2{,}5\frac{d^3y}{dt^3}+5{,}5\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+4\,y=2\,\frac{dr}{dt}+4\,r,$$

care evidențiază un sistem liniar de ordinul trei.

2.2.2. FUNCȚIA DE TRANSFER, CALCULUL FUNCȚIEI DE TRANSFER PENTRU ELEMENTELE TIP ALE SISTEMELOR DE REGLARE AUTOMATĂ

Un alt mod de reprezentare matematică a elementelor și sistemelor de reglare automată are la bază considerarea transformatelor variabilelor de intrare și de ieșire în domeniul complex.

Prin definiție *funcția de transfer* a unui sistem liniar (se definește numai pentru sistemul liniar) reprezintă raportul între transformata Laplace a variabilei de la ieșire și transformata Laplace a variabilei de la intrare, definite în condiții inițiale nule $\left(\frac{d^iy}{dt^i}\Big|_{t=0}=0\right.$ pentru $i=0,1,\ldots,n-1$ și $\left.\frac{d^ju}{dt^j}\Big|_{t=0}=0\right.$ pentru $j=0,1,\ldots,m-1$)

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}\cdot \tag{2.30}$$

În cazul în care ecuația diferențială a sistemului este scrisă în jurul unui punct în regim staționar, condițiile inițiale nule reprezintă în practică chiar valorile de regim staționar.

Funcția de transfer reprezintă un model funcțional de tipul intrare-ieșire și se obține prin aplicarea transformatei Laplace ecuației diferențiale ce caracterizează sistemul.

Ținînd seama de proprietățile transformatei Laplace și de unele teoreme proprii calculului operațional (v. anexa 1) pot fi definite funcțiile de transfer pentru elementele tip ale sistemului automat și pentru întregul sistem automat.

Pentru un element proporțional definit prin relația

$$y(t)=K_1\cdot u(t),$$

aplicarea transformatei Laplace conduce la

$$Y(s)=K_1\cdot U(s)$$

iar funcția de transfer are forma

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=K_1. \tag{2.31}$$

Pentru elementul de ordinul întîi, după aplicarea transformatei Laplace în condiții inițiale nule (adică $y(0)=0$) ecuația (2.15), se obține

$$T\cdot s\cdot Y(s)+Y(s)=K_0\cdot U(s),$$

iar funcția de transfer a elementului de ordinul întîi are forma

$$H(s)=\frac{K_0}{Ts+1}\cdot \tag{2.32}$$

Scanned with OKEN Scanner

Procedînd în mod similar se obţine funcţia de transfer a oricărui element descris printr-o ecuaţie diferenţială.

În tabelul 2.1 sînt prezentate funcţiile de transfer ale principalelor elemente tip ce intră în componenţa unui sistem automat.

Pentru a ilustra modul de obţinere a funcţiei de transfer a motorului electric de curent continuu cu excitaţie independentă şi moment rezistent constant, rezolvăm sistemul de ecuaţii (2.33) obţinut prin aplicarea transformatei Laplace ecuaţiilor (2.25):

$$\begin{gathered} U_a(s)-E(s)=R_a\cdot I_a(s)+L_a\cdot s\cdot I_a(s); \\ E(s)=K_e\cdot\Omega(s); \\ K_m\cdot I_a(s)=J\cdot s\cdot\Omega(s); \\ U_a(s)-K_e\cdot\Omega(s)=\frac{R_a}{K_m}J\cdot s\cdot\Omega(s)+\frac{L_a}{K_m}J\cdot s^2\cdot\Omega(s), \end{gathered} \tag{2.33}$$

sau

$$H(s)=\frac{\Omega(s)}{U(s)}=\frac{K_m}{L_aJs^2+R_aJs+K_eK_m}=\frac{1}{\frac{L_aJ}{K_m}s^2+\frac{R_aJ}{K_m}s+K_e}. \tag{2.34}$$

Dacă ţinem seama de relaţia între viteza unghiulară ω şi poziţia unghiulară θ a axului motorului $\left(\omega=\frac{d\theta}{dt}\right)$, funcţia de transfer a motorului, considerînd ca mărime de ieşire poziţia unghiulară θ, este

$$H(s)=\frac{\Theta(s)}{U_a(s)}=\frac{1}{s\left(\frac{L_aJ}{K_m}s^2+\frac{R_aJ}{K_m}s+K_e\right)}. \tag{2.35}$$

Pentru obţinerea funcţiei de transfer a acestui sistem se poate utiliza şi un model sub formă de schemă funcţională (fig. 2.12). Prin eliminarea variabilelor intermediare din model se obţine expresia funcţiei de transfer. Obţinerea funcţiilor de transfer pe baza algebrei schemelor bloc se prezintă în subcapitolul 3.2.

Pornind de la ecuaţia diferenţială generală a unui sistem liniar (2.29), prin aplicarea transformatei Laplace şi a proprietăţilor sale

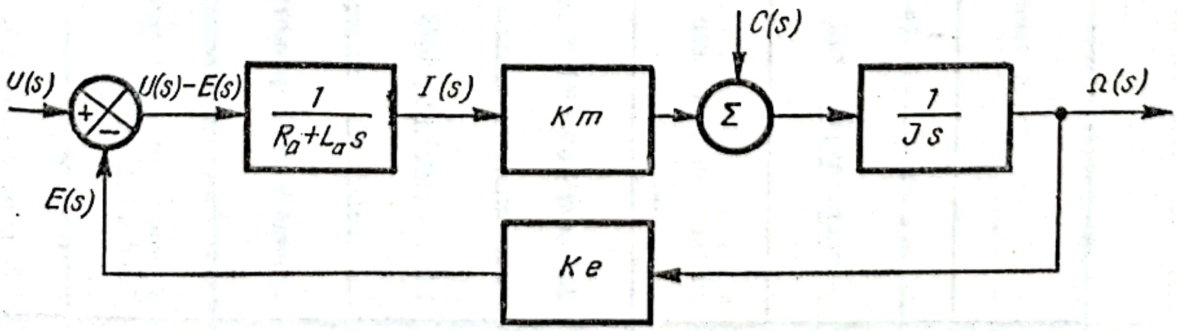


Fig. 2.12. Schema echivalentă a motorului de c.c. cu excitaţie independentă, constantă.

Modelele matematice ale elementelor tip ale unui sistem automat *Tabelul 2.1*

Nr. crt.	Tipul elementului	Ecuația diferențială	Funcția de transfer
1	2	3	4
1	Element proporțional	$y(t)=K_0\cdot u(t)$	$H(s)=K_0$
2	Element de întîrziere de ordinul întîi	$T\frac{dy}{dt}+y=K_0\cdot u(t)$	$H(s)=\frac{K_0}{T_s+1}$
3	Element de ordinul doi (oscilant)	$\frac{d^2y}{dt^2}+2\zeta\omega_n\frac{dy}{dt}+\omega_n^2 y=K_0\cdot\omega_n^2 u(t)$	$H(s)=\frac{K_0\cdot\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$
4	Element de întîrziere de ordinul doi	$T_1T_2\frac{d^2y}{dt^2}+(T_1+T_2)\frac{dy}{dt}+y=K_0\cdot u(t)$	$H(s)=\frac{K_0}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$
5	Element cu timp mort	$y(t)=u(t-\tau)$	$H(s)=e^{-\tau s}$
6	Element cu timp mort și întîrziere de ordinul întîi	$T\frac{dy}{dt}+y=K_0\cdot u(t-\tau)$	$H(s)=\frac{K_0\cdot e^{-\tau s}}{T s+1}$
7	Element cu timp mort și întîrziere de ordinul doi	$T_1T_2\frac{d^2y}{dt^2}+(T_1+T_2)\frac{dy}{dt}+y=K_0\cdot u(t-\tau)$	$H(s)=\frac{K_0\cdot e^{-\tau s}}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$

Scanned with OKEN Scanner

8	Element de anticipație de ordinul întîi	$y(t)=T\frac{du}{dt}+u(t)$	$H(s)=Ts+1$
9	Element de anticipație de ordinul doi	$y(t)=\frac{d^2u}{dt^2}+2\zeta\omega_n\frac{du}{dt}+\omega_n^2u$	$H(s)=s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2$
10	Regulator proporțional integral	$u(t)=K_R\left(\varepsilon+\frac{1}{T_i}\int\varepsilon\,dt\right)$	$H(s)=K_R\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)$
11	Regulator proporțional derivativ	$u(t)=K_R\left(\varepsilon+T_d\frac{d\varepsilon}{dt}\right)$	$H(s)=K_R(1+T_d s)$
12	Regulator proporțional integral-derivativ	$u(t)=K_R\left(\varepsilon+\frac{1}{T_i}\int\varepsilon dt+T_d\frac{d\varepsilon}{dt}\right)$	$H(s)=K_R\left(1+\frac{1}{T_i s}+T_d s\right)$
13	Element integrator cu întîrziere de ordinul întîi	$T\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}=K_0\cdot u$	$H(s)=\frac{K_0}{s(Ts+1)}$
14	Circuit de corecție de anticipație	$T_1\frac{dy}{dt}+y=K_0\cdot\left(T_2\frac{du}{dt}+u\right)$	$H(s)=K_0\frac{T_2s+1}{T_1s+1}$; $T_2>T_1$
15	Circuit de corecție de întirziere	$T_1\frac{dy}{dt}+y=T_2\frac{du}{dt}+u$	$H(s)=\frac{T_2s+1}{T_1s+1}$; $T_1>T_2$

Scanned with OKEN Scanner

(v. anexa 1), se poate defini funcţia de transfer în forma cea mai generală

$$H(s)=\frac{y(s)}{U(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}+s^{m-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}+s^{n-1}+\ldots+a_1 s+g_0}, \tag{2.36}$$

sau dacă $a_n=1$

$$H(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0}.$$

O formă uzuală a funcţiei de transfer a unui sistem este aceea cu ajutorul căreia se evidenţiază coeficientul de transfer în regim staţionar K_0 şi numărul de poli în origine α

$$H(s)=\frac{K_0}{s^\alpha}\cdot\frac{P_1(s)}{P_2(s)}, \tag{2.37}$$

unde polinoamele $P_1(s)$ şi $P_2(s)$ au ultimul termen egal cu unitatea.

Expresia (2.37) se obţine dacă ultimii termeni b_0, a_0, diferiţi de zero ai polinoamelor de la numărător şi numitor sînt scoşi factori

$$H(s)=\frac{b_0}{a_0}\cdot\frac{\frac{b_m}{b_0}s^m+\frac{b_{m-1}}{b_0}s^{m-1}+\cdots+\frac{b_1}{b_0}s+1}{\frac{1}{a_0}s^n+\frac{a_{n-1}}{a_0}s^{n-1}+\cdots+\frac{a_1}{a_0}s+1}=K_0\cdot\frac{P_1(s)}{P_2(s)}.$$

Astfel, factorul de amplificare $K_0=\frac{b_0}{a_0}$ dacă sistemul nu are nici un pol în origine, $K_0=\frac{b_0}{a_1}$ dacă sistemul are un pol în origine ş.a.m.d.

Dacă punem în evidenţă polii şi zerourile funcţiei de transfer respectiv zerourile polinoamelor $P_2(s)$ şi $P_1(s)$ şi admitem că aceştia sînt simpli:

$$P_1(s)=\frac{b_m}{b_0}(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m);$$

$$P_2(s)=\frac{a_n}{a_0}(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n),$$

forma funcţiei de transfer devine

$$H(s)=\frac{K}{s^\alpha}\cdot\frac{(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)}, \tag{2.38}$$

unde $K=K_0 bm/a_n$.

Pentru studiul sistemelor automate sînt utilizate diferite forme ale funcţiei de transfer în paragraful 3.2.2, ceea ce prezintă avantaje importante pentru analiza şi sinteza sistemelor liniare.

2.3. MODELE MATEMATICE INTRARE-STARE-IEŞIRE

Spre deosebire de modelele funcţionale de tipul intrare-ieşire, reprezentarea sistemelor automate în spaţiul stărilor presupune utilizarea unui vector al stărilor $\mathbf{x}(t)$ cu ajutorul căruia se poate defini starea sis-

Scanned with OKEN Scanner

temului în orice moment. Starea sistemului reprezintă o cantitate minimă de informaţie despre sistem, cu ajutorul căreia se poate defini evoluţia sistemului dacă se cunoaşte intrarea sa.

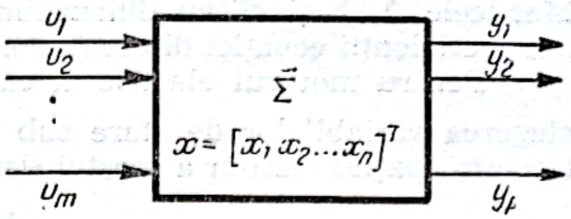


Fig. 2.13. Reprezentarea unui proces în spaţiul stărilor:
Σ — spaţiul stărilor; $\mathbf{x}$ — vectorul stărilor.

Cunoaşterea stării la un moment iniţial t_0 ($x(t_0)$) şi a intrărilor în sistem după momentul t_0 permite determinarea stării la un timp ulterior t_1, $x(t_1)$. Starea sistemului la un moment dat poate fi descrisă prin valorile unui set minim (liniar independent) de variabile x_i denumite *variabile de stare*

$$\mathbf{x}=[x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]^T.$$

Acest vector al stărilor aparţine unui spaţiu vectorial n-dimensional Σ, numărul stărilor ce alcătuiesc acest vector de stare definind ordinul sistemului considerat. Astfel, prin introducerea acestui vector de stare care caracterizează comportarea intrinsecă a sistemului la orice moment de timp, modelul general al sistemului avînd m-intrări, p-ieşiri şi n-variabile de stare are forma din figura 2.13.

Sistemul considerat este un sistem multivariabil avînd la intrare vectorul mărimilor de intrare $\mathbf{u}=[u_1\ u_2\ \ldots\ u_m]^T$, la ieşire vectorul mărimilor de ieşire $\mathbf{y}=[y_1\ y_2\ \ldots\ y_p]^T$ şi starea definită prin vectorul n-dimensional $\mathbf{x}(t)=[x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]^T$.

Pentru un sistem de ordinul al doilea descris prin ecuaţia (2.14) se poate defini un vector al stărilor $\mathbf{x}(t)$ dacă alegem cele două componente $x_1(t)$ şi $x_2(t)$, care în acest caz pot fi poziţia şi viteza de deplasare a masei: $x_1=y$, $x_2=\dot{y}$. Cunoaşterea acestor două variabile la orice moment t_0 permite a determina evoluţia sistemului pentru orice intrare definită pentru $t\geqslant t_0$.

Modelul matematic al sistemului de ordinul doi în reprezentare matriceal-vectorială (cu ajutorul variabilelor de stare) are forma:

$$\dot{x}_1=x_2; \tag{2.39}$$

$$\dot{x}_2=\omega_n^2 K_0 u-\omega_n^2 x_1-2\zeta\omega_n x_2;$$

$$y=[1\ 0]\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}, \tag{2.40}$$

sau:

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ K_0\omega_n^2\end{bmatrix}\cdot u;$$

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}u; \tag{2.41}$$

$$y=\mathbf{c}^T\mathbf{x}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Matricele **A**, **b** şi $\mathbf{c}^T$ au dimensiunile 2×2; 2×1; 1×2 şi sînt alcătuite din coeficienţii ecuaţiei diferenţiale.

Pentru motorul electric al cărui model matematic este (2.25), prin alegerea variabilelor de stare sub forma: $x_1=\theta$, $x_2=\dot{\theta}$, $x_3=i_a$, reprezentarea în spaţiul stărilor a acestui sistem este:

$$\dot{x}_1=x_2;$$

$$\dot{x}_2=\frac{K_m}{J}\,x_3+\frac{1}{J}\,C_{rez};$$

$$\dot{x}_3=\frac{1}{L_a}\,u_a-\frac{K_e}{L_a}\,x_2-\frac{R_a}{L_a}\,x_3,$$

sau:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{K_m}{J}\\ 0 & -\frac{K_e}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{J}\\ 0\end{bmatrix}\cdot C_{rez}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \frac{1}{L_a}\end{bmatrix}u_a;$$

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}_1 u_a+\mathbf{b}_2 C_{rez}.$$

În funcţie de numărul intrărilor şi numărul ieşirilor, respectiv de dimensiunea spaţiului, stărilor, matricele caracteristice ale sistemului au diverse dimensiuni. Astfel, pentru un sistem multivariabil cu *m*-intrări, *p*-ieşiri şi *n*-stări, dimensiunile matricelor *A*, *B* şi *C* sînt: *nxn*, *nxm*, *pxn*, iar forma generală de reprezentare este:

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u}; \qquad (2.42)$$

$$\mathbf{y}=\mathbf{C}\mathbf{x}.$$

În funcţie de modul de alegere al variabilelor de stare, forma matricelor sistemului este diferită, însă dimensiunile sînt determinate de dimensiunea vectorilor de intrare, stare şi ieşire.

În literatură sînt prezentate diferite moduri de alegere a variabilelor de stare [13] pentru sisteme monovariabile şi multivariabile.

Teoria modernă a sistemelor foloseşte această reprezentare matematică mai bogată în conţinut, mai realistă, cu ajutorul căreia se pot studia sisteme cu grad mare de complexitate, cu performanţe înalte, reprezentare unitară a sistemelor monovariabile şi multivariabile, care asigură o bună compatibilitate cu mijloacele moderne de calcul numeric.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 3

CALCULUL PERFORMANȚELOR SISTEMELOR DE REGLARE AUTOMATĂ

3.1. CALCULUL RĂSPUNSULUI UNUI SISTEM PRIN REZOLVAREA ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE

Utilizarea metodei ecuațiilor diferențiale pentru analiza sistemelor automate liniare permite aprecierea directă din răspunsul sistemului a performanțelor staționare și tranzitorii. Etapele analizei sistemelor automate prin metoda ecuațiilor diferențiale sînt:

— scrierea ecuațiilor diferențiale ce descriu funcționarea componentelor sistemului pe baza legilor fizicii, mecanicii, electrotehnicii etc.;

— liniarizarea ecuațiilor, dacă acestea sînt neliniare, prin una dintre metodele cunoscute de liniarizare (alegerea unui punct de funcționare al sistemului în jurul căruia abaterile mici ale variabilelor conduc la o funcționare liniară, dezvoltarea în serie Taylor în jurul acestui punct);

— evidențierea variabilelor de la intrare (cauze) și de la ieșire precum și a parametrilor caracteristici ai sistemului (coeficienții a_i, b_j);

— specificarea tipului funcției aplicate la intrare în scopul analizei, a condițiilor inițiale ale sistemului și a intervalului de timp pe care se cere variația mărimii de la ieșire;

— se calculează răspunsul liber și răspunsul forțat (vezi definițiile de mai jos) al sistemului descris de ecuația diferențială pentru funcția de la intrare dată;

— se calculează performanțele staționare și tranzitorii ale sistemului direct din răspunsul sistemului, care evidențiază regimul staționar și tranzitoriu al acestuia.

Pornind de la ecuația diferențială a sistemului de reglare se poate analiza comportarea sistemului prin rezolvarea acesteia și analizarea soluției. Soluția $y(t)$ a unei ecuații diferențiale ordinare cu coeficienți constanți se compune din soluția liberă $y_e(t)$, determinată ca soluție a

Scanned with OKEN Scanner

sistemului autonom (neexcitat, $u=0$), şi soluţia forţată $y_f(t)$, determinată de tipul şi amplitudinea intrării

$$y(t)=y_l(t)+y_f(t). \tag{3.1}$$

Componenta liberă a răspunsului sistemului se calculează ca soluţie a ecuaţiei diferenţiale pentru care termenul drept este zero ($u, \dot{u}, \ldots, u^{(m)}$ sînt zero), $\frac{d^n y}{dt^n}+\sum_0^{n-1} a_i \frac{d^i y}{dt^i}=0$. Răspunsul liber se obţine ca o combinaţie liniară a unui set fundamental de soluţii $y_1(t)$, $y_2(t) \ldots y_n(t)$ sub forma

$$y_l(t)=\sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i(t). \tag{3.2}$$

Constantele C_i se determină în funcţie de cele n condiţii iniţiale ale funcţiei y şi ale derivatelor acesteia:

$$\begin{aligned} y(0)&=\sum_1^n C_i\, y_i(0)+y_f(0);\\ \dot{y}(0)&=\sum_1^n C_i\, \dot{y}_i(0)+\dot{y}_f(0);\\ &\vdots\\ y^{(n-1)}(0)&=\sum_1^n C_i\, y_i^{(n-1)}(0)+y_f^{(n-1)}(0). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Rezolvarea sistemului de ecuaţii (3.3) permite calculul constantelor C_i care intervin în răspunsul liber al sistemului.

În cazul în care la intrare se consideră o funcţie $u(t)=\delta(t)$, răspunsul sistemului poartă denumirea de *funcţie pondere* şi caracterizează comportarea liberă a sistemului. Expresia funcţiei pondere este similară relaţiei (3.2):

$$\begin{aligned} w(t)&=\sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i(t) \text{ pentru } t\geqslant 0;\\ y(t)&=0 \qquad\qquad \text{pentru } t<0, \end{aligned} \tag{3.4}$$

iar constantele C_i se determină din condiţiile iniţiale corespunzătoare funcţiei pondere: $w(0)=0$, $\dot{w}(0)=0, \ldots, w^{(n-1)}(0)=1$ [17].

Răspunsul forţat al sistemului liniar continuu se calculează cu ajutorul produsului de convoluţie real pe un interval de timp dat $[t_{0+}, t]$ între funcţia pondere $w(t)$ şi variabila de intrare $u(t)$ [19, 59]

$$y_f(t)=\int_{t_{0+}}^{t} w(\tau)\cdot u(t-\tau)\, d\tau=\int_{t_{0+}}^{t} w(t-\tau)\cdot u(\tau)\, d\tau. \tag{3.5}$$

Pentru modelul general al sistemelor liniare monovariabile, unde funcţia de intrare intervine prin cele $m-1$ derivate, componenta forţată a răspunsului total al sistemului se calculează cu relaţia

$$y_f(t)=\int_{t_{0+}}^{t}\left[w(t-\tau)\cdot\sum_0^m b_j \frac{d^j u}{d\tau^j}\right] d\tau, \tag{3.6}$$

Scanned with OKEN Scanner

iar soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (2.27) are forma

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(t)+\int_0^t \left[w(t-\tau).\sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^j u}{d\tau^j}\right] d\tau. \qquad (3.7)$$

Componentele $y_i(t)$ au forma $y_i(t)=C_i e^{p_i t}$ cînd rădăcinile p_i ale ecuaţiei caracteristice $a_n p^n+a_{n-1} p^{n-1}+\ldots+a_1 p+a_0=0$ sînt reale şi distincte şi au forma $y_i(t)=e^{\alpha_i t} \sin(\beta_i t+\varphi_i)$ dacă rădăcinile sînt complex conjugate ($p_{i,i+1}=\alpha_i \pm j\beta_i$) şi distincte.

Cunoaşterea funcţiei pondere a sistemului permite calculul răspunsului pentru orice funcţie aplicată la intrare $u(t)$ cu ajutorul integralei de convoluţie.

Răspunsul sistemului la intrare treaptă unitară ($u(t-\tau)=u_0(t)$) se calculează cu relaţia

$$h(t)=\int_0^t w(\tau)u(t-\tau)d\tau=\int_0^t w(\tau)d\tau \qquad (3.8)$$

şi poartă denumirea de *funcţie indicială* a sistemului.

O altă posibilitate de calcul al răspunsului forţat constă în alegerea componentei forţate ca o soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale.

Folosirea acestor noţiuni elementare pentru rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale permite determinarea răspunsului sistemelor pentru diverse tipuri de semnale de intrare şi analiza performanţelor acestora în domeniul real, al timpului. Utilizarea acestei metode de analiză prezintă avantajul esenţial că răspunsul sistemului se obţine direct în domeniul real al timpului pentru orice condiţii iniţiale, putînd fi studiată influenţa diverşilor parametri asupra performanţelor.

3.1.1. CALCULUL PERFORMANŢELOR STAŢIONARE ŞI TRANZITORII PENTRU UN SISTEM DE ORDINUL ÎNTÎI

Un sistem de reglare automată de ordinul întîi este caracterizat printr-o ecuaţie diferenţială de ordinul întîi de forma

$$T\frac{dy}{dt}+y=K_0 \cdot r(t),$$

unde T şi K_0 au semnificaţia dată în paragraful 2.2.1.

Performanţele staţionare ale unui sistem se definesc pentru regimul staţionar al acestuia, iar performanţele tranzitorii se definesc pentru regimul tranzitoriu al sistemului. Determinarea performanţelor unui sistem presupune cunoaşterea răspunsului sistemului respectiv, deci a celor două componente ale acestuia (staţionară şi tranzitorie).

Răspunsul liber al sistemului de ordinul întîi se calculează cu relaţia

$$y_e(t)=C_1 e^{p_1 t}=C_1 \cdot e^{-\frac{t}{T}},$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $p_1=-\frac{1}{T}$ reprezintă rădăcina ecuației caracteristice $Tp+1=0$, iar răspunsul forțat, care reprezintă o soluție particulară a ecuației diferențiale, are forma $y_f(t)=K_0\cdot r(t)$.

Răspunsul total al sistemului obținut ca sumă a celor două componente are forma

$$y(t)=C_1\,e^{-t/T}+K_0\cdot r(t). \tag{3.9}$$

Pentru intrare de tip treaptă unitară și condiții inițiale nule $y(0)=0$, soluția (3.9) devine

$$y(t)=K_0(1-e^{-t/T}). \tag{3.10}$$

Reprezentarea grafică a răspunsului sistemului cu evidențierea regimului staționar și tranzitoriu al acestuia (fig. 3.1) permite evaluarea performanțelor staționare și tranzitorii.

Regimul staționar al sistemului este descris prin relația $y_{st}(t)=\lim_{t\to\infty} y(t)=K_0\cdot r(t)$;

$$y_{st}=K_0,\ [r(t)=1].$$

Diferența dintre valoarea staționară a mărimii de ieșire și valoarea mărimii de intrare (referința) poartă denumirea de *eroare staționară* a sistemului

$$\varepsilon_{st}=y^*(t)-y_{st}(t)=r-K_0=1-K_0. \tag{3.11}$$

Dacă se consideră că sistemul pornește din origine, deci $y(0)=0$ în momentul aplicării funcției $r(t)$, rezultă că derivata $\dot{y}(0_+)$ este dată de relația

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0_+}=\dot{y}(0_+)=\frac{K_0\cdot r(t)}{T}=\frac{y_{st}}{T}. \tag{3.12}$$

Relația (3.12) evidențiază faptul că panta inițială a răspunsului (tangenta în origine) intersectează răspunsul staționar după un timp egal cu constanta de timp a sistemului.

Intervalul de timp în care mărimea de ieșire ajunge să aibă o variație identică cu mărimea de intrare (se atinge regimul staționar) reprezintă una din performanțele tranzitorii ale sistemului și se numește, *durata procesului tranzitoriu* t_t.

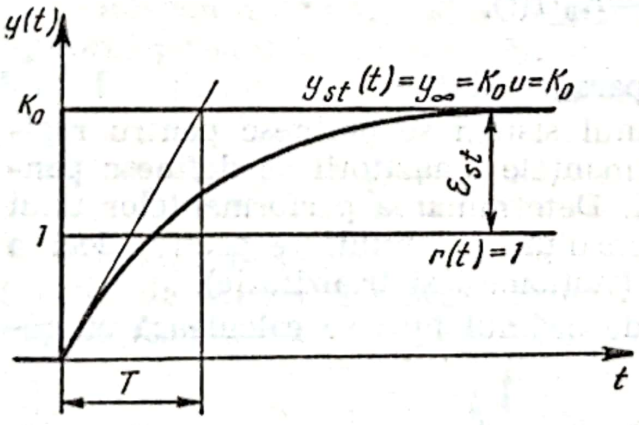


Fig. 3.1. Răspunsul unui sistem de ordinul întîi la intrare treaptă unitară.

Prin convenție se stabilește momentul cînd sistemul intră în regim staționar, ca fiind momentul cînd răspunsul intră în banda $(1\pm0{,}05)y_{st}$ fără a o mai părăsi ulterior. Astfel, din relația

$$0{,}95\ K_0=K_0\,(1-e^{-t_t/T})$$

se obține durata procesului tranzitoriu

$$t_t = -T \ln 0{,}05 \simeq 3\,T. \tag{3.13}$$

În concluzie, un sistem de ordinul întîi este caracterizat prin următoarele performanțe staționare și tranzitorii:

T — constanta de timp ce caracterizează viteza de răspuns a sistemului;

t_t — durata procesului tranzitoriu, care este proporțională cu constanta de timp;

ε_{st} — eroarea în regim staționar.

Răspunsul sistemului de ordinul întîi la un impuls unitar aplicat la intrare are forma din figura 3.2, *a*, iar răspunsul la intrare rampă unitară are forma dată în figura 3.2, *b*. Răspunsul definit prin relațiile (3.14) și (3.15) se calculează folosind integrala de convoluție

$$y(t) = \frac{K_0}{T} e^{-t/T} \text{ pentru } t>0,\ r(t)=\delta(t) \tag{3.14}$$

și

$$y(t) = K_0[t - T(1 - e^{-t/T})] \text{ pentru } t>0,\ r(t)=t. \tag{3.15}$$

Exemplul 3.1

Admițînd o structură de sistem de reglare ca în figura 3.2, *c*, unde obiectul reglat este descris de o ecuație diferențială de ordinul întîi, iar regulatorul automat este proporțional, se poate obține răspunsul sistemului pentru o intrare treaptă unitară și diverse valori ale parametrilor K_1, K_2 și T_1. Modelul matematic al căii directe a sistemului se obține prin eliminarea variabilei intermediare u, rezultînd

$$T_1 \frac{dy}{dt} + y = K_1 K_2 \varepsilon \cdot$$

Pentru sistemul de reglare (ținînd seama că $\varepsilon = y^* - y = r - y$) se obține modelul matematic sub forma

$$T_1 \frac{dy}{dt} + y = K_1 K_2 (r - y)$$

sau

$$T_1 \frac{dy}{dt} + (1 + K_1 K_2) y = K_1 K_2 \cdot r.$$

Împărțind prin termenul $(1 + K_1 K_2)$ obținem

$$T \frac{dy}{dt} + y = K_0 \cdot r(t),$$

unde constanta de timp T și factorul de amplificare al sistemului în acest caz sînt:

$$T = \frac{T_1}{1 + K_1 K_2};$$

Scanned with OKEN Scanner

$$K_0 = \frac{K_1 K_2}{1 + K_1 K_2}.$$

De remarcat faptul că prezența reacției negative implică reducerea factorului de amplificare al sistemului și a constantei de timp.

Pentru $T_1 = 5s$, $K_1 = 5$, $K_2 = 2$, soluția ecuației diferențiale pentru o intrare treaptă unitară este dată de relația

$$y(t) = K_0(1 - e^{-t/T}) = \frac{10}{11} \cdot (1 - e^{-t/5/11}) = 0{,}9\,(1 - e^{-2{,}02t}).$$

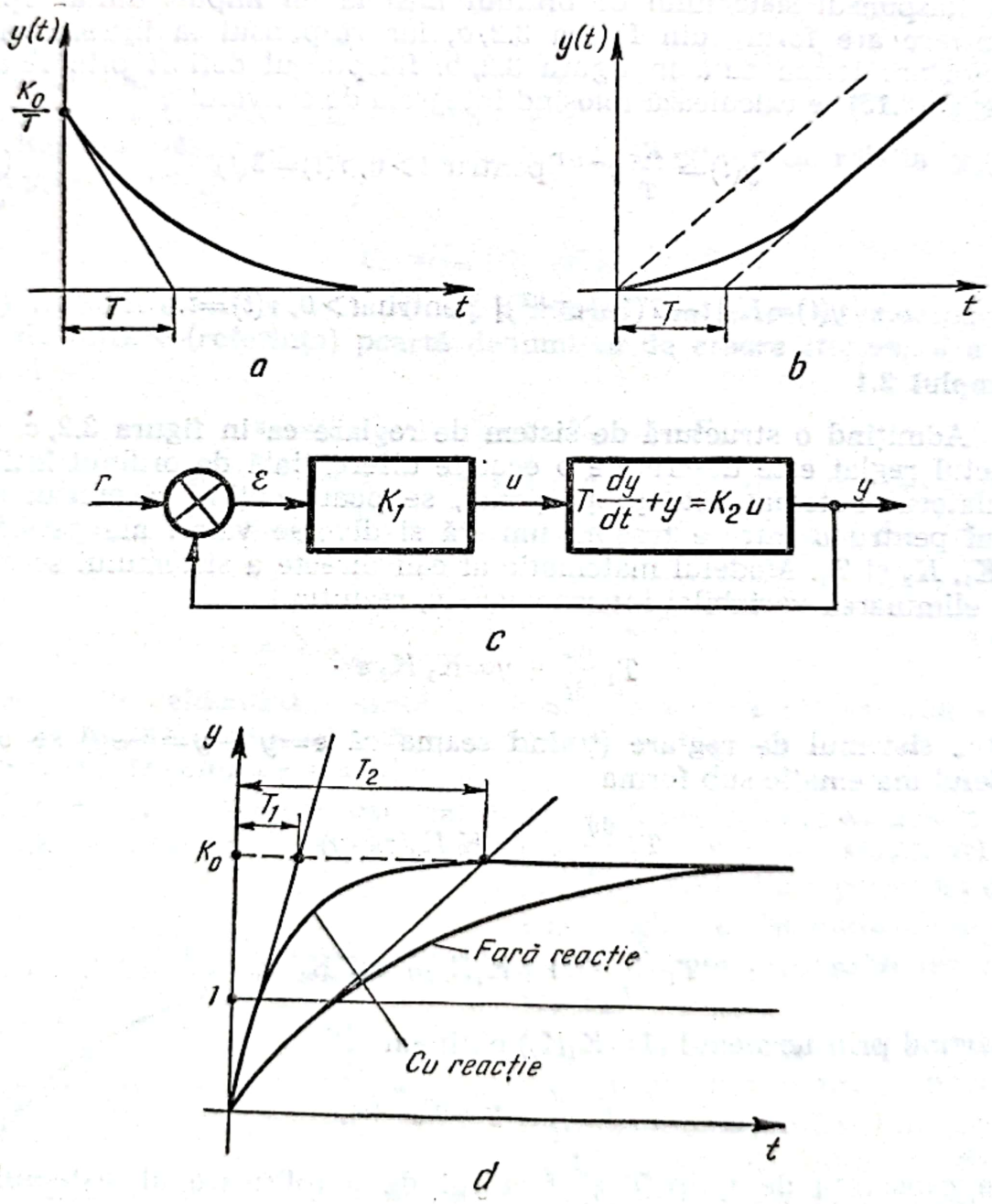


Fig. 3.2. Răspunsul unui sistem de ordinul întîi:
a — la intrare impuls unitar; *b* — la rampă unitară; *c* — schema funcțională a unui sistem de ordinul întîi; *d* — răspunsul sistemului de ordinul întîi cu reacție și fără reacție.

Scanned with OKEN Scanner

Răspunsul sistemului fără reacție se poate calcula, de asemenea, folosind relația (3.10)

$$y(t)=K_1 \cdot K_2 (1-e^{-t/T_1})=10 (1-e^{-0,2t}).$$

Reprezentarea grafică a celor două răspunsuri (fig. 3.2, *d*) evidențiază efectul reacției asupra răspunsului sistemului, asupra performanțelor staționare și tranzitorii. Prezența reacției determină o reducere a constantei de timp și de asemenea o reducere a factorului de amplificare.

Eroarea staționară a sistemului este dată de relația

$$\varepsilon_{st}=1-K_0=1-\frac{K_1K_2}{1+K_1K_2}=\frac{1}{1+K_1K_2}=\frac{1}{1+10}=\frac{1}{11}\simeq 0,09,$$

iar durata procesului tranzitoriu este

$$t_t\cong 3T=3\cdot\frac{T_1}{1+K_1K_2}=3\cdot\frac{5}{1+10}=1,36 \text{ s}.$$

3.1.2. CALCULUL PERFORMANȚELOR PENTRU UN SISTEM DE ORDINUL DOI

Ecuația diferențială ce caracterizează funcționarea unui sistem de ordinul doi are forma (v. subcap. 2.2)

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\zeta\omega_n\frac{dy(t)}{dt}+\omega_n^2y(t)=K_0\omega_n^2r(t).$$

Regimul staționar este caracterizat prin ecuația

$$y(t)=K_0r(t).$$

Pentru a realiza eroarea nulă în regim staționar, la o intrare treaptă unitară, rezultă $K_0\equiv 1$ ($\varepsilon_{st}=1-y_{st}=1-K_0$).

Funcția pondere a sistemului de ordinul doi în condițiile în care rădăcinile ecuației caracteristice p_1 și p_2 sînt diferite, are forma

$$w(t)=C_1e^{p_1t}+C_2e^{p_2t}, \tag{3.16}$$

unde constantele C_1 și C_2 se determină din condițiile inițiale ale sistemului.

Rădăcinile ecuației caracteristice a sistemului

$$p^2+2\zeta\omega_np+\omega_n^2=0$$

sînt date prin relațiile:

$$p_1=-\zeta\omega_n+j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \text{ și } p_2=-\zeta\omega_n-j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \text{ pentru } 0<\zeta<1.$$

Dacă notăm: $\alpha=\zeta\omega_n$ și $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$, atunci funcția pondere a sistemului are forma

$$w(t)=C_1e^{(-\alpha+j\omega_d)t}+C_2e^{(-\alpha-j\omega_d)t}. \tag{3.17}$$

Scanned with OKEN Scanner

Condiţiile iniţiale $w(0)=0$ şi $\dot{w}(0)=1$ permit calculul constantelor C_1 şi C_2, iar expresia funcţiei pondere a sistemului de ordinul doi devine

$$w(t)=\frac{1}{\omega_d}e^{-\alpha t}\cdot\sin\omega_d t. \tag{3.18}$$

Răspunsul la treaptă unitară (funcţie indicială) a sistemului de ordinul doi este dat de relaţia

$$h(t)=\int_0^t w(t-\tau)\omega_n^2 d\tau=\omega_n^2\int_0^t\frac{1}{\omega_d}e^{-\alpha(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)d\tau$$

sau

$$h(t)=1-\frac{\omega_n e^{-\alpha t}}{\omega_d}\sin(\omega d\cdot t+\varphi), \tag{3.19}$$

$$\text{unde } \varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega_d}{\alpha}=\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}.$$

Prin înlocuirea în (3.19) a lui α şi ωd cu expresiile lor, se obţine răspunsul sistemului la intrare treaptă unitară (funcţia indicială) sub forma

$$y(t)\equiv h(t)=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_n\cdot\sqrt{1-\zeta^2}\cdot t+\varphi). \tag{3.20}$$

Relaţia (3.20) evidenţiază faptul că răspunsul sistemului de ordinul doi la o funcţie treaptă unitară aplicată la intrare are o componentă sinusoidală amortizată.

Pentru diverse valori ale factorului de amortizare ζ, răspunsul sistemului are forme diferite (fig. 3.3).

Pentru $\zeta=0$, se obţine un răspuns sinusoidal cu amplitudine constantă descris prin ecuaţia

$$h(t)=1-\cos\omega_n\cdot t=1-\sin\left(\omega_n t+\frac{\pi}{2}\right). \tag{3.21}$$

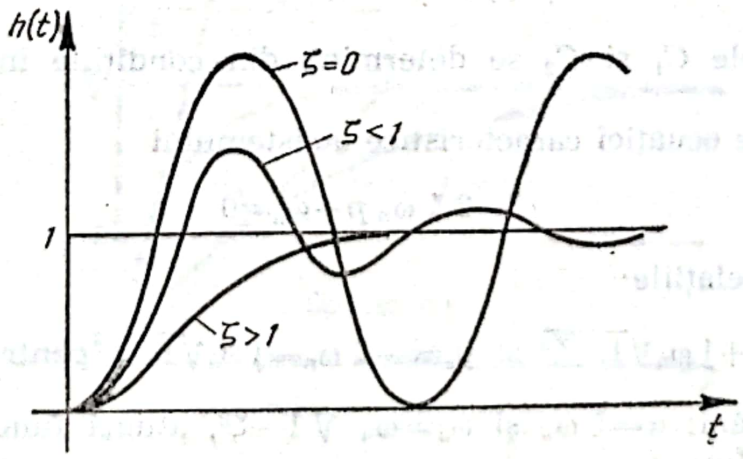


Fig. 3.3. Răspunsul indicial al unui sistem de ordinul doi pentru diverse valori ale factorului de amortizare ζ.

Scanned with OKEN Scanner

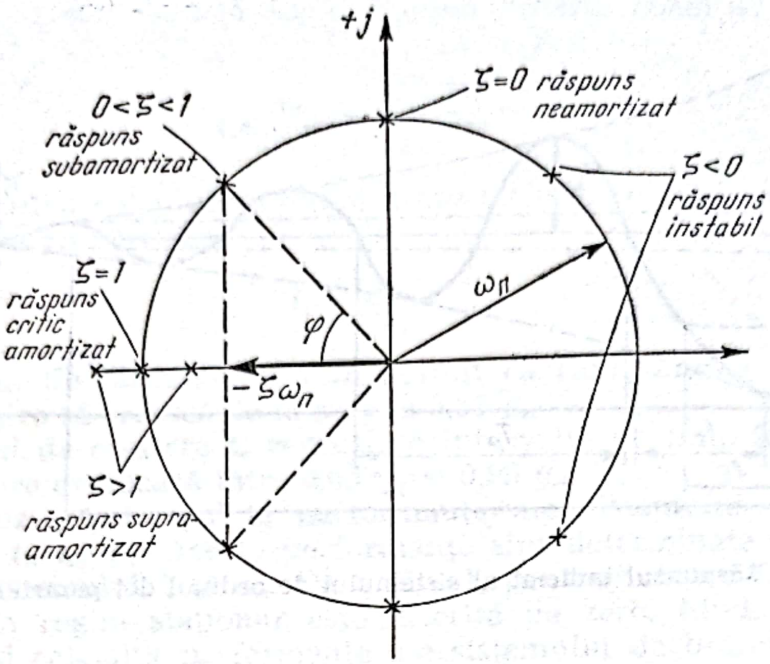


Fig. 3.4. Reprezentarea rădăcinilor ecuației caracteristice în planul complex pentru diverse valori ale lui ζ.

Sistemul în aceste condiții este la limita de stabilitate, mărimea de la ieșire nu ajunge la o valoare constantă de regim staționar. Rădăcinile ecuației caracteristice sînt imaginare (localizate pe axa imaginară a planului complex, fig. 3.4). Răspunsul sistemului în acest caz este *neamortizat*.

Pentru $\zeta=1$, răspunsul sistemului este amortizat critic, iar relația de calcul a răspunsului este de forma

$$h(t)=1-(1+\omega_n t)e^{-\omega_n t}. \tag{3.22}$$

Rădăcinile ecuației caracteristice sînt reale și egale

$$(p_1=p_2=-\omega_n).$$

Pentru $\zeta>1$, rădăcinile ecuației caracteristice a sistemului sînt reale și diferite, componenta tranzitorie a răspunsului sistemului este alcătuită din două exponențiale. Răspunsul în acest caz este supraamortizat (fig. 3.3).

Calculul performanțelor staționare și tranzitorii pentru sistemul de ordinul doi presupune cunoașterea valorilor parametrilor ζ și ω_n respectiv aspectul răspunsului.

Pentru cazul cel mai general, cînd $0<\zeta<1$, răspunsul oscilant amortizat prezentat în figura 3.5 permite evidențierea următoarelor performanțe:

● *Suprareglajul* sau *abaterea dinamică maximă* σ este determinată prin diferența între valoarea maximă a ieșirii și valoarea de regim staționar

$$\sigma=y_{max}-y_{st}$$

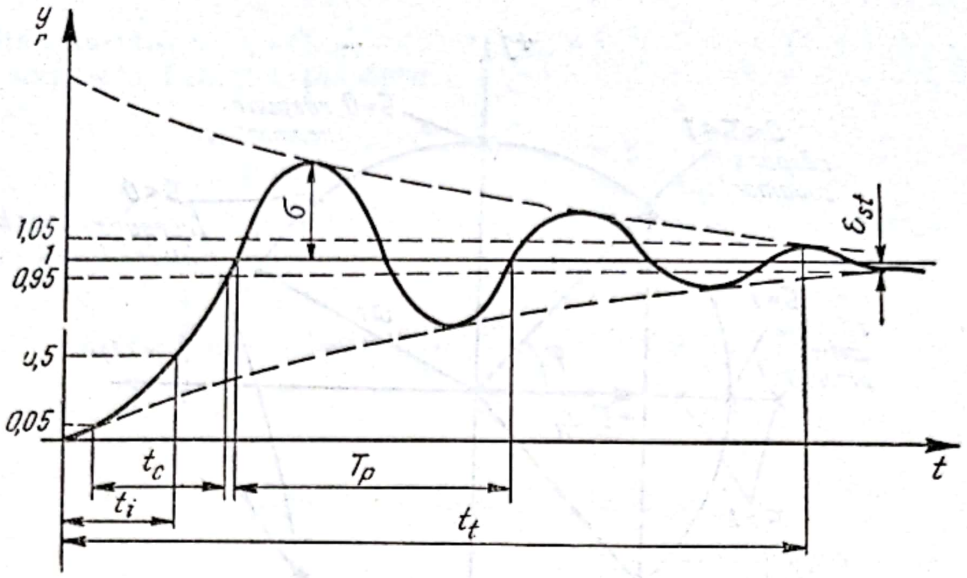


Fig. 3.5. Răspunsul indicial al sistemului de ordinul doi pentru $0<\zeta<1$.

sau

$$\sigma=\frac{y_{max}-y_{st}}{y_{st}}\cdot 100. \tag{3.23}$$

Pentru sistemul de ordinul doi, valoarea lui σ este funcție de ζ și relația de calcul are forma [13, 19]

$$\sigma=e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}=\exp\left(-\zeta\frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right). \tag{3.24}$$

Reprezentarea grafică a relației (3.24) este efectuată în figura 3.6, acest grafic fiind utilizat pentru proiectarea sistemelor de reglare automată.

● *Eroarea staționară* ε_{st} se calculează ca diferența între valoarea de referință $y^*=r$ a sistemului și valoarea staționară a mărimii de ieșire

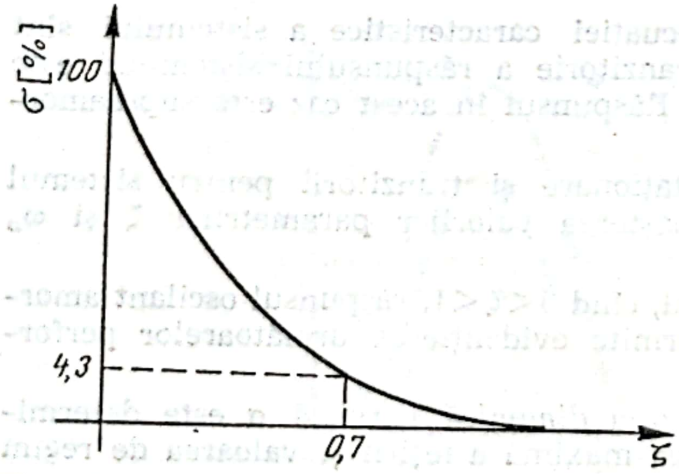


Fig. 3.6. Dependența suprareglajului $\sigma=f(\zeta)$ de factorul de amortizare pentru un sistem de ordinul doi.

$$\varepsilon_{st}=y^*-y_{st}=1-y_{st}=0, \tag{3.25}$$

întrucît $y_{st}=\lim\limits_{t\to\infty} y(t)=1$ pentru cazul în care $K_0=1$.

● *Durata procesului tranzitoriu* t_t este sensibil influențată de pulsația naturală. Pentru calculul duratei procesului tranzitoriu convenim a considera încheiat acest proces cînd componenta tranzitorie a răspunsului intră în zona $\Delta=\pm 0{,}05\, y_{st}$ și nu

Scanned with OKEN Scanner

mai iese ulterior din această zonă. Punînd această condiție, din ecuația (3.20) rezultă

$$t_t \leqslant \frac{\ln\ (0{,}05\sqrt{1-\zeta^2})}{-\zeta\omega_n}. \tag{3.26}$$

În practică, pentru calculul timpului tranzitoriu t_t se utilizează o relație aproximativă acoperitoare

$$t_t \cong \frac{4}{\zeta\omega_n}.$$

● *Timpul de întîrziere* t_i este definit ca fiind timpul necesar ca mărimea de ieșire să crească de la zero la 0,50 y_{st}.

● *Timpul de creștere* t_c reprezintă intervalul de timp în care mărimea de la ieșire evoluează între 0,05 y_{st} și 0,95 y_{st}.

În concluzie, principalele performanțe ale sistemului de ordinul doi sînt: σ, t_t, t_i, t_c, ε_{st}. Aceste performanțe sînt determinate de valorile parametrilor sistemului ζ și ω_n. Dacă $K_0 \neq 1$, pentru intrare treaptă unitară eroarea în regim staționar este diferită de zero, fiind influențate de asemenea și celelalte performanțe ale sistemului de ordinul doi.

Pentru alte funcții aplicate la intrarea sistemului se poate determina răspunsul corespunzător. În figura 3.7, *a* și *b* se prezintă răspunsul sistemului de ordinul doi la intrare rampă unitară și impuls unitar.

Metoda ecuațiilor diferențiale este aplicabilă cu eficiență pentru analiza sistemelor cu grad redus de complexitate pe de o parte datorită dificultăților de obținere a ecuației diferențiale generale a sistemului prin eliminarea variabilelor intermediare, iar pe de altă parte datorită dificultăților de rezolvare prin metode clasice a ecuațiilor diferențiale de ordin superior. De asemenea, pentru rezolvare se impune cunoașterea setului de condiții inițiale ale sistemului care nu întotdeauna este cunoscut, caz în care soluția ecuației diferențiale nu este unică.

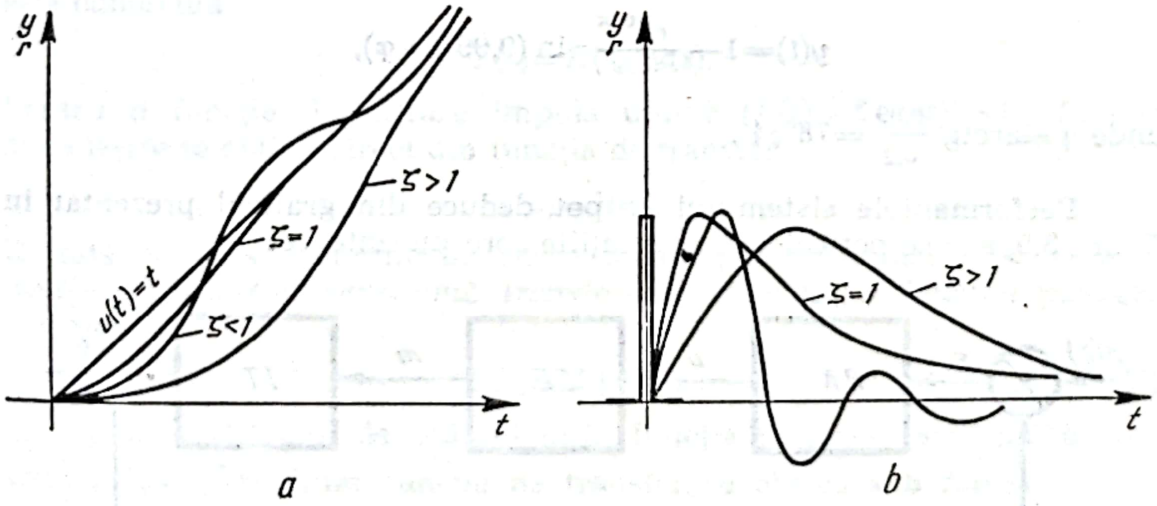


Fig. 3.7. Răspunsul sistemului de ordinul doi la diverse semnale de intrare și pentru diverse valori ale factorului de amortizare:
a — răspunsul la intrare rampă unitară; b — răspunsul la intrare impuls unitar.

Scanned with OKEN Scanner

Folosirea tehnicii de calcul analogic și numeric face posibilă analiza rapidă și cu precizie ridicată a oricărui sistem descris prin ecuații diferențiale liniare. Simularea analogică și numerică (v. subcap. 13.6) permite rezolvarea cu ușurință a problemelor de analiză pe baza ecuațiilor diferențiale.

Exemplul 3.2

Pentru a ilustra modul de calcul al performanțelor unui sistem prin rezolvarea ecuației diferențiale a sistemului, considerăm structura de sistem de reglare automată dată în figura 3.8. Elementele ce compun sistemul sînt caracterizate prin ecuațiile:

$$\text{IT: } 5\frac{dy}{dt}+y=0{,}5\text{ m} \quad \text{— element de ordinul întîi;}$$

$$\text{EE: } \frac{dm(t)}{dt}=2u(t) \quad \text{— element integrator;}$$

$$\text{RA: } u(t)=5\cdot\varepsilon(t) \quad \text{— element proporțional.}$$

Ecuația generală a sistemului se obține prin eliminarea variabilelor intermediare care apar în sistem. Astfel, eliminînd $m(t)$, $u(t)$ și $\varepsilon(t)$ din ecuațiile ce descriu funcționarea sistemului, se obține

$$5\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{dy(t)}{dt}+5y(t)=5\cdot r(t)$$

sau

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+0{,}2\frac{dy(t)}{dt}\,y(t)=r(t).$$

Pentru acest sistem de ordinul doi rezultă $\zeta=0{,}2$; $\omega_n=1$. Răspunsul sistemului la intrare treaptă unitară este dat de relația (3.20)

$$y(t)=1-\frac{e^{-0{,}2t}}{0.99}\sin(0{,}99\,t+\varphi),$$

unde $\varphi=\text{arctg}\,\frac{0{,}99}{0{,}2}=78°34'$.

Performanțele sistemului se pot deduce din graficul prezentat în figura 3.9, sau se pot calcula cu relațiile corespunzătoare:

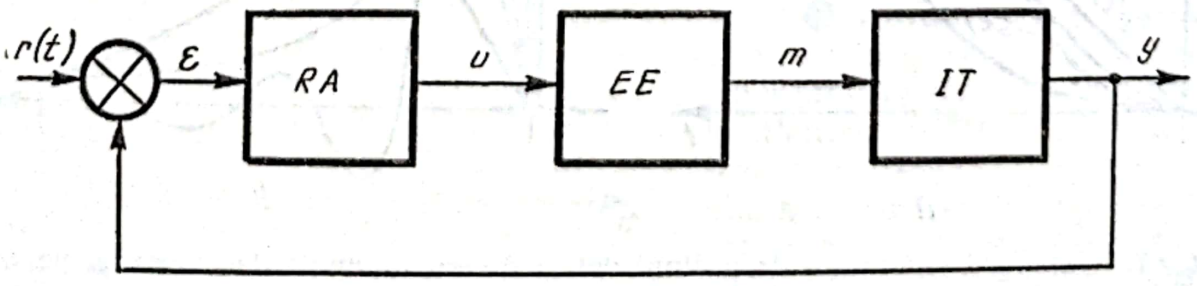


Fig. 3.8. Schema funcțională a unui SRA cu reacție unitară.

Scanned with OKEN Scanner

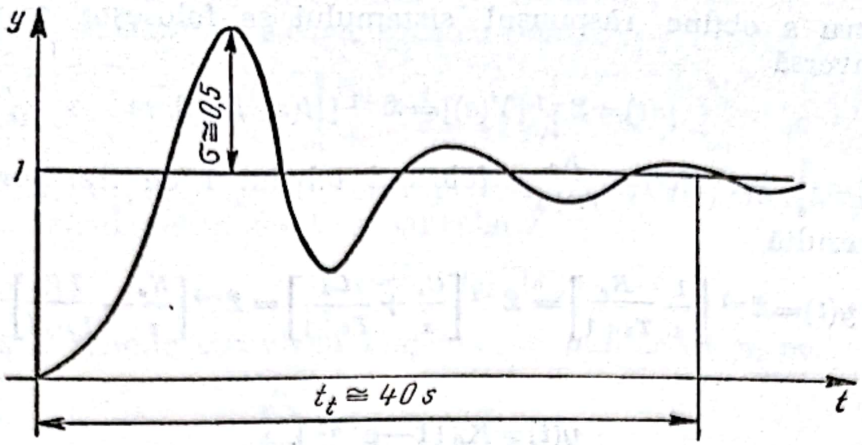


Fig. 3.9. Răspunsul unui sistem automat cu $\sigma=50\%$ și $t_t \simeq 40$ s.

$$\sigma = e^{-\frac{\zeta \cdot \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 50\%;$$

$$t_t = \frac{\ln 0{,}05\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta\omega_n} \simeq 40 \text{ s};$$

$$\varepsilon_{st} = 0.$$

3.2. CALCULUL RĂSPUNSULUI PE BAZA FUNCȚIILOR DE TRANSFER

Pornind de la definiția funcției de transfer (2.30), apare evident posibilitatea de a calcula răspunsul sistemului la orice funcție de intrare ce admite o transformată Laplace, dacă funcția de transfer a sistemului este cunoscută

$$Y(s)=H(s)\cdot R(s).$$

Pentru o funcție de intrare impuls unitar ($R(s)=\mathfrak{L}[\delta(t)]=1$), funcția de la ieșire se obține direct din funcția de transfer

$$Y(s)=H(s).$$

Rezultă astfel și semnificația fizică a funcției de transfer, și anume: *funcția de transfer reprezintă transformata Laplace a funcției pondere a sistemului*

$$H(s)=\mathfrak{L}[w(t)]. \tag{3.27}$$

Pentru sistemul de ordinul întîi, funcția pondere este dată de relația $w(t)=\frac{K_0}{T}e^{-t/T}$, iar funcția de transfer se obține sub forma

$$H(s)=\mathfrak{L}\left[\frac{K_0}{T}e^{-t/T}\right]=\frac{K_0}{Ts+1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a obține răspunsul sistemului se folosește transformata Laplace inversă

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\mathcal{L}^{-1}[H(s)\cdot R(s)]. \tag{3.28}$$

Dacă $R(s)=\frac{1}{s}$ iar $H(s)=\frac{K_0}{Ts+1}$, folosind tabelul 1 de transformate din anexa 2, rezultă

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\,\frac{K_0}{Ts+1}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C_1}{s}+\frac{C_2}{Ts+1}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K_0}{s}-\frac{TK_0}{Ts+1}\right]$$

sau

$$y(t)=K_0\,[1-e^{-t/T}]. \tag{3.29}$$

În cazul unui sistem de ordinul doi, funcția $Y(s)$ se calculează pentru intrare treaptă unitară cu ajutorul relației

$$Y(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{1}{s}-\frac{s+2\zeta\omega n}{(s+\xi\omega_n)^2+\omega_n^2(1+\xi^2)}\cdot \tag{3.30}$$

Răspunsul sistemului de ordinul doi se obține aplicînd transformata Laplace inversă relației (3.30)

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2}+\varphi).$$

Acest răspuns este identic cu răspunsul definit prin relația (3.20). Pornind de la definiția funcției de transfer (3.27) pentru sistemul de ordinul doi, se obține funcția pondere din tabelul 3.1

$$w(t)=\mathcal{L}^{-1}[H(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cdot\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_n^2(1-\zeta^2)}\right]$$

sau

$$w(t)=\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cdot e^{-\zeta\omega_n t}\cdot\sin(\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2}),$$

care este identică cu relația (3.18).

În cazul general cînd funcția de transfer a sistemului este cunoscută și dată sub forma (2.34), pentru aplicarea transformatei Laplace inversă în vederea determinării răspunsului sistemului la o intrare dată este necesară dezvoltarea în sumă de fracții a funcției.

Pentru un sistem a cărui funcție de transfer are n poli reali simpli și intrarea este o treaptă unitară, funcția de la ieșire se scrie sub forma

$$Y(s)=\frac{\sum_0^m b_j s^j}{s\sum_0^n a_r s^i}=\frac{C_{01}}{s}+\sum_{i=1}^{n}\frac{C_{i1}}{s+p_i}, \tag{3.31}$$

Scanned with OKEN Scanner

iar răspunsul sistemului se calculează cu relaţia

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C_{01}}{s}+\sum_{i=1}^{n}\frac{C_{i1}}{s+p_i}\right]=C_{01}+\sum_{i=1}^{n}C_{i1}e^{-p_i t}, \qquad (3.32)$$

unde $C_{01}, C_{11}, C_{21}\ldots C_{n1}$ sînt reziduurile funcţiei $Y(s)$. Reziduurile funcţiei $Y(s)$ se calculează în acest caz cu relaţia

$$C_{i1}=(s+p_i)Y(s)|_{s=-p_i}. \qquad (3.33)$$

Dacă o funcţie complexă $F(s)$ are un număr de n_i poli identici

$$F(s)=\frac{\sum_{j=0}^{m}b_j s^j}{\prod_{i=1}^{r}(s+p_i)^{n_i}}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{n_i}\frac{C_{ik}}{(s+p_i)^k}, \qquad (3.34)$$

reziduurile acestei funcţii se calculează cu relaţia [17, 56]

$$C_{ik}=\frac{1}{(n_i-k)!}\cdot\frac{d^{n_i-k}}{ds^{n_i-k}}[(s+p_i)^{n_i}\cdot F(s)]|_{s=-p_i}. \qquad (3.35)$$

Exemplul 3.3

Pentru funcţia $F(s)=\frac{1}{(s+1)^2(s+2)}$ se cere a se determina transformata Laplace inversă. Această funcţie se dezvoltă sub forma

$$F(s)=\frac{C_{11}}{s+1}+\frac{C_{12}}{(s+1)^2}+\frac{C_{21}}{s+2}.$$

Reziduurile funcţiei $F(s)$ se calculează cu relaţiile:

$$C_{11}=\frac{d}{ds}[(s+1)^2F(s)]\Big|_{s=-1}=\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+2}\right)\Big|_{s=-1}=-1;$$

$$C_{12}=(s+1)^2F(s)\Big|_{s=-1}=\frac{1}{s+2}\Big|_{s=-1}=1;$$

$$C_{21}=(s+2)F(s)\,|_{s=-2}=1;$$

$$F(s)=-\frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{s+2}.$$

Apelînd la tabelul 1 de transformate Laplace din anexa 2, se obţine funcţia $f(t)$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=-e^{-t}+te^{-t}+e^{-2t}.$$

Reziduurile funcţiei $Y(s)$ pentru un sistem automat sînt determinate atît de valoarea polilor funcţiei de transfer cît şi de valoarea zerourilor acesteia; deci răspunsul sistemului este determinat atît de zerouri cît şi de polii funcţiei de transfer ai sistemului.

Scanned with OKEN Scanner

3.2.1. CALCULUL FUNCȚIEI DE TRANSFER A SISTEMELOR DE REGLARE AUTOMATĂ

Funcția de transfer, așa cum s-a arătat în paragraful 2.2.2, reprezintă o expresie algebrică în domeniul complex, de cele mai multe ori sub forma unui raport de polinoame, care caracterizează funcționarea unui element sau sistem în condiții inițiale nule, deci caracterizează regimul liber (comportarea intrinsecă a sistemului).

Un mod de reprezentare a sistemului automat îl constituie schema funcțională, care evidențiază relațiile între diferitele blocuri funcționale (subsisteme) ce compun sistemul de reglare automată. Dacă fiecare element component al sistemului este caracterizat prin relația ieșire-intrare, respectiv are o anumită funcție de transfer, schema funcțională a unui sistem de reglare are forma din figura 3.10.

Funcțiile de transfer ale blocurilor componente sînt definite astfel:

$H_1(s)=\frac{U(s)}{\varepsilon(s)}$ — funcția de transfer a regulatorului automat;

$H_2(s)=\frac{M(s)}{U(s)}$ — funcția de transfer a elementului de execuție;

$H_3(s)=\frac{Y(s)}{M(s)}$ — funcția de transfer a instalației tehnologice;

$G(s)=\frac{Y_r(s)}{Y(s)}$ — funcția de transfer a traductorului de pe calea de reacție;

$P(s)$ — reprezintă perturbația aditivă aplicată asupra procesului; efectul acestei mărimi asupra ieșirii se însumează cu efectul mărimii de referință a sistemului.

Această mărime se poate aplica la intrarea procesului sau la ieșirea acestuia, ca în figurile 3.11, *a* și *b*.

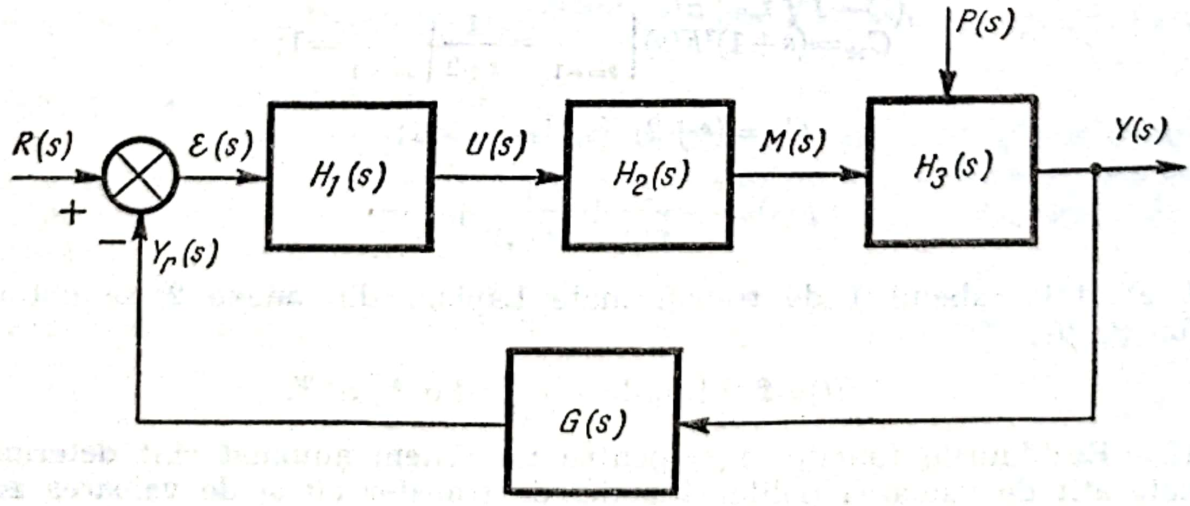


Fig. 3.10. Schema funcțională a unui SRA cu evidențierea funcțiilor de transfer pentru fiecare component.

Scanned with OKEN Scanner

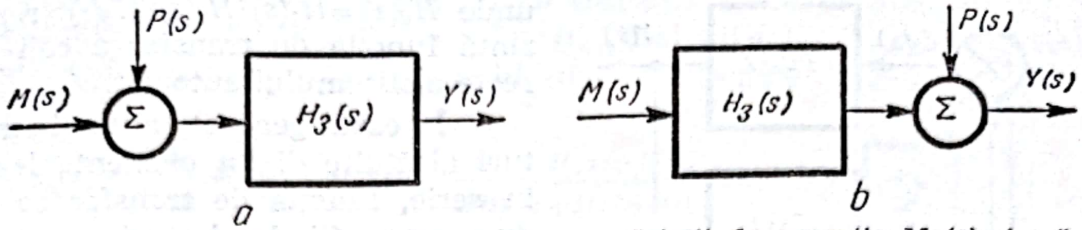


Fig. 3.11. Schema-bloc a unui proces supus mărimii de execuţie M (s) şi mărimii perturbatoare P (s):
a — perturbaţia $P(s)$ se aplică la intrarea procesului; *b* — perturbaţia $P(s)$ se aplică la ieşirea procesului.

De remarcat faptul că această perturbaţie se aplică direct sau prin intermediul unui bloc funcţional, a cărei funcţie de transfer o vom nota cu $Hp(s)$.

În figura 3.12 se prezintă schema funcţională a unui sistem de reglare automată cu perturbaţie aditivă aplicată la intrarea procesului.

Pentru calculul funcţiei de transfer a sistemului, mai întîi vom determina funcţia de transfer în raport cu intrarea şi apoi funcţia de transfer în raport cu perturbaţia.

Considerînd $P(s)=0$, putem scrie următoarele relaţii între transformatele variabilelor sistemului:

$$\begin{aligned} Y(s)&=H_3(s)\cdot M(s);\\ M(s)&=H_2(s)\cdot U(s);\\ U(s)&=H_1(s)\cdot \varepsilon(s);\\ Y_r(s)&=G(s)\cdot Y(s). \end{aligned} \tag{3.36}$$

Eliminarea variabilelor intermediare $U(s)$, $M(s)$ permite a calcula funcţia de transfer între ieşirea $Y(s)$ şi eroarea $\varepsilon(s)$ sub forma

$$Y(s)=H_1(s)\cdot H_2(s)\cdot H_3(s)\cdot \varepsilon(s)=H_d(s)\cdot \varepsilon(s), \tag{3.37}$$

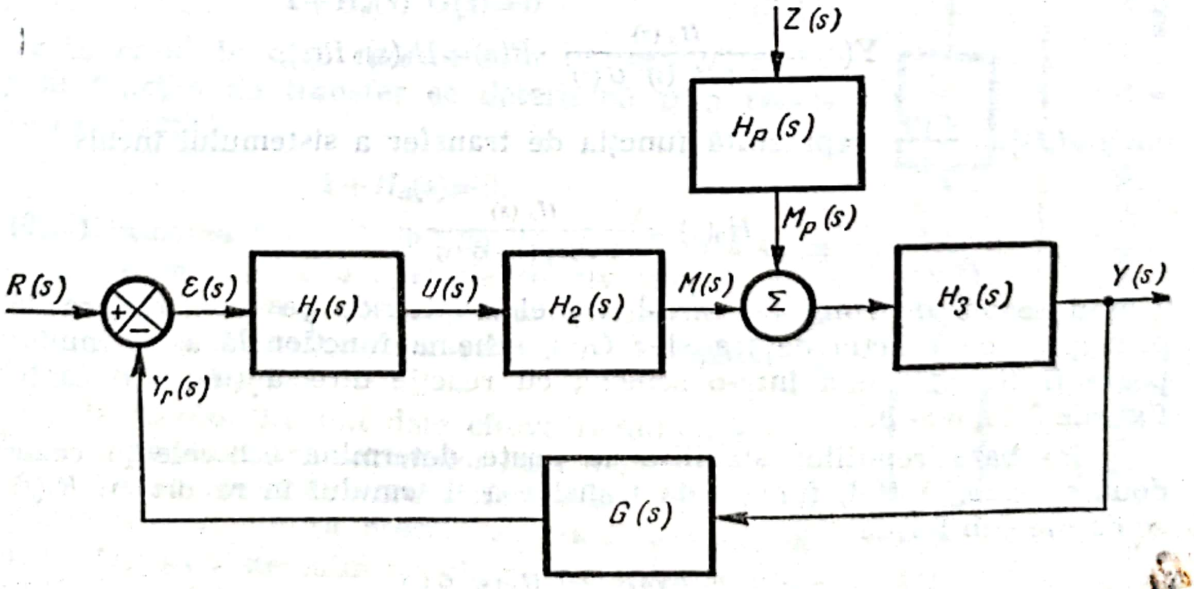


Fig. 3.12. Schema funcţională a unui SRA supus unei perturbaţii Z (s).

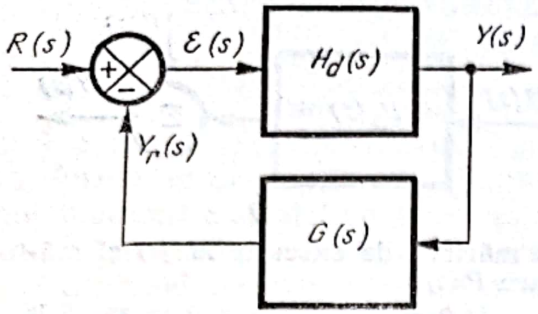


Fig. 3.13. Schema simplificată a unui SRA cu traductor pe calea de reacție.

unde $H_d(s)=H_1(s)\cdot H_2(s)\cdot H_3(s)$ reprezintă funcția de transfer a căii directe a sistemului automat.

În cazul general al unei structuri alcătuite din n elemente legate în serie, funcția de transfer se deduce ușor, fiind dată de produsul funcțiilor de transfer ale elementelor ce compun structura.

Ținînd seama de definiția funcției de transfer a căii directe sau a sistemului deschis cu intrarea $\varepsilon(s)$, schema funcțională se poate reduce la forma dată în figura 3.13.

Dacă se scriu relațiile între transformatele variabilelor sistemului pornind de la funcția elementului de comparație și de la definiția funcției de transfer, se obține:

$$\begin{aligned} \varepsilon(s)&=R(s)-Y_r(s);\\ Y(s)&=H_d(s)\cdot\varepsilon(s);\\ Y_r(s)&=G(s)\cdot Y(s). \end{aligned} \tag{3.38}$$

Eliminînd variabilele intermediare $\varepsilon(s)$ și $Y_r(s)$ din sistemul (3.38), se obține relația intrare-ieșire a sistemului sub forma

$$Y(s)=H_d(s)\cdot[R(s)-G(s)\cdot Y(s)]$$

sau

$$Y(s)\ [1+H_d(s)\cdot G(s)]=H_d(s)\cdot R(s),$$

deci

$$Y(s)=\frac{H_d(s)}{1+H_d(s)\cdot G(s)}\cdot R(s)=H_0(s)\cdot R(s),$$

unde $H_0(s)=\dfrac{Y(s)}{R(s)}$ reprezintă funcția de transfer a sistemului închis

$$H_0(s)=\frac{H_d(s)}{1+H_d(s)\cdot G(s)}. \tag{3.39}$$

Ținînd seama de rolul pe care-l are elementul de pe calea de reacție principală cu funcția de transfer $G(s)$, schema funcțională a sistemului poate fi transformată într-o schemă cu reacție directă (unitară) ca în figurile 3.14, *a* și *b*.

Pe baza relațiilor stabilite se poate determina echivalența celor două scheme. Astfel, funcția de transfer a sistemului în raport cu $R_0(s)$ se obține sub forma

$$H_0'(s)=\frac{Y(s)}{R_0(s)}=\frac{H_d(s)\cdot G(s)}{1+H_d(s)\cdot G(s)},$$

Scanned with OKEN Scanner

iar funcția de transfer în raport cu intrarea sistemului se obține ca un produs între $H_0'(s)$ și $1/G(s)$, dată fiind cuplarea celor două blocuri funcționale în serie

$$H_0(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{1}{G(s)}\cdot H_0'(s)=\frac{1}{G(s)}\cdot\frac{H_d(s)\cdot G(s)}{1+H_d(s)\cdot G(s)}=$$

$$=\frac{H_d(s)}{1+H_d(s)\cdot G(s)},$$

ceea ce arată că cele două scheme sînt echivalente avînd aceeași funcție de transfer în raport cu intrarea $R(s)$ a sistemului. Astfel, orice sistem cu reacție realizată prin elemente liniare poate fi pus sub forma unui sistem cu reacție unitară, ținînd seama de relația

$$Y(s)=H_d(s)\cdot R(s)-H_d(s)\cdot G(s)\cdot Y(s)=$$

$$=H_d(s)\,[R(s)-G(s)\cdot Y(s)]=H_d(s)\cdot G(s)\left[\frac{R(s)}{G(s)}-Y(s)\right]. \qquad (3.40)$$

Numitorul funcției de transfer, care reprezintă ecuația caracteristică a sistemului (vezi relația de definiție 2.36), în cazul reacției neunitare are forma $1+H_d(s)\cdot G(s)$, fiind determinat atît de forma lui $H_d(s)$ cît și de $G(s)$. Polii funcției de transfer $H_0(s)$ sînt determinați prin rezolvarea ecuației caracteristice a sistemului

$$1+H_d(s)\cdot G(s)=0, \qquad (3.41)$$

iar în cazul în care reacția este unitară ($G(s)=1$) polii funcției de transfer se determină prin rezolvarea ecuației

$$1+H_d(s)=0. \qquad (3.42)$$

Obținerea funcției de transfer generale a unui sistem automat este o operație relativ simplă, care are la bază cîteva proprietăți ale funcției de transfer și reguli de reducere a schemelor complexe la scheme echivalente.

În tabelul 3.1 sînt date cîteva reguli care stau la baza transformării schemelor funcționale.

Pentru cazul în care sistemul are mai multe intrări, fiecare dintre acestea se tratează independent. Ieșirea sistemului se obține ca sumă a efectelor variabilelor aplicate la intrările sistemului.

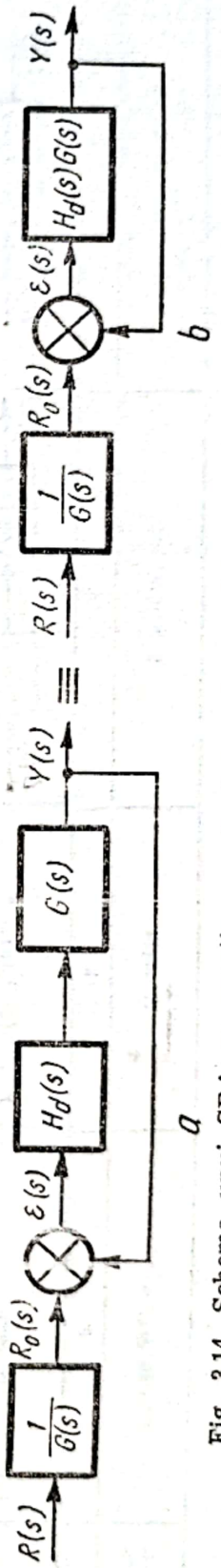
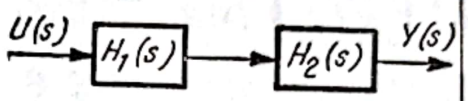
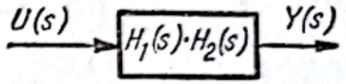
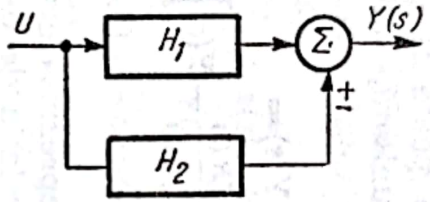
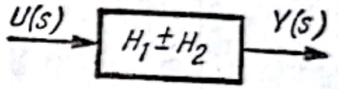
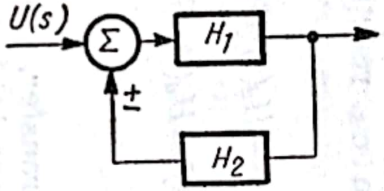
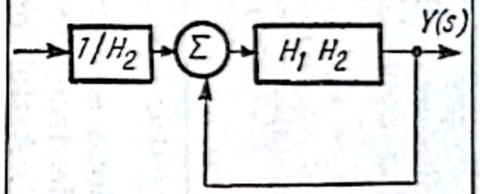
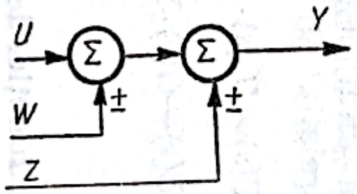
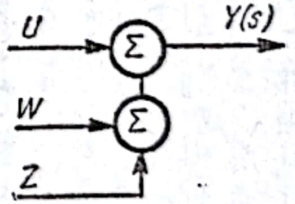
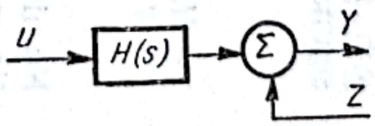
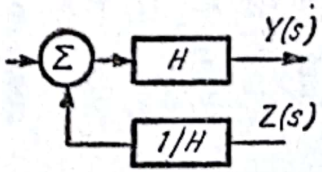


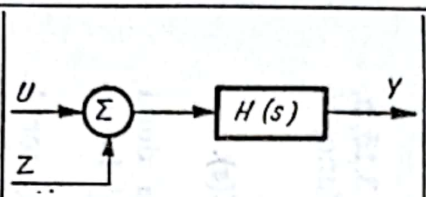
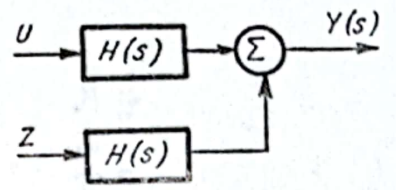
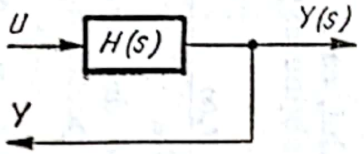
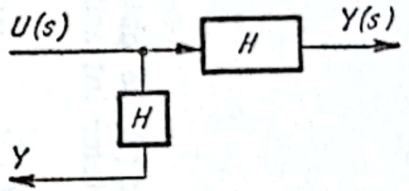
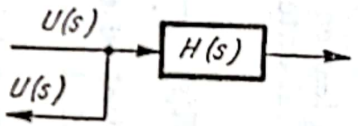
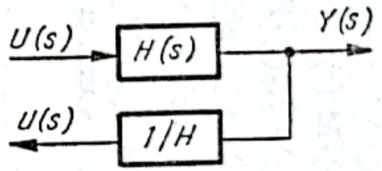
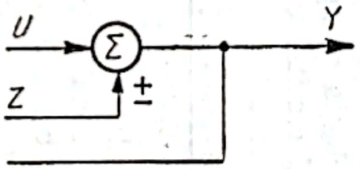
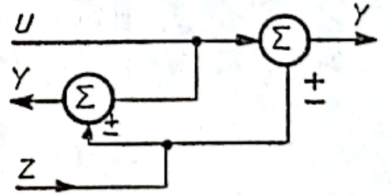
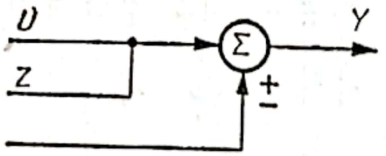
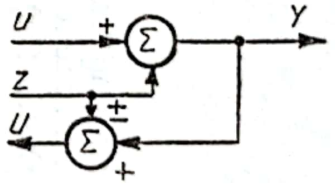
Fig. 3.14. Schema unui SRA cu reacție neunitară transformat într-un sistem cu reacție unitară:
a — schema echivalentă; *b* — schema simplificată.

Scanned with OKEN Scanner

Transformări ale schemelor funcționale pe baza algebrei funcțiilor de transfer *Tabelul 3.1*

Nr. crt.	Structura	Ecuația	Schema-bloc	Schema echivalentă
1	2	3	4	5
1	Legarea în serie	$Y=H_1(s)H_2(s)U(s)$		
2	Legarea în paralel	$Y=(H_1(s)\pm H_2(s))U(s)$		
3	Eliminarea blocului de pe calea de reacție	$Y=H_1[U(s)\pm H_2(s)Y(s)]$		
4	Rearanjarea punctelor de sumare	$Y=U(s)\pm W\pm Z$		
5	Deplasarea unui punct de sumare înaintea unui bloc	$Y=HU+Z$		

Scanned with OKEN Scanner

6	Deplasarea unui punct de sumare în spatele unui bloc	$Y=H[U\pm Z]$		
7	Deplasarea unui punct de intersecție înaintea unui bloc	$Y=H(s)U(s)$		
8	Deplasarea unui punct de intersecție în spatele unui bloc	$Y=H(s)U(s)$		
9	Deplasarea unui punct de intersecție în fața unui punct de sumare	$Y=U\pm Z$		
10	Deplasarea unui punct de intersecție în spatele unui punct de sumare	$Y=U\pm Z$		

Scanned with OKEN Scanner

Pentru sistemul de reglare prezentat în figura 3.12 se pot scrie ecuaţiile:

$$\begin{aligned} Y(s)&=H_3(s)\cdot M_p(s);\\ M_p(s)&=M(s)+H_p(s)\cdot Z(s);\\ M(s)&=H_1(s)\cdot H_2(s)\cdot \varepsilon(s);\\ \varepsilon(s)&=R(s)-G(s)\cdot Y(s). \end{aligned} \tag{3.43}$$

Eliminînd variabilele intermediare $\varepsilon(s)$, $M(s)$, $M_p(s)$, se obţine transformata funcţiei de la ieşire $Y(s)$ ca o sumă a efectelor intrării $R(s)$ şi perturbaţiei $Z(s)$

$$Y(s)=\frac{H_1(s)\,H_2(s)\,H_3(s)}{1+H_1H_2H_3(s)\cdot G(s)}\,R(s)+\frac{H_p(s)\cdot H_3(s)}{1+H_1(s)\,H_2(s)\,H_3(s)\,G(s)}\cdot Z(s). \tag{3.44}$$

Dacă perturbaţia se aplică la ieşirea procesului, ca în figura 3.15, *a*, procedînd în mod similar ca în cazul anterior se obţine expresia funcţiei de la ieşire sub forma

$$Y(s)=\frac{H_1(s)\cdot H_2(s)\cdot H_3(s)}{1+H_1(s)\cdot H_2(s)\cdot H_3(s)\cdot G(s)}\cdot R(s)+\frac{H_p(s)}{1+H_1(s)\cdot H_2(s)\cdot H_3(s)\cdot G(s)}\cdot Z(s).$$

Acelaşi rezultat se obţine dacă sistemul se descompune în două scheme distincte, considerînd pe rînd $Z(s)=0$, respectiv $R(s)=0$ şi însumînd rezultatele obţinute.

În figurile 3.15, *b* şi *c* sînt prezentate cele două scheme cu ajutorul cărora se obţine expresia transformatei ieşirii sistemului. Cele două componente, $Y_1(s)$ şi $Y_2(s)$, ţinînd seama de regulile de reducere a schemelor, se pot deduce din figurile 3.15, *b* şi *c*:

$$Y_1(s)=\frac{H_1(s)\,H_2(s)\,H_3(s)}{1+H_1(s)\,H_2(s)\,H_3(s)\,G}\cdot R(s)$$

efectul mărimii de la intrare asupra mărimii de la ieşire pentru $Z(s)=0$;

$$Y_2(s)=\frac{H_p(s)\,H_3(s)}{1+H_1(s)\,H_2(s)\,H_3(s)\,G(s)}\cdot Z(s)$$

efectul mărimii $Z(s)$ (perturbaţia asupra mărimii de la ieşire pentru $R(s)=0$).

Rezultă

$$Y(s)=Y_1(s)+Y_2(s)=H_0(s)\cdot R(s)+H_{0p}(s)\cdot Z(s), \tag{3.45}$$

unde $H_{0p}(s)$ reprezintă funcţia de transfer a sistemului în raport cu perturbaţia.

Pentru sistemele complexe, care conţin mai multe bucle şi mai multe intrări, se poate obţine o schemă echivalentă, a cărei funcţie de transfer se scrie pe baza relaţiilor deja stabilite. Procedura de reducere a schemelor funcţionale complexe poate fi prezentată sub forma următorului algoritm, care are la bază transformările din tabelul 3.1:

1. se combină toate elementele legate în serie — transformarea *1*;

Scanned with OKEN Scanner

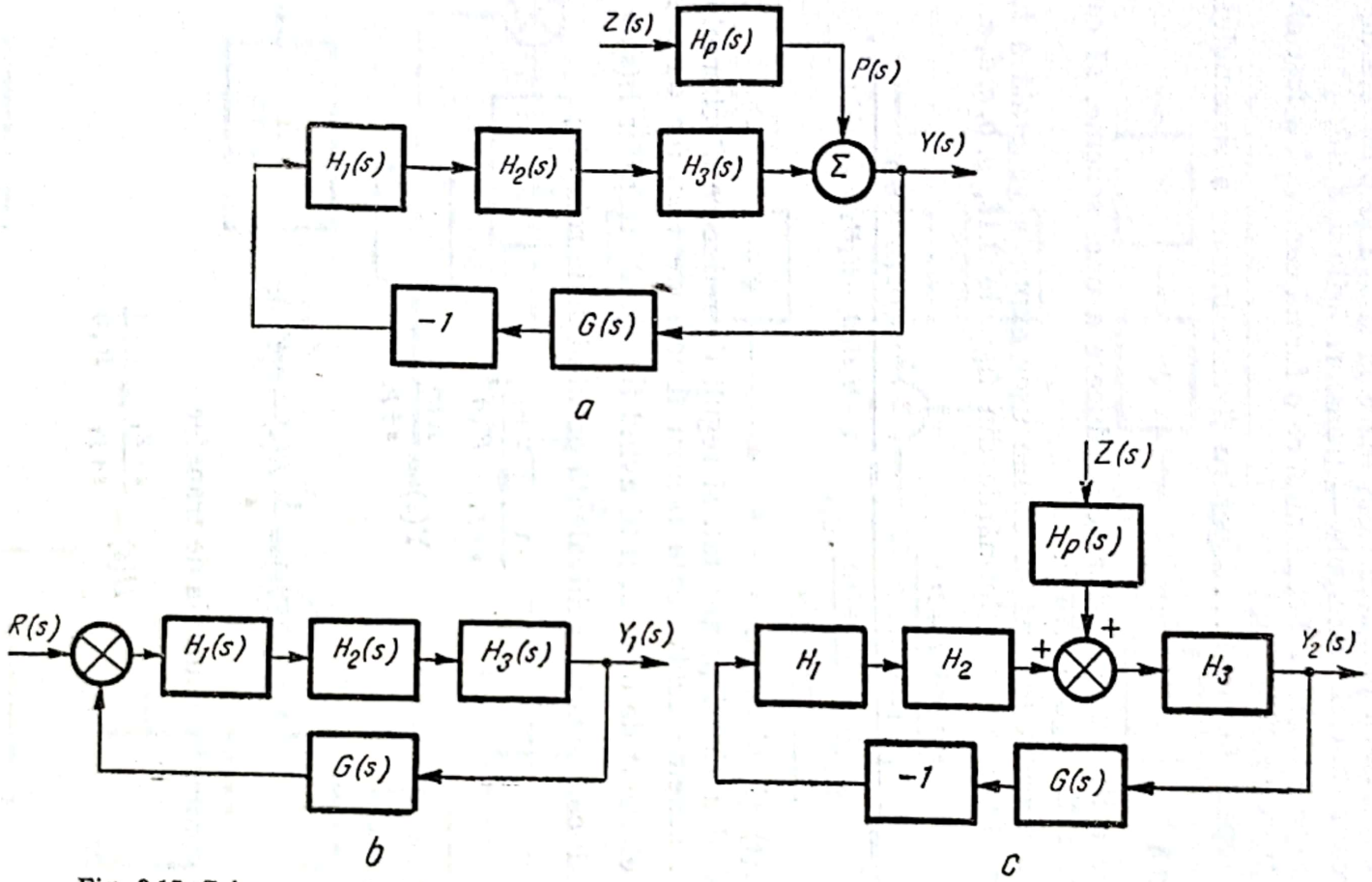


Fig. 3.15. Schema unui sistem de reglare automată avînd intrarea $R(s)$ şi perturbaţia $Z(s)$:
a — schema SRA cu perturbaţie aplicată la ieşirea procesului; *b* — schema SRA supus unei mărimi la intrare; *c* — schema SRA cu perturbaţie aplicată la intrarea procesului.

Scanned with OKEN Scanner

2. se combină toate elementele legate în paralel — transformarea 2;

3. se combină toate buclele interioare (secundare) — transformarea 3;

4. se deplasează punctele de sumare la stînga şi punctele de intersecţie la dreapta buclei principale — transformările 5, 8, 10;

5. se repetă treptele 1 ... 4 pînă ce o formă canonică a fost obţinută pentru o intrare particulară;

6. se repetă fazele 1 ... 5 pentru fiecare intrare a sistemului.

Exemplul 3.4

Pentru a ilustra procedura de reducere a unei scheme, să considerăm structura din figura 3.16, *a*.

Pentru această schemă se obţine uşor expresia generală a funcţiei de transfer efectuînd transformările din figurile 3.16, *a, b, c, d, e*.

$$H_0(s)=\frac{\dfrac{H_1H_2(H_3+H_4)}{1-H_1H_2G_1}}{1+\dfrac{H_1H_2(H_3+H_4)}{1-H_1H_2G_1}\cdot G_2}=\frac{H_1H_2(H_3+H_4)}{1-H_1H_2G_1+H_1H_2(H_3+H_4)G_2},$$

unde $H=H(s)$ şi $G=G(s)$.

Folosind aceleaşi proprietăţi şi reguli de reducere a schemelor bloc se pot găsi scheme echivalente pentru funcţii de transfer date. Astfel, pentru un element de ordinul întîi avînd funcţia de transfer $H(s)=\dfrac{1}{s+p_1}$ se poate deduce o schemă echivalentă pornind de la relaţiile:

$$\frac{1}{s+p_1}=\frac{Y(s)}{R(s)};$$

$$Y(s)=\frac{R(s)}{s+p_1}$$

sau

$$Y(s)=\frac{1}{s}R(s)-p_1Y(s).$$

Pentru un element cu funcţia de transfer

$$H(s)=\frac{s+Z_1}{s+p_1}=\frac{Y(s)}{R(s)}$$

se obţine

$$Y(s)=1+\frac{z_1-p_1}{s+p_1}R(s).$$

Această echivalenţă arată cum un zero poate fi eliminat dintr-un bloc funcţional (fig. 3.16, *f, g*).

Scanned with OKEN Scanner

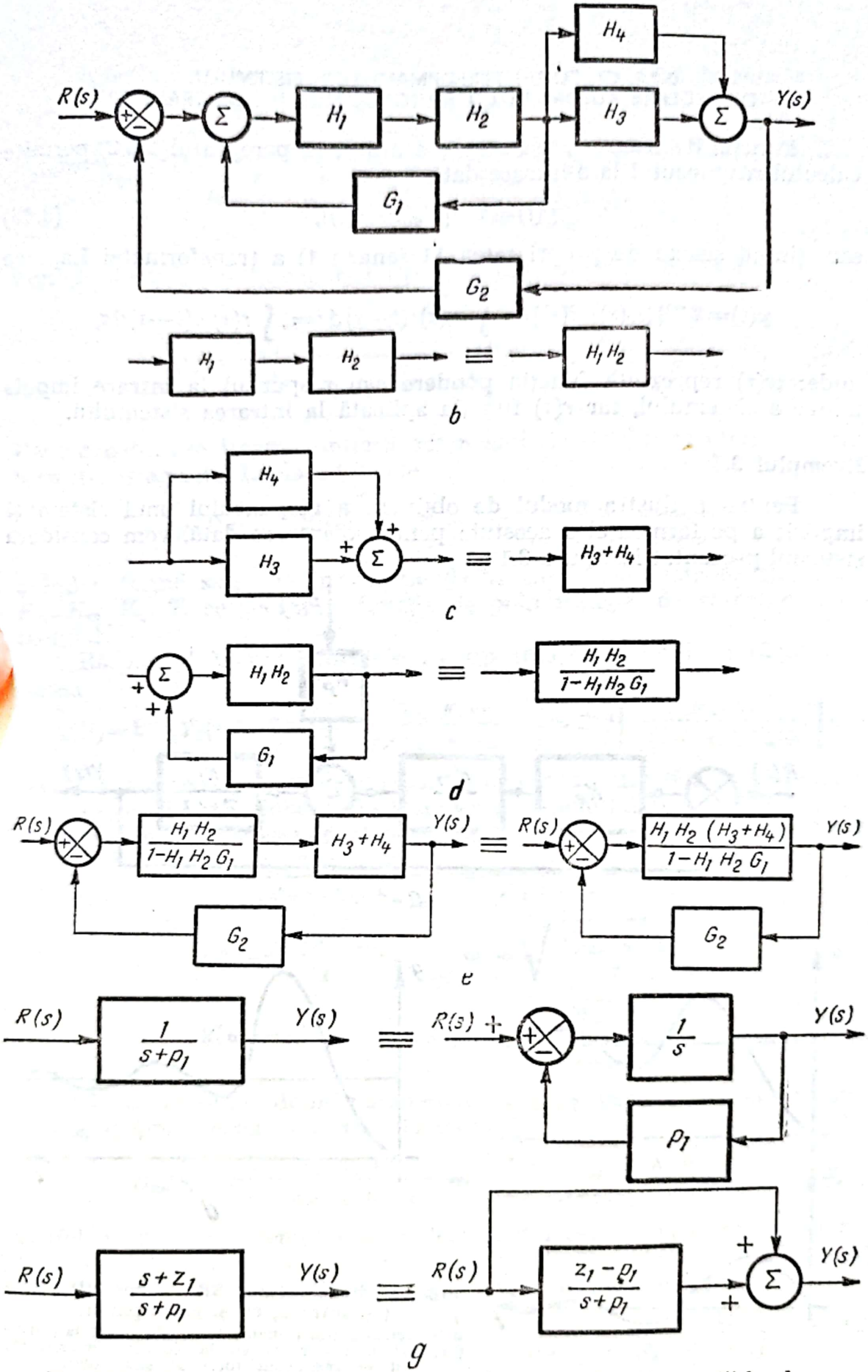


Fig. 3.16. Schema unui sistem automat prevăzut cu mai multe reacţii locale:
a — schema generală; *b* — echivalenţa a două elemente legate în serie; *c* — echivalenţa a două elemente legate în paralel; *d* — schema echivalentă a unui sistem cu reacţie pozitivă; *e* — schema simplificată a sistemului; *f* — schema echivalentă a unui sistem de ordinul întîi; *g* — schema echivalentă a unui sistem ce conţine un pol şi un zero.

Scanned with OKEN Scanner

3.2.2. CALCULUL PERFORMANȚELOR SISTEMULUI DE REGLARE AUTOMATĂ CU AJUTORUL FUNCȚIEI DE TRANSFER

Funcția de transfer, așa cum s-a arătat în paragraful 2.2.2, permite calculul răspunsului la o intrare dată

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[H_0(s)\cdot R(s)], \tag{3.46}$$

sau, ținînd seama de proprietatea 11 (anexa 1) a transformatei Laplace

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[H_0(s)\cdot R(s)]=\int_{0+}^{t} w(\tau)r(t-\tau)\,d\tau=\int_{0+}^{t} r(\tau)w(t-\tau)\,d\tau,$$

unde: $w(\tau)$ reprezintă funcția pondere sau răspunsul la intrare impuls unitar a sistemului, iar $r(\tau)$ funcția aplicată la intrarea sistemului.

Exemplul 3.5

Pentru a ilustra modul de obținere a răspunsului unui sistem și implicit a performanțelor acestuia pentru o intrare dată, vom considera sistemul prezentat în figura 3.17.

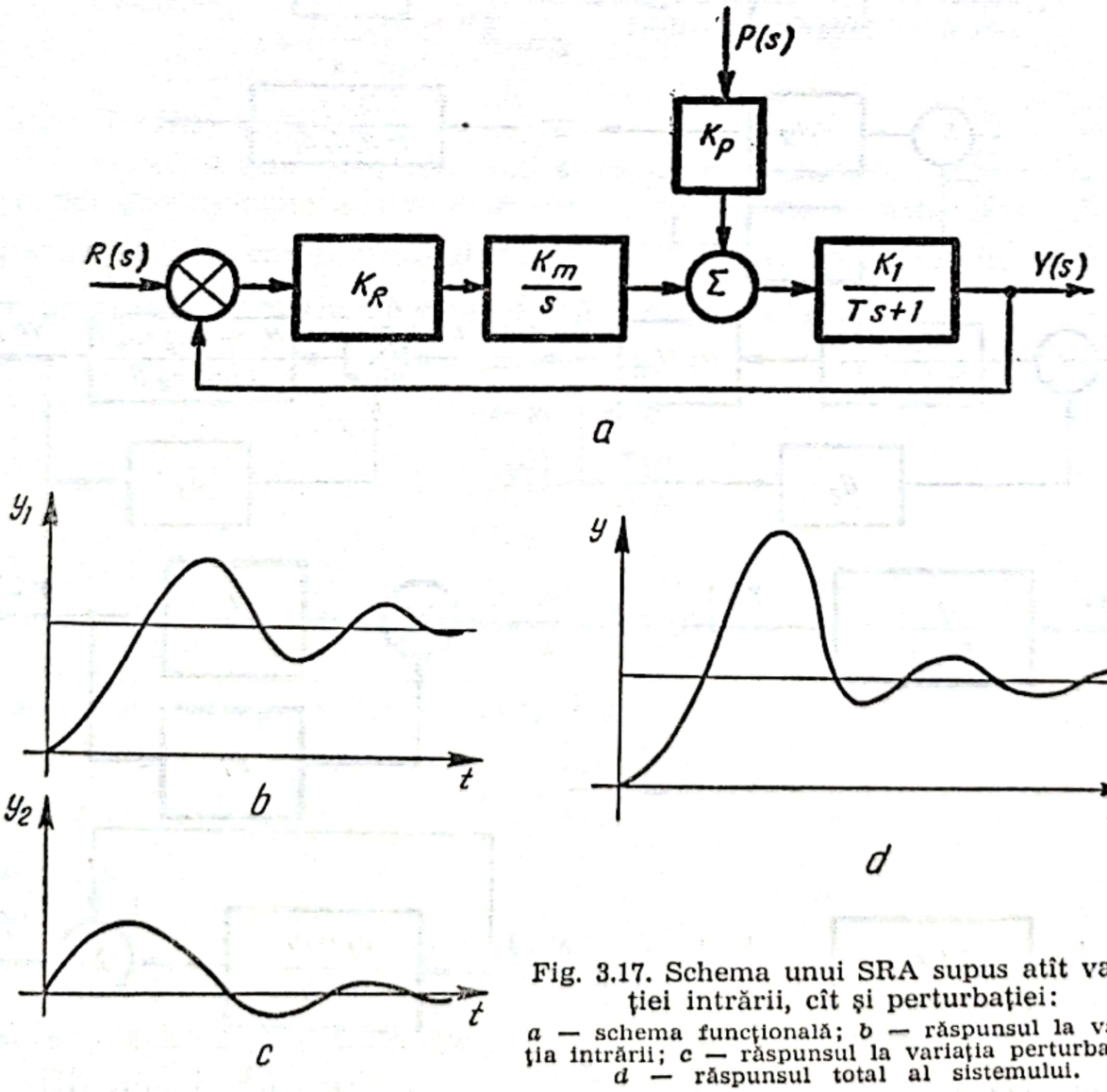


Fig. 3.17. Schema unui SRA supus atît variației intrării, cît și perturbației:
a — schema funcțională; *b* — răspunsul la variația intrării; *c* — răspunsul la variația perturbației; *d* — răspunsul total al sistemului.

Scanned with OKEN Scanner

Funcţia de transfer în raport cu intrarea este dată de relaţia

$$H_0(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{K_R\cdot\frac{K_m}{s}\cdot\frac{K_1}{Ts+1}}{1+K_R\cdot\frac{K_m}{s}\cdot\frac{K_1}{Ts+1}}=\frac{K_R\cdot K_m\cdot K_1}{s(Ts+1)+K_R\cdot K_m\cdot K_1}=\frac{K_R\cdot K_m\cdot K_1}{Ts^2+s+K_R\cdot K_m\cdot K_1}. \tag{3.47}$$

Funcţia de transfer în raport cu perturbaţia este dată de relaţia

$$H_{0p}(s)=\frac{Y(s)}{P(s)}=\frac{K_p\cdot\frac{K_1}{Ts+1}}{1+K_R\cdot\frac{K_m}{s}\cdot\frac{K_1}{Ts+1}}=\frac{K_p\cdot K_1\cdot s}{Ts^2+s+K_R\cdot K_m\cdot K_1}. \tag{3.48}$$

Pentru o intrare treaptă unitară, răspunsul sistemului se obţine cu ajutorul transformatei Laplace inverse

$$y_1(t)=\mathfrak{L}^{-1}[Y_1(s)]=\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\cdot\frac{K_R\cdot K_m\cdot K_1}{Ts^2+s+K_R\cdot K_m\cdot K_1}\right],$$

avînd o formă sau alta în funcţie de valoarea parametrilor sistemului K_R, K_m, K_1, T, respectiv în funcţie de polii funcţiei de transfer ai sistemului.

Răspunsul la o perturbaţie de tip treaptă unitară se obţine sub forma

$$y_2(t)=\mathfrak{L}^{-1}[Y_2(s)]=\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\,\frac{K_p\cdot K_1\cdot s}{Ts^2+s+K_RK_mK_1}\right]=\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{K_p\cdot K_1}{Ts^2+s+K_RK_mK_1}\right],$$

care, de asemenea, depinde de polii funcţiei de transfer ai sistemului.

Evidenţiind în funcţia de transfer a sistemului parametrii ζ şi ω_n, se poate determina răspunsul acestuia pentru diverse valori ale lui ζ:

$$\frac{K_R\cdot K_m\cdot K_1}{Ts^2+s+K_R\cdot K_m\cdot K_1}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2};$$

$$\omega_n^2=\frac{K_R\cdot K_m\cdot K_1}{T};\qquad \omega_n=\sqrt{\frac{K_R\cdot K_m\cdot K_1}{T}};$$

$$2\zeta\omega_n=\frac{1}{T};\qquad \zeta=\frac{1}{2T}\cdot\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{K_R\cdot K_m\cdot K_1}}.$$

În mod similar se pot defini parametrii ζ şi ω_n şi pentru funcţia de transfer $H_{0p}(s)$, ţinînd seama de expresia acesteia

$$H_{0p}(s)=\frac{K_p\cdot K_1\cdot s}{Ts^2+s+K_R\cdot K_m\cdot K_1}=\frac{s\cdot\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\cdot\frac{K_p}{K_R\cdot K_m}.$$

Astfel, răspunsul sistemului este alcătuit din cele două componente determinate de variaţia intrării şi perturbaţiei şi poate fi scris în cazul în care şi intrarea şi perturbaţia sînt trepte unitare sub forma

$$y(t)=\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\cdot\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\right]+\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\cdot s\cdot\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\cdot\frac{K_p}{K_R\cdot K_m}\right]. \tag{3.49}$$

Scanned with OKEN Scanner

Introducerea în relaţia (3.49) a valorilor parametrilor ζ şi ω_n determinate de parametrii sistemului T, K_1, K_m, K_R dă posibilitatea obţinerii răspunsului sistemului ca sumă a unei funcţii indiciale (răspunsul la treaptă unitară) şi a unei funcţii pondere multiplicată cu factorul $\frac{K_p}{K_R \cdot K_m}$ (răspunsul la o perturbaţie treaptă unitară) a unui model echivalent de ordinul doi caracterizat prin ζ şi ω_n. Pentru $K_R=10$, $K_m=2$, $K_1=5$ şi $T=5$ s, valorile parametrilor ζ şi ω_n sînt:

$$\zeta=0{,}7 \text{ şi } \omega_n=20 \text{ s}^{-1}.$$

Răspunsul sistemului pentru aceste valori este reprezentat în figurile 3.17, *b*, *c* şi *d*.

Un alt exemplu de sistem de reglare îl constituie cel prezentat în figura 3.18, *a*. Astfel, admiţînd două elemente acumulatoare de tip recipient alimentate cu lichid prin intermediul unor robinete şi alegînd convenabil dimensiunile pîrghiilor de transmisie a reacţiei, se poate întocmi schema funcţională a acestui sistem ca în figura 3.18, *b*.

Semnificaţia constantelor K_1, K_2, T_1 şi T_2 este cea prezentată în capitolul 2, depinzînd de secţiunea recipientelor, de greutatea specifică a lichidului şi de rezistenţa hidraulică a robinetelor V_0, V_1 şi V_2. Perturbaţiile P_1 şi P_2 introduse în schema funcţională sînt de tip parametric, fiind reprezentate prin rezistenţele robinetelor V_1 şi V_2. Într-adevăr, dacă ţinem seama de expresia funcţiilor de transfer ale celor două subsisteme, atît factorii de amplificare K_1, K_2 cît şi constantele de timp T_1, T_2 se modifică prin modificarea rezistenţelor hidraulice corespunzătoare robinetelor V_1 şi V_2.

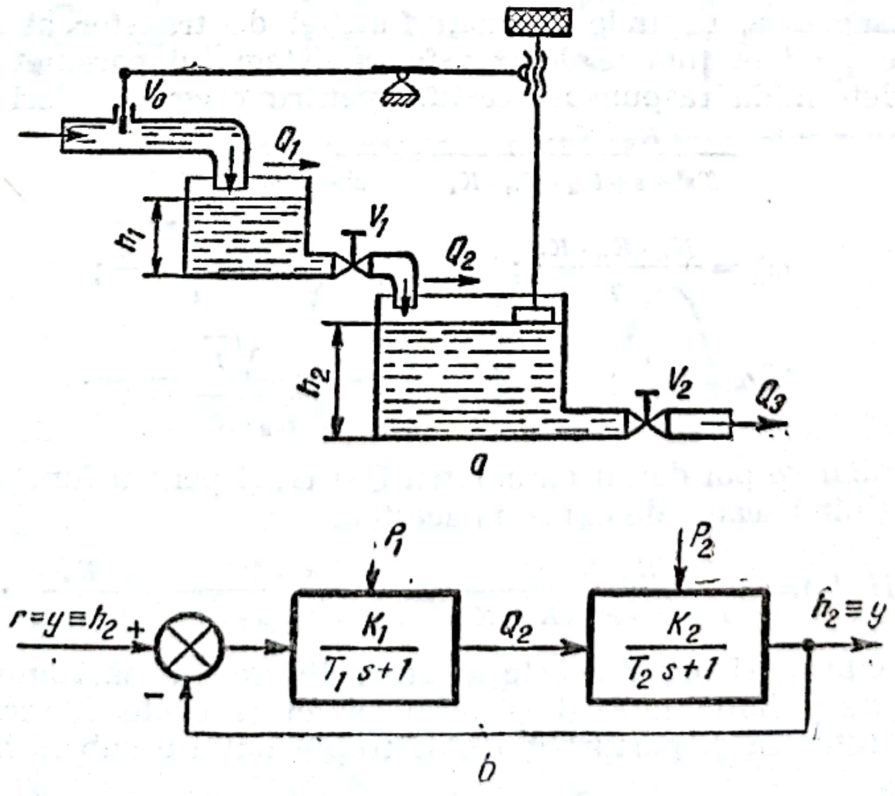


Fig. 3.18. Sistem de reglare a nivelului:
a — schema constructivă; *b* — schema funcţională.

Scanned with OKEN Scanner

Funcția de transfer generală a sistemului, obținută în condițiile în care parametrii K_1, K_2, T_1 și T_2 au valori constante, are forma

$$H(s)=\frac{K_1K_2}{T_1T_2s^2+(T_1+T_2)\,s+1+K_1K_2}$$

sau

$$H_0(s)=\frac{\frac{K_1K_2}{T_1T_2}}{s^2+\left(\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}\right)s+\frac{1+K_1K_2}{T_1T_2}}. \qquad (3.50)$$

Analiza acestui sistem se impune a fi făcută în raport cu variațiile factorului de amplificare a căii directe K_1K_2 și evident în raport cu valoarea constantelor de timp T_1 și T_2. Comportarea tranzitorie a acestui sistem depinde de valoarea raportului $\frac{(T_1+T_2)^2}{T_1T_2}/4(1+K_1K_2)=a$, care permite determinarea polilor funcției de transfer (3.50).

Astfel, dacă $a<1$, polii funcției de transfer sînt complecși, iar răspunsul este oscilant amortizat; dacă $a=1$, polii sînt reali și egali, iar răspunsul este amortizat critic; dacă $a>1$, polii funcției de transfer sînt reali și diferiți, iar răspunsul este supraamortizat. Raportul constantelor de timp $T_1/T_2=b$ și factorul de amplificare K_1K_2 al căii directe ai sistemului determină o comportare oscilantă sau exponențială a acestui sistem de reglare întrucît rădăcinile ecuației caracteristice a sistemului sînt funcție de b și K_1K_2. Modul de transfer al energiei între cele două compartimente ale sistemului determină regimul de funcționare oscilant sau de tip exponențial al întregului sistem. Pentru valori date ale rezistențelor R_1 și R_2 ale robinetelor și o anumită presiune P_a în conducta de alimentare a sistemului, se obține un anumit regim de funcționare a acestui sistem de reglare.

Dificultățile de obținere a transformatei inverse Laplace a unei funcții în domeniul s fac ca pentru aprecierea unor performanțe ale sistemului să se opereze direct cu funcția de transfer.

Vom determina *stabilitatea sistemului* și *eroarea în regim staționar* pe baza funcției de transfer.

3.2.2.1. Analiza stabilității sistemelor de reglare automată

O condiție necesară — dar nu și suficientă — pentru ca un sistem automat să poată fi utilizat în practică este *stabilitatea* sistemului, respectiv proprietatea sistemului de a restabili prin acțiunea sa un nou regim staționar în condițiile în care sub acțiunea variației mărimii de intrare sau a perturbațiilor a fost scos din regimul staționar anterior. Astfel, pentru un sistem stabil durata regimului tranzitoriu este limitată.

Un sistem instabil nu este utilizabil deoarece nu poate realiza pe cale automată o lege de dependență dorită între mărimea de ieșire și cea de intrare. Verificarea stabilității unui sistem automat reprezintă cea mai importantă fază a analizei unui sistem, impunîndu-se a fi efectuată înainte de a începe analiza celorlalte performanțe ale sistemului.

Gradul de stabilitate al unui sistem automat, în general, dă informații despre întreaga comportare a sistemului. Stabilitatea relativă a unui sistem caracterizează gradul de stabilitate și se definește în raport

Scanned with OKEN Scanner

cu variația unor parametrii ai sistemului. Aceasta permite a determina valorile optime ale parametrilor sistemului care asigură performanțele cele mai bune, fiind o strînsă legătură între rezerva (gradul) de stabilitate și celelalte performanțe ale sistemului. Un sistem cu un grad redus de stabilitate (sistemul mai apropiat de limita de stabilitate) are un suprareglaj mare — la limita de stabilitate rezultă $\sigma\%=100\%$ — pe cînd un sistem stabil care este departe de limita de stabilitate, deci are un grad (o rezervă) de stabilitate ridicat, are suprareglajul redus.

Stabilitatea unui sistem poate fi ușor definită în funcție de răspunsul liber al sistemului. Astfel, spunem că un sistem este stabil dacă răspunsul liber sau răspunsul la intrare impuls unitar tinde spre zero atunci, cînd timpul tinde spre infinit

$$\lim_{t\to\infty} y_l(t)=0. \tag{3.51}$$

În general, un sistem stabil este acela care la intrări limitate are ca răspuns ieșiri limitate.

Răspunsul liber fiind alcătuit dintr-o sumă de exponențiale

$$y_1(t)=\sum_{i=1}^{m} C_i e^{p_i t}+\sum_{k=m}^{n} C_k\cdot e^{\alpha_k t}\cdot \sin(\beta_k t+\varphi_k),$$

rezultă că, pentru ca sistemul să fie stabil, o condiție necesară este ca rădăcinile ecuației caracteristice să fie negative sau să aibă parte reală negativă. În aceste condiții, răspunsul liber va tinde spre zero cu creșterea timpului. Dacă unele rădăcini au partea reală zero, se spune că sistemul este la limita de stabilitate, răspunsul tranzitoriu nu tinde spre zero însă rămîne limitat.

Condiția necesară și suficientă ca un sistem să fie stabil este ca toți polii funcției de transfer $H_0(s)$ (rădăcinile ecuației caracteristice) să fie situați în semiplanul stîng al planului complex. Ecuația caracteristică a sistemului se poate scrie sub forma unui polinom în s

$$Q(s)=a_n s^n+a_{n-1}+s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0=0,$$

iar rezolvarea acestei ecuații permite a aprecia stabilitatea sau instabilitatea sistemului, în funcție de semnul părții reale a rădăcinilor, respectiv de poziția lor în planul complex.

Pentru a aprecia dacă rădăcinile ecuației caracteristice au sau nu parte reală negativă, pot fi utilizate metode care nu necesită rezolvarea ecuației caracteristice, metode denumite *criterii de stabilitate*. Una dintre aceste metode este cunoscută sub denumirea de *criteriul de stabilitate al lui Hurwitz*. Acest criteriu se bazează pe analiza semnului determinanților formați cu coeficienții a_i ai ecuației caracteristice și dă informații numai dacă sistemul este sau nu stabil.

Ecuației caracteristice a sistemului i se asociază tabloul

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \ldots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_0 \end{vmatrix}, \tag{3.52}$$

Scanned with OKEN Scanner

respectiv determinanţii:

$$\Delta_1 = a_{n-1};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} = a_{n-1}\, a_{n-2} - a_n\, a_{n-3};$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} = a_{n-1}a_{n-2} + a_n a_{n-1} a_{n-5} - a_n a_{n-3}^2 - a_{n-4} a_{n-1}^2;$$

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{n-1} & \dots & 0 \\ . & \dots & . \\ 0 & \dots & a_1 \end{vmatrix}.$$

Condiţia necesară şi suficientă ca toate rădăcinile ecuaţiei caracteristice să aibă partea reală negativă este ca toţi determinanţii Δ_i şi toţi coeficienţii $a_1, a_2, \dots, a_n$ să fie pozitivi.

Cînd $n=3$, pentru ca sistemul să fie stabil trebuie îndeplinite următoarele condiţii:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_2 a_1 a_0 - a_0^2 a_3 > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_2 a_1 - a_0 a_3 > 0;$$

$$\Delta_1 = a_2 > 0.$$

Dacă un sistem de reglare are funcţia de transfer

$$H_0(s) = \frac{5}{s^3 + 8s^2 + 14s + 24},$$

verificarea stabilităţii presupune á cunoaşte rădăcinile ecuaţiei caracteristice

$$s^3 + 8s^2 + 14s + 24 = 0.$$

Folosind criteriul de stabilitate Hurwitz pentru a cunoaşte semnul determinanţilor Δ_1, Δ_2, Δ_3, formaţi cu coeficienţii ecuaţiei caracteristice, rezultă:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 8 & 24 & 0 \\ 1 & 14 & 0 \\ 0 & 8 & 24 \end{vmatrix} = 212;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 8 & 24 \\ 1 & 14 \end{vmatrix} = 88;$$

$$\Delta_1 = 8.$$

Toţi determinanţii fiind pozitivi, sistemul considerat este stabil.

Scanned with OKEN Scanner

3.2.2.2. Calculul erorii în regim staţionar cu ajutorul funcţiei de transfer

Eroarea sistemului în regim staţionar ε_{st} se poate obţine direct cu ajutorul funcţiei de transfer a sistemului deschis $H_d(s)$, în condiţiile în care reacţia este unitară ($G(s)=1$).

Se admite o structură de sistem cu reacţie unitară (fig. 3.18, *b*), iar expresia funcţiei de transfer a căii directe $H_d(s)$ scrisă sub forma generală

$$H_d(s)=\frac{K}{s^{\alpha}}\cdot\frac{P_1(s)}{P_2(s)}, \tag{3.53}$$

unde K reprezintă factorul de amplificare al căii directe, α reprezintă numărul de poli în origine ai funcţiei de transfer pentru calea directă, iar polinoamele $P_1(s)$ şi $P_2(s)$ au ultimul termen egal cu unitatea (v. paragraful 2.2.2).

Valoarea α defineşte tipul sistemului. Astfel, sistemul definit în figura 3.19, *a* este de tip zero ($\alpha=0$), cel definit în figura 3.19, *b* este de tip 1 ($\alpha=1$), iar sistemul definit în figura 3.19, *c* este de tip 2 ($\alpha=2$).

Ţinînd seama de tipul sistemului şi de tipul funcţiei aplicate la intrare, pornind de la expresia (3.53) a funcţiei de transfer a sistemului deschis se pot defini coeficienţii de eroare şi eroarea în regim staţionar a sistemului.

● Pentru intrare treaptă unitară se defineşte *coeficientul de eroare de poziţie* K_p sub forma

$$K_p=\lim_{s\to 0}\frac{KP_1(s)}{s^{\alpha}P_2(s)}=\begin{cases}\dfrac{KP_1(0)}{P_2(0)}=K & \text{pentru } \alpha=0\\ \infty & \text{pentru } \alpha>0\end{cases} \tag{3.54}$$

iar eroarea în regim staţionar pentru intrare treaptă unitară se defineşte astfel

$$\varepsilon(\infty)=\varepsilon_{st}=1-y(\infty)=1-y_{st}$$

sau, aplicînd teorema valorii finale,

$$\varepsilon_{st}=\lim_{t\to\infty}\varepsilon\ (t)=\lim_{s\to 0}\ [s\cdot\varepsilon(s)],$$

unde $\varepsilon(s)$ reprezintă transformata Laplace a erorii sistemului.

Ţinînd seama că transformata erorii $\varepsilon(s)$ se poate calcula cu relaţia

$$\varepsilon(s)=\frac{1}{1+H_d(s)}\ R(s)=\frac{1}{1+\dfrac{K}{s^{\alpha}}\cdot\dfrac{P_1(s)}{P_2(s)}}\ R(s), \tag{3.55}$$

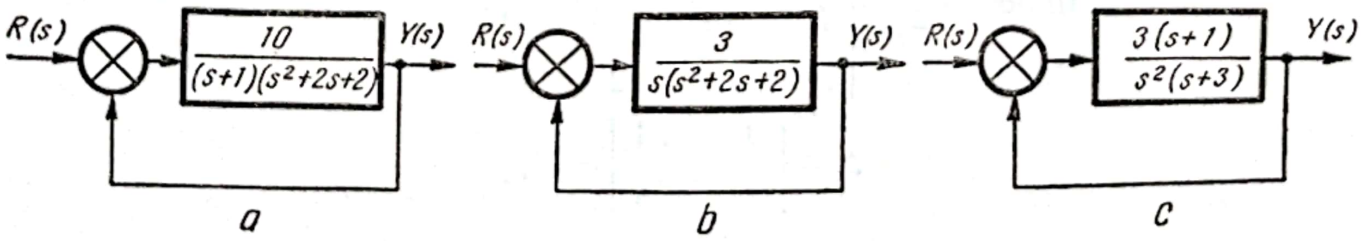


Fig. 3.19. Tipuri de sisteme automate:
a — sistem de tip zero; *b* — sistem de tip unu; *c* — sistem de tip doi.

Scanned with OKEN Scanner

pentru un sistem cu $\alpha=0$ și cu reacție unitară $G(s)=1$, eroarea în regim staționar este

$$\varepsilon_{st}=\lim_{s\to 0}\left\{s\left[\frac{1}{1+\frac{KP_1(s)}{sP_2(s)}}\right]\cdot\frac{1}{s}\right\}=\frac{1}{1+K_p}\equiv\frac{1}{1+K}; \tag{3.56}$$

● Pentru intrare rampă unitară se definește *coeficientul de eroare de viteză*

$$K_v=\lim_{s\to 0} s\,H_d(s)=\lim_{s\to 0}\frac{KP_1(s)}{s^{\alpha-1}P_2(s)}=\begin{cases}0 & \text{pentru } \alpha=0;\\ \dfrac{KP_1(0)}{P_2(0)}=K & \text{pentru } \alpha=1;\\ \infty & \text{pentru } \alpha>1,\end{cases} \tag{3.57}$$

iar eroarea în regim staționar pentru un sistem cu $\alpha=1$ și cu reacție unitară este dată de relația

$$\varepsilon_{st}=\lim_{s\to 0}\left\{\left[s\cdot\frac{1}{1+\frac{KP_1(s)}{sP_2(s)}}\right]\cdot\frac{1}{s^2}\right\}=\frac{1}{K_v}\equiv\frac{1}{K}. \tag{3.58}$$

● *Coeficientul de eroare de accelerație* se definește pentru un sistem cu reacție unitară la intrarea căruia se aplică o funcție parabolă unitară $r(t)=t^2/2$

$$K_a=\lim_{s\to 0}\left[s^2H_d(s)\right]=\lim_{s\to 0}\left[\frac{KP_1(s)}{s^{\alpha-2}P_2(s)}\right]=\begin{cases}0 & \text{pentru } \alpha=0;\ 1;\\ \dfrac{KP_1(0)}{P_2(0)}=K & \text{pentru } \alpha=2;\\ \infty & \text{pentru } \alpha>2.\end{cases} \tag{3.59}$$

Eroarea în regim staționar pentru un sistem cu $\alpha=2$ se calculează pornind de la relația (3.55) și are forma

$$\varepsilon_{st}=\lim_{s\to 0} s\varepsilon(s)=\lim_{s\to 0}\left\{\left[s\frac{1}{1+\frac{KP_1(s)}{sP_2(s)}}\right]\frac{1}{s^3}\right\}=\frac{1}{K_a}\equiv\frac{1}{K}; \tag{3.60}$$

Constantele de eroare (coeficienții K_p, K_v, K_a) și eroarea staționară pentru diferite valori ale lui α (diverse tipuri de sisteme) și diferite tipuri de funcții aplicate la intrare sînt prezentate în tabelul 3.2.

Din tabel rezultă că pentru un sistem de tipul zero, eroarea în regim staționar pentru intrare treaptă unitară este întotdeauna diferită de zero, valoarea acesteia variind invers proporțional cu coeficientul K_p.

Cunoașterea coeficienților de eroare ușor calculabili din funcția de transfer a sistemului deschis permite calculul erorii în regim staționar, respectiv aprecierea preciziei sistemului în regim staționar.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 3.2

Relaţiile de calcul al erorii staţionare şi al coeficienţilor de eroare

Intrare	Treaptă unitară		Rampă unitară		Parabolă unitară	
Tipul sistemului	K_p	Eroare staţionară	K_v	Eroare staţionară	K_a	Eroare staţionară
Tip zero ($\alpha=0$)	$\frac{KP_1(0)}{P_2(0)}=K$	$\frac{1}{1+K_p}$	0	∞	0	∞
Tip 1 ($\alpha=1$)	∞	0	$\frac{KP_1(0)}{P_2(0)}=K$	$\frac{1}{K_v}$	0	∞
Tip 2 ($\alpha=2$)	∞	0	∞	0	$\frac{KP_1(0)}{P_2(0)}=K$	$\frac{1}{K_a}$

Rezultatele din tabelul 3.2 sînt aplicabile numai sistemelor cu reacţie unitară. Aceste rezultate pot fi extinse şi la sisteme cu reacţie neunitară însă stabile. Astfel, dacă $H_0(s)$ reprezintă funcţia de transfer a sistemului iar $H_{0i}(s)$ funcţia de transfer ideală (a sistemului care realizează ieşirea dorită), eroarea se defineşte ca fiind diferenţa între cele două mărimi $y_i(t)$ şi $y(t)$ obţinute la ieşirea sistemelor cu funcţiile de transfer $H_0(s)$ şi $H_{0i}(s)$ (fig. 3.20).

Eroarea staţionară în acest caz se calculează cu ajutorul relaţiei

$$\varepsilon_{st}=\lim_{s\to 0}\,[s\cdot\varepsilon(s)]=\lim_{s\to 0}\,\{s[Y_{0i}(s)-Y(s)]\}=\lim_{s\to 0}\,s\cdot R(s)[H_{0i}(s)-H_0(s)], \tag{3.61}$$

iar coeficienţii de eroare pentru intrare treaptă, rampă şi parabolă unitară se calculează cu relaţiile [17]:

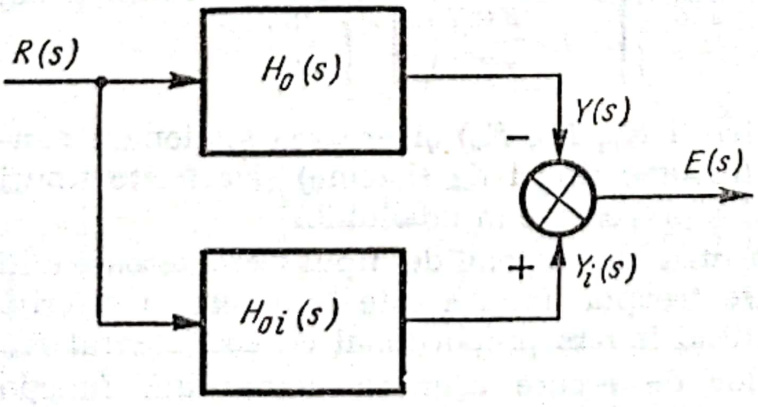


Fig. 3.20. Schemă pentru calculul erorii unui sistem automat.

$$K'_p=\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}\,[H_{0i}(s)-H_0(s)]}; \tag{3.62}$$

$$K'_v=\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}\,\frac{1}{s}\,[H_{0i}(s)-H_0(s)]}; \tag{3.63}$$

$$K'_a=\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}\,\frac{1}{s^2}\,[H_{0i}(s)-H_0(s)]}; \tag{3.64}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ținînd seama de relația (3.61) și de definiția coeficienților de eroare K'_p, K'_v, K'_a, eroarea staționară pentru un sistem cu reacție neunitară se calculează cu relațiile:

$\varepsilon_{st}=\frac{1}{K'_p}$ — pentru intrare treaptă unitară;

$\varepsilon_{st}=\frac{1}{K'_v}$ — pentru intrare rampă unitară;

$\varepsilon_{st}=\frac{1}{K'_a}$ — pentru intrare parabolă unitară.

Pentru a stabili o relație între coeficienții de eroare în general, dați prin relațiile (3.62), (3.63), (3.64), și coeficienții de eroare pentru sistemul cu reacție unitară, considerăm că sistemul dorit are funcția de transfer egală cu unitatea $H_{0i}(s)=1$ iar sistemul real are reacția unitară, $H_0(s)=\frac{H_d(s)}{1+H_d(s)}$. Ținînd seama de aceste ipoteze și de definiția coeficienților de eroare, se obține:

$$K'_p=\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}\left[\frac{1}{1+H_d(s)}\right]}=1+\lim_{s\to 0} H_d(s)=1+K_p;$$

$$K'_v=\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}\frac{1}{s}\frac{1}{1+H_d(s)}}=\lim_{s\to 0} sH_d(s)=K_v;$$

$$K'_a=\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}\frac{1}{s^2}\frac{1}{1+H_d(s)}}=\lim_{s\to 0} s^2H_d(s)=K_a.$$

Exemplul 3.6

Pentru sistemul a cărui structură este dată în figura 3.21, valoarea coeficienților de eroare, în cazul în care admitem că funcția de transfer dorită pentru sistemul $H_{0i}(s)=\frac{1}{2}$, se obține cu ajutorul relațiilor de definiție a coeficienților:

$$H_0(s)=\frac{H_d(s)}{1+H_d(s)\,G(s)}=\frac{\frac{2}{s^2+2}}{1+(s+1)\frac{2}{s^2+2}}=\frac{2}{s^2+2+2s+2}=\frac{2}{s^2+2s+4};$$

$$H_{0i}(s)-H_0(s)=\frac{1}{2}-\frac{2}{s^2-2s+4}=\frac{s(s-2)}{2(s^2-2s-4)};$$

$$K'_p=\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}\frac{s(s-2)}{2(s^2+2s+4)}}=\infty;$$

$$K'_v=\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}\frac{1}{s}\left[\frac{s(s+2)}{2(s^2+2s+4)}\right]}=4;$$

Scanned with OKEN Scanner

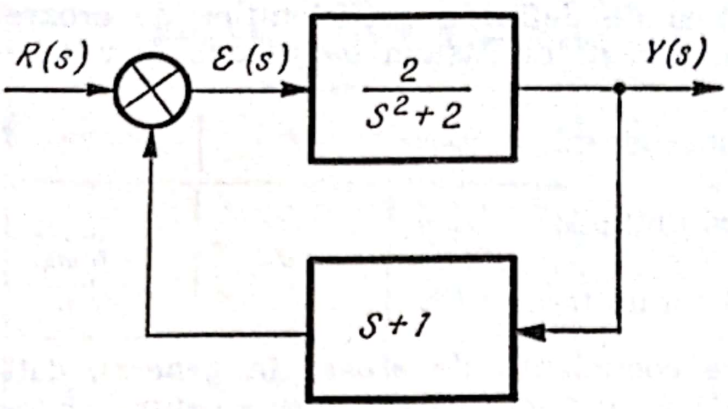


Fig. 3.21. Schema unui SRA cu reacţie neunitară.

$$K'_a = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}\left[\frac{1}{s^2} : \frac{s(s+2)}{2(s^2+2s+4)}\right]} = 0.$$

Eroarea la acest sistem se calculează pentru diferite tipuri de intrări: $\varepsilon_{st} = \frac{1}{K'_p} = 0$ pentru intrare treaptă unitară, $\varepsilon_{st} = \frac{1}{K'_v} = 0{,}25$ pentru intrare rampă unitară şi $\varepsilon_{st} = \frac{1}{K'_a} = \infty$ pentru intrare parabolă unitară.

Metoda funcţiilor de transfer pentru analiza sistemelor automate permite a calcula direct eroarea în regim staţionar a sistemului şi a verifica stabilitatea sistemului. Pe baza proprietăţilor funcţiilor de transfer şi a regulilor de reducere a schemelor funcţionale se poate scrie modelul matematic al unor structuri de sisteme complexe, efectuînd operaţii algebrice asupra funcţiilor de transfer.

Dezavantajul esenţial al metodei constă în faptul că funcţiile de transfer sînt definite numai în condiţii iniţiale nule, iar pentru a obţine răspunsul în timp al sistemului trebuie efectuată operaţia de transformare din domeniul complex în domeniul real.

Exemplul 3.7

Fie sistemul a cărui schemă funcţională este dată în figura 3.22.

Considerăm că blocul de reglare automată (regulatorul) este de tip proporţional-integral, celelalte elemente componente ale sistemului fiind definite prin funcţiile de transfer:

$$H_1(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right);$$

$$H_2(s) = \frac{K_1}{s};$$

$$H_3(s) = \frac{K_2}{T_1 s + 1};$$

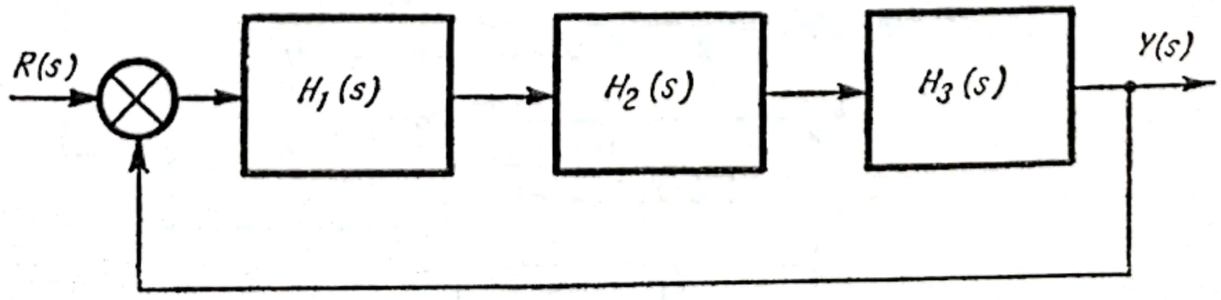


Fig. 3.22. Schema generală a unui SRA cu reacţie unitară.

Scanned with OKEN Scanner

Etapele analizei sînt:

1. Se calculează funcţia de transfer a sistemului deschis:

$$H_d(s)=H_1(s)\cdot H_2(s)\cdot H_3(s)=\frac{K_R(T_is+1)}{T_is}\cdot\frac{K_1}{s}\cdot\frac{K_2}{T_1s+1}.$$

2. Se calculează eroarea staţionară pentru intrarea impusă, treaptă unitară:

$$K_p=\lim_{s\to 0} H_d(s)=\infty;$$

$$\varepsilon_{st}=\frac{1}{1+K_p}=0.$$

3. Se calculează funcţia de transfer a sistemului închis:

$$H_0(s)=\frac{H_d(s)}{1+H_d(s)}=\frac{K_1K_2K_R(1+T_is)}{K_1K_2K_R(1+T_is)+T_is^2(T_1s+1)}=$$

$$=\frac{K_1K_2K_R(1+T_is)}{T_iT_1s^3+T_is^2+K_1K_2K_RTs+K_1K_2K_R}.$$

4. Se verifică stabilitatea sistemului calculîndu-se rădăcinile ecuaţiei caracteristice sau folosind metoda Hurwitz

$$a_3=T_iT_1,\qquad a_2=T_i,\qquad a_1=K_1K_2K_RT_i,\qquad a_0=K_1K_2K_R.$$

Condiţia pentru ca sistemul să fie stabil în acest caz se reduce la:

$$K_1^2K_2^2K_R^2T_i^2-K_1^2K_2^2K_R^2T_iT_1>0;$$

$$K_1K_2K_RT_i^2-K_1K_2K_RT_iT_1>0;$$

$$T_i>0;$$

$$K_1^2K_2^2K_R^2T_i(T_i-T_1)>0;$$

$$K_1K_2K_RT_i(T_i-T_1)>0;\ T_i-T_1>0;\ T_1>0.$$

5. Se calculează transformata mărimii de la ieşire:

$$Y(s)=H_0(s)\cdot R(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{K_1K_2K_R(1+T_is)}{T_iT_1s^3+T_i2s^2+K_1K_2K_RT_is+K_1K_2K_R}.$$

6. Se calculează $y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$.

7. Se reprezintă grafic şi se determină performanţele.

3.3. CALCULUL PERFORMANŢELOR ÎN DOMENIUL FRECVENŢELOR

Reprezentarea în frecvenţă a unui sistem se obţine prin aplicarea la intrarea sistemului a unui semnal sinusoidal de frecvenţă $f=\frac{\omega}{2\pi}$, $r=A\sin\omega t$, care în cazul sistemelor liniare determină la ieşirea acestora un răspuns sinusoidal cu amplitudine şi fază diferite faţă de semnalul de la intrare.

Scanned with OKEN Scanner

De exemplu, dacă la intrarea unui element de ordinul întîi se aplică un semnal sinusoidal a cărui transformată Laplace este

$$R(s)=\frac{A}{s^2+\omega^2},$$

rezultă că ieşirea acestui element este dată de relaţia

$$Y(s)=\frac{1}{Ts+1}\cdot\frac{A}{s^2+\omega^2}. \tag{3.65}$$

Prin dezvoltarea în fracţii parţiale se obţine

$$Y(s)=\frac{1/T}{s+1/T}\cdot\frac{A}{s^2+\omega^2}=\frac{C_1}{s+1/T}+\frac{C_2}{s+j\omega}+\frac{C_3}{s-j\omega}. \tag{3.66}$$

Mărimea de ieşire a acestui sistem va fi determinată de ultimii doi termeni din relaţia (3.66), ţinînd seama că pentru $t\to\infty$, primul termen care este o exponenţială tinde spre zero. Astfel, componenta staţionară a ieşirii alcătuită din ultimii doi termeni ai relaţiei (3.66) după evaluarea lui C_2 şi C_3 va fi dată de relaţia

$$Y_{st}(s)=\frac{A}{2j\,(Tj\omega+1)\,(s-j\omega)}+\frac{A}{2j\,(s+j\omega)\,(-Tj\omega+1)}, \tag{3.67}$$

sau dacă notăm prin $A_1=\frac{1}{Tj\omega+1}$ şi $\varphi=\operatorname{arctg}\omega T$ modulul şi argumentul funcţiei de transfer a elementului de ordinul întîi, prin aplicarea transformatei Laplace inverse se obţine componenta staţionară a ieşirii sistemului

$$y_{st}(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y_s(s)]=A\left|\frac{1}{Tj\omega+1}\right|\cdot\left[\frac{e^{j\varphi}e^{j\omega t}-e^{-j\varphi}e^{-j\omega t}}{2j}\right]$$

sau

$$y_{st}(t)=A\cdot\frac{1}{Tj\omega+1}\sin(\omega t+\varphi)\ \text{unde}\ \varphi=\operatorname{arctg}\omega T. \tag{3.68}$$

În mod similar, pentru un sistem de ordinul n a cărui funcţie de transfer este $H(s)$ şi ai cărui poli sînt situaţi în semiplanul stîng, astfel încît să se asigure stabilitatea sistemului (componenta tranzitorie a răspunsului tinde spre zero cînd timpul tinde spre infinit), se obţine răspunsul staţionar al sistemului la intrare sinusoidală sub forma

$$y_{st}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{AH(j\omega)}{2j(s-j\omega)}+\frac{AH(-j\omega)}{-2j\,(s+j\omega)}\right]=A\cdot|H(j\omega)|\cdot\left[\frac{e^{j\varphi}\cdot e^{j\omega t}-e^{-j\varphi}\cdot e^{-j\omega t}}{2j}\right]=$$

$$=A\cdot|H(j\omega)|\cdot\sin(\omega t+\varphi),\ \text{unde}\ \varphi=\arg H(j\omega). \tag{3.69}$$

Rezultă că un sistem liniar stabil are la ieşire un răspuns sinusoidal cînd la intrare se aplică un semnal sinusoidal, acest răspuns fiind caracterizat prin vectorul $H(j\omega)$, al cărui modul este $|H(j\omega)|$ şi al cărui argument este $\varphi(\omega)=\arg H(j\omega)$. Dacă notăm $B=A\cdot|H(j\omega)|$, atunci raportul dintre cele două amplitudini ale semnalului de la ieşire şi intrare este chiar modulul funcţiei de transfer a sistemului pentru $s=j\omega$. Ast-

Scanned with OKEN Scanner

fel, pentru aprecierea răspunsului în frecvență al unui sistem definit prin funcția de transfer $H(s)$ se înlocuiește $s=j\omega$ în expresia funcției de transfer și pentru diverse valori ale pulsației ω se determină modulul și argumentul funcției $H(j\omega)$.

Pentru analiza și sinteza sistemelor automate în domeniul frecvențelor sînt utilizate mai multe caracteristici de frecvență, și anume: *caracteristica amplitudine fază* sau *locul de transfer*, *caracteristicile amplitudine pulsație* și *fază pulsație*, *caracteristica reală de frecvență* și *caracteristica imaginară de frecvență*.

Caracteristicile de frecvență pot fi utilizate atît pentru analiza cît și pentru proiectarea sistemelor automate liniare. Astfel se poate determina gradul de stabilitate al sistemului și se poate calcula cu o anumită aproximație răspunsul sistemului pentru o intrare treaptă fără a rezolva ecuația caracteristică a sistemului.

3.3.1. CARACTERISTICA AMPLITUDINE-FAZĂ

Cea mai importantă caracteristică de frecvență pentru un sistem automat este *caracteristica amplitudine-fază* sau *locul de transfer*. Această caracteristică se trasează pentru sistemul deschis, fiind utilizată pentru aprecierea stabilității sistemului, precum și pentru obținerea celorlalte caracteristici de frecvență. Pentru sistemul deschis prezintă utilitate, de asemenea, caracteristica *amplitudine-pulsație* $A(\omega)$ și caracteristica *fază-pulsație* $\varphi(\omega)$.

O funcție de transfer $H(s)$ poate fi reprezentată în domeniul frecvențelor prin înlocuirea lui s cu $j\omega$ în expresia lui $H(s)$, obținîndu-se o funcție complexă de variabila ω

$$H(j\omega)=|H(j\omega)|\cdot\angle\varphi(\omega)=|H(j\omega)|\cdot e^{j\varphi(\omega)}=A(\omega)e^{j\varphi(\omega}$$

sau

$$H(j\omega)=A(\omega)\cdot[\cos\varphi(\omega)+j\sin\varphi(\omega)]=$$

$$=\mathrm{Re}[H(j\omega)]+j\mathrm{Im}[H(j\omega)] \qquad (3.70)$$

Locul de transfer sau caracteristica amplitudine-fază reprezintă hodograful vectorului $H(j\omega)$ în planul complex pentru valori ale lui ω, $-\infty\leqslant\omega\leqslant\infty$ (fig. 3.23).

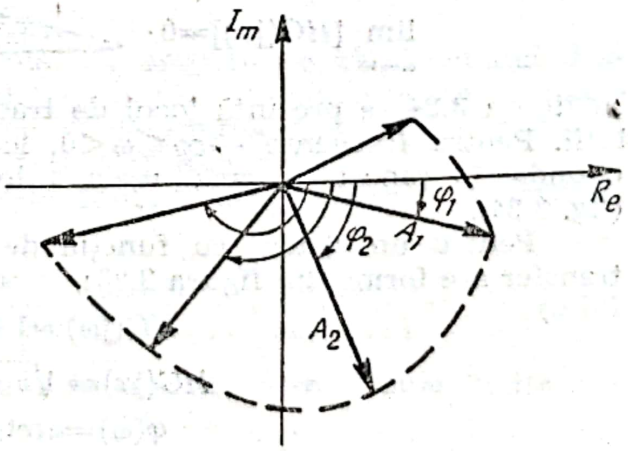


Fig. 3.23. Reprezentarea în planul complex a vectorului $H_d(j\omega)$.

Exemplul 3.8

Pentru a ilustra modul de trasare a locului de transfer considerăm un sistem cu reac-

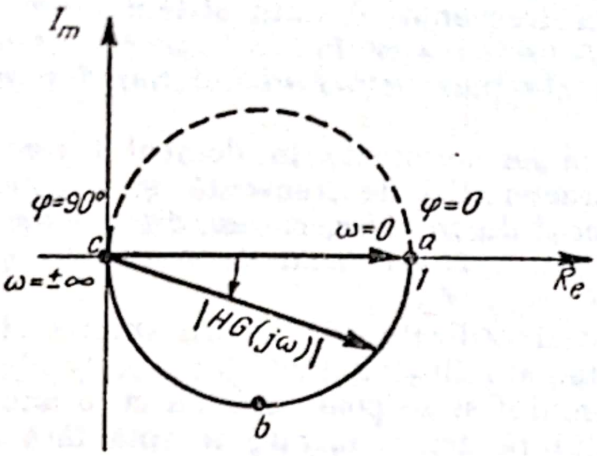


Fig. 3.24. Locul de transfer pentru un sistem de ordinul întîi.

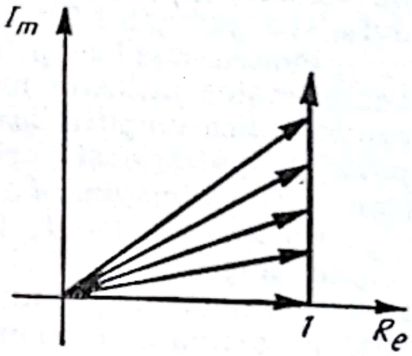


Fig. 3.25. Locul de transfer pentru un sistem de anticipație de ordinul întîi.

ție neunitară $G(s)\neq 1$, a cărui funcție de transfer al căii deschise este dată de relația

$$HG(s)=\frac{1}{Ts+1}.$$

Înlocuim pe $s=j\omega$ și scriem $HG(j\omega)$ în formă polară:

$$HG(j\omega)=\frac{1}{jT\omega+1}=\frac{1}{\sqrt{T^2\cdot\omega^2+1}}\cdot\sphericalangle -\operatorname{arctg}\omega T;$$

$$|HG(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2+1}};$$

$$\varphi(\omega)=-\operatorname{arctg}T\omega.$$

Pentru $\omega=0$, $\omega=1$, și $\omega=\infty$, se obține:

$HG(j0)=1\cdot\sphericalangle 0°$ (punctul a, fig. 3.24);

$HG(j1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sphericalangle -45°$ (punctul b, fig. 3.24);

$\lim\limits_{\omega\to\infty}[HG(j\omega)]=0\cdot\sphericalangle -90°$ (punctul c, fig. 3.24).

În figura 3.24 se prezintă locul de transfer pentru un sistem de ordinul întîi. Pentru frecvențe $-\infty\leqslant\omega<0$, locul de transfer este imaginea în oglindă în raport cu axa reală a locului pentru frecvențe pozitive (fig. 3.24).

Pentru un sistem cu funcția de transfer $HG(s)=1+Ts$, locul de transfer are forma din figura 3.25:

$$HG(j\omega)=1+j\omega T;$$

$$HG(j\omega)=\sqrt{1+\omega^2T^2}\cdot e^{j\varphi(\omega)};$$

$$\varphi(\omega)=\operatorname{arctg}\omega T.$$

Pentru un element (sistem) de ordinul al doilea, forma locului de transfer este dată în figura 3.26. Pentru trasarea acestui loc de transfer

Scanned with OKEN Scanner

se pornește de la expresia vectorului $H(j\omega)$, obținută din funcția de transfer a sistemului de ordinul doi

$$H(j\omega)=\frac{\omega_n^2}{-\omega^2+\omega_n^2+2j\omega\cdot\zeta\cdot\omega_n}$$

sau

$$H(j\omega)=\frac{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+4\zeta^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}-$$

$$-j\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+4\zeta^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}.$$

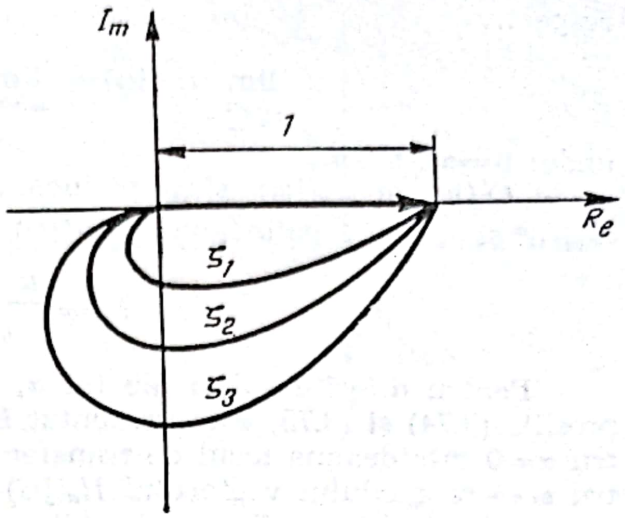


Fig. 3.26. Locul de transfer pentru un sistem de ordinul doi.

Modulul acestui vector este

$$|H(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+4\zeta^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}, \tag{3.71}$$

iar argumentul este

$$\varphi(\omega)=-\text{arctg}\ \frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}. \tag{3.72}$$

În cazul general al unui sistem definit prin funcția de transfer a căii deschise sub forma:

$$H_d(s)=\frac{K}{s^\alpha}\cdot\frac{P_1(s)}{P_2(s)}\ ;\ (G(s)=1),$$

unde prin K s-a notat factorul total de amplificare al sistemului deschis iar polinoamele $P_1(s)$ și $P_2(s)$ au ultimul termen egal cu unitatea, pentru trasarea locului de transfer se determină mai întîi asimptotele acestuia la frecvențe care tind spre zero și spre infinit.

Înlocuind pe $s=j\omega$ în expresia funcției de transfer a sistemului, se obține

$$H_d(j\omega)=\frac{K}{(j\omega)^\alpha}\frac{P_1(j\omega)}{P_2(j\omega)}=\frac{K}{(j\omega)^\alpha}\frac{b'_m(j\omega)^m+\cdots+b'_1(j\omega)+1}{a'_n(j\omega)^n+\cdots+a'_1(j\omega)+1}, \tag{3.73}$$

Pentru a calcula asimptotele locului de transfer vom calcula limita expresiei (3.73) pentru $\omega\to 0$ și pentru $\omega\to\infty$

$$\lim_{\omega\to 0} H_d(j\omega)=\lim_{\omega\to 0}\frac{K}{(j\omega)^\alpha}\frac{P_1(j\omega)}{P_2(j\omega)}, \tag{3.74}$$

Scanned with OKEN Scanner

respectiv

$$\lim_{\omega\to\infty} H_d(j\omega) = \lim_{\omega\to\infty} \frac{K'}{(j\omega)^{\theta}} \frac{Q_1(j\omega)}{Q_2(j\omega)}. \qquad (3.75)$$

unde: $\theta=\alpha+n-m$;

$Q_1(j\omega)$ și $Q_2(j\omega)$ sînt polinoamele obținute prin împărțirea cu $b'_m(j\omega)^m$ și $a'_n(j\omega)^n$ a polinoamelor $P_1(j\omega)$ și $P_2(j\omega)$

$$K' = \frac{K \cdot b'_m}{a'_n}.$$

Pentru diferite valori ale lui α, rezultatul trecerii la limită în expresiile (3.74) și (3.75) este prezentat în tabelul 3.3. De observat că pentru $\alpha=0$ întotdeauna locul de transfer pornește de pe axa reală, iar pentru $\omega\to\infty$ modulul vectorului $H_d(j\omega)$ tinde spre zero dat fiind că sistemul are $m<n$ (sistem fizic realizabil).

Forma locului de transfer la limită se prezintă și în figurile 3.27, *a* și *b*.

De observat faptul că în funcție de valoarea lui θ se poate determina numărul de intersecții ale locului de transfer cu axele planului complex. Pentru $\alpha=0$, intersecția axei reale negative are loc numai dacă diferența $n-m>2$.

Din cele expuse rezultă că atunci cînd ω variază de la zero la infinit, argumentul vectorului complex $H_d(j\omega)$ se modifică cu valoarea

$$-\frac{\pi}{2}(\alpha+n-m)-\left(-\frac{\pi}{2}\alpha\right)=-\frac{\pi}{2}(n-m).$$

Tabelul 3.3

Expresiile vectorului $H_d(j\omega)$ pentru $\omega\to 0$ și $\omega\to\infty$

Tipul sistemului	$\lim_{\omega\to 0} \frac{K}{(j\omega)^{\alpha}} \frac{P_1(j\omega)}{P_2(j\omega)}$	$\lim_{\omega\to\infty} \frac{K'}{(j\omega)^{\theta}} \frac{Q_1(j\omega)}{Q_2(j\omega)}$
Tip zero $\alpha=0$ $\theta=0$	$K.\angle 0°$	$K'.\angle 0°$
Tip 1 $\alpha=1$ $\theta=1$	$\infty.\angle -90°$; $(-j\infty)$	$0.\angle -90°$
Tip 2 $\alpha=2$ $\theta=2$	$\infty.\angle -180°$; $(-\infty)$	$0.\angle -180°$
Tip 3 $\alpha=3$ $\theta=3$	$\infty.\angle -270°$; $(+j\infty)$	$0.\angle -270°$

Scanned with OKEN Scanner

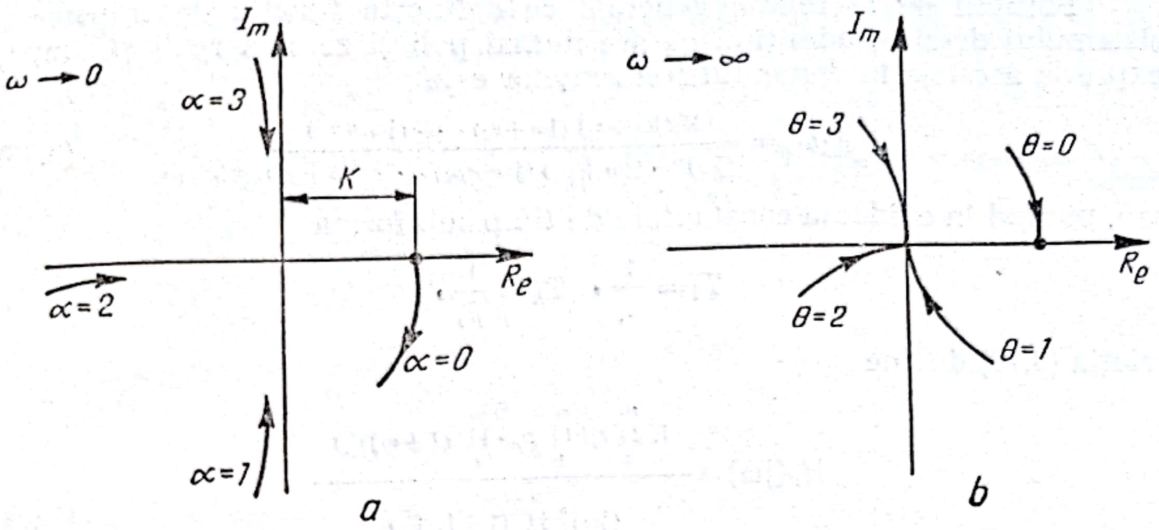


Fig. 3.27. Asimptotele locului de transfer:
a — pentru frecvenţe joase; *b* — pentru frecvenţe înalte.

Cunoaşterea locului de transfer al sistemului deschis permite aprecierea performanţelor sistemului în special a stabilităţii sistemului şi a preciziei acestuia în cazul în care este dat tipul semnalului de intrare în sistem.

Stabilitatea sistemului se poate aprecia după forma locului de transfer, respectiv după poziţia relativă a acestuia faţă de punctul de coordonate (—1, j0) considerat punct critic (v. paragr. 3.3.4).

3.3.2. CARACTERISTICI DE FRECVENŢĂ ÎN REPREZENTARE LOGARITMICĂ

Pentru analiza şi proiectarea sistemelor deschise sînt utilizate frecvent caracteristicile amplitudine-pulsaţie şi fază-pulsaţie în reprezentare logaritmică. Aceste caracteristici sînt cunoscute şi sub denumirea de *caracteristici Bodé*. Cu ajutorul acestor caracteristici se evidenţiază uşor stabilitatea relativă a sistemului.

Reprezentarea logaritmică simplifică construcţia acestor caracteristici de frecvenţă; scala logaritmică pentru axa ω (abscisa) asigură analiza pe un domeniu mai mare de frecvenţe decît scala liniară.

Amplitudinea unei funcţii de transfer $|H_d(j\omega)|$ se exprimă în decibeli

$$A(\omega)=20\lg|H_d(j\omega|\ \ [\mathrm{dB}].$$

Caracteristica amplitudine-pulsaţie reprezintă dependenţa amplitudinii, măsurată în decibeli, de logaritmul frecvenţei, iar *caracteristica fază-pulsaţie* reprezintă dependenţa între fază şi logaritmul frecvenţei. Sub această formă, caracteristicile de frecvenţă poartă denumirea de *reprezentare Bodé*.

Scanned with OKEN Scanner

Pornind de la relaţia generală ce defineşte funcţia de transfer a sistemului deschis, admiţînd că are numai poli şi zerouri reali şi simpli, expresia acesteia în domeniul frecvenţelor este

$$H_d(j\omega)=\frac{K(j\omega+z_1)(j\omega+z_2)\cdot\cdot\cdot(j\omega+z_m)}{(j\omega)^{\alpha}\cdot(j\omega+p_1)(j\omega+p_2)\cdot\cdot\cdot(j\omega+p_n)} \tag{3.76}$$

sau, punînd în evidenţă constantele de timp sub forma

$$T_i=\frac{1}{z_i},\quad T_k=\frac{1}{p_k},$$

relaţia (3.76) devine

$$H_d(j\omega)=\frac{K\prod_1^m z_i/\prod_1^n p_k\cdot\prod_1^m(1+\omega jT_i)}{(j\omega)^{\alpha}\prod_1^n(1+j\omega T_k)}$$

sau

$$H_d(j\omega)=\frac{K_b\prod_1^m(1+j\omega T_i)}{(j\omega)\prod_1^n(1+j\omega T_k)}=A(\omega)\,e^{j\varphi(\omega)}, \tag{3.77}$$

unde

$$K_b=\frac{K\prod_1^m z_i}{\prod_1^n p_i}.$$

Pentru reprezentarea caracteristicilor $A(\omega)$ şi $\varphi(\omega)$ din (3.77) obţinem prin logaritmare expresiile:

$$A(\omega)=20\lg K_b+\sum_1^m 20\lg|1+j\omega T_i|-$$

$$-\sum_1^n 20\lg|1+j\omega T_k|-20\alpha\lg\omega\ \ [\mathrm{dB}]; \tag{3.78}$$

$$\varphi(\omega)=-\alpha\frac{\pi}{2}+\sum_1^m\arg(1+j\omega T_i)-\sum_1^n\arg(1+j\omega T_k). \tag{3.79}$$

Prin logaritmare, produsul termenilor liniari de la numitorul şi numărătorul funcţiei de transfer se modifică în sume conform cu relaţiile (3.78) şi (3.79), aceasta avînd în vedere că fiecare component al expresiei (3.77) poate fi scris sub formă de modul şi argument $1+j\omega T_i=A_i e^{j\varphi_i}$.

Ţinînd seama de relaţiile (3.78) şi (3.79), caracteristicile $A(\omega)$ şi $\varphi(\omega)$ se pot obţine prin însumarea unor caracteristici de frecvenţă a unor elemente cu funcţii de transfer de forma: K_b, $\frac{1}{(j\omega)}$, $1+j\omega T$, $\frac{1}{1+j\omega T}$:

Scanned with OKEN Scanner

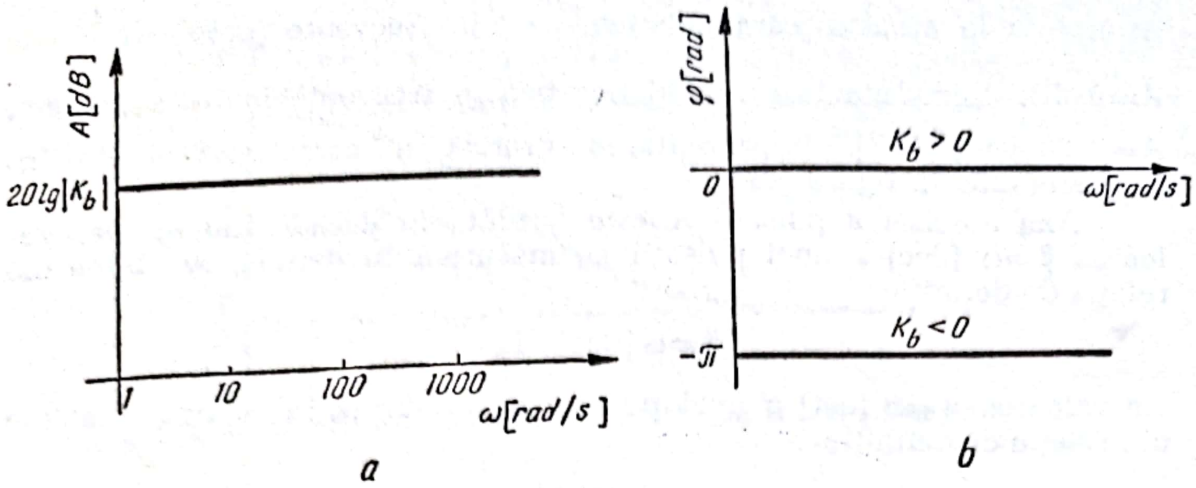


Fig. 3.28. Caracteristicile de frecvență în reprezentarea logaritmică pentru un element proporțional:
a — caracteristica $A(\omega)$; *b* — caracteristica $\varphi(\omega)$.

Pentru trasarea acestor caracteristici elementare, vom aproxima răspunsul lor în frecvență prin asimptotele obținute la $\omega \to 0$ și $\omega \to \infty$.

Elementul proporțional definit prin constanta K_b are amplitudinea egală cu K_b și argumentul zero. În figura 3.28 se prezintă caracteristicile de frecvență pentru un asemenea element.

Caracteristicile de frecvență pentru un pol în origine de ordinul α, deci pentru un integrator de ordinul α, $A(\omega)$ și $\varphi(\omega)$ sînt trasate în figura 3.29:

$$A = 20 \lg \left| \frac{1}{(j\omega)^{\alpha}} \right| \text{[dB]} \text{ și } \varphi(\omega) = -\alpha \frac{\pi}{2}.$$

Pentru un sistem avînd funcția de transfer $H(j\omega) = \frac{1}{Tj\omega + 1}$, caracteristica amplitudine-pulsație se obține prin reprezentarea în coordonate logaritmice a relației

$$A(\omega) = 20 \lg 1 - 20 \lg \sqrt{1 + T^2\omega^2} = -20 \lg \sqrt{1 + T^2\omega^2} \text{ [dB]}. \quad (3.80)$$

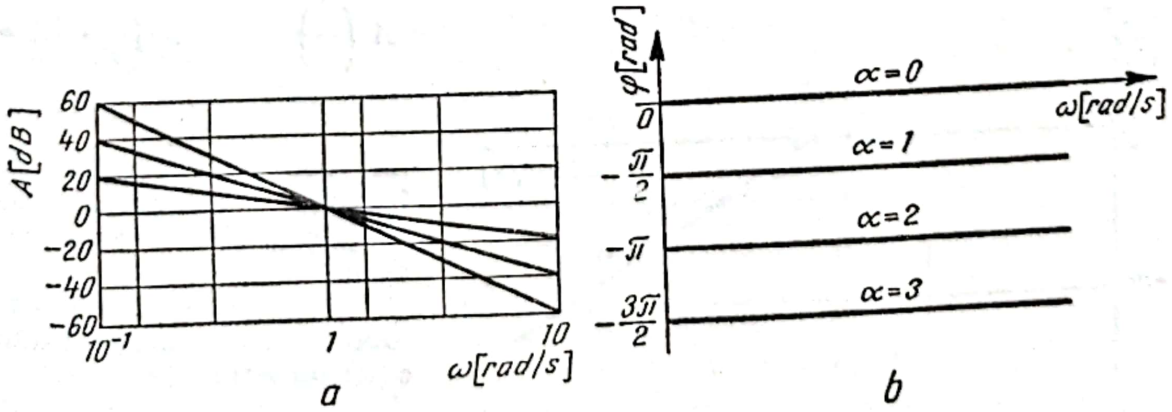


Fig. 3.29. Caracteristicile de frecvență pentru un element integrator:
a — caracteristica amplitudine-pulsație; *b* — caracteristica fază-pulsație.

Scanned with OKEN Scanner

Asimptota la această caracteristică pentru frecvențe joase $\omega \ll \frac{1}{T}$ este $A=0$ dB. Asimptota la caracteristica pentru frecvențe înalte $\omega \gg \frac{1}{T}$ este $A=-20 \lg \omega T$ [dB]. Reprezentarea grafică a caracteristicei $A=f(\omega)$ [dB] este dată în figura 3.30.

Axa abscisei a pulsațiilor este gradată în decade sau octave. Valoarea $\beta=\omega$ [dec] a unei pulsații ω, măsurată în decade, se obține din relația de definiție

$$\beta=\omega \text{ [dec]}=\lg \omega,$$

iar valoarea $\mu=\omega$ [oct] a unei pulsații ω, măsurată în octave, se obține din relația de definiție

$$\mu=\omega \text{ [oct]}=\log_2 \omega.$$

Pentru o aceeași pulsație se poate scrie

$$\omega=10^{\beta}=2^{\mu}$$

sau

$$\mu=\frac{\beta}{0{,}30103} \cong 3{,}32\ \beta.$$

Deci numărul de octave în care se măsoară o pulsație fiind de 3,32 ori mai mare decît numărul de decade, o decadă are 3,32 octave. Pentru simplitatea reprezentării vom grada axa abscisei în decade.

Ținînd seama de această gradare a abscisei rezultă că asimptota caracteristicii $A(\omega)$ pentru frecvențe înalte reprezintă o dreaptă cu panta de —20 dB/dec

$$A(\omega)=-20 \lg (\omega T)=-20 \lg \omega-20 \lg T=$$
$$=-20(\omega)_{\text{dec}}-T_{\text{dB}} \text{ [dB]}.$$

Intersecția celor două asimptote ce reprezintă două trepte, abscisa ($A(\omega)=0$ dB) și dreapta cu pantă —20 dB/dec, are loc la pulsația $\omega=\omega_f=\frac{1}{T}$ denumită *pulsație de frîngere:*

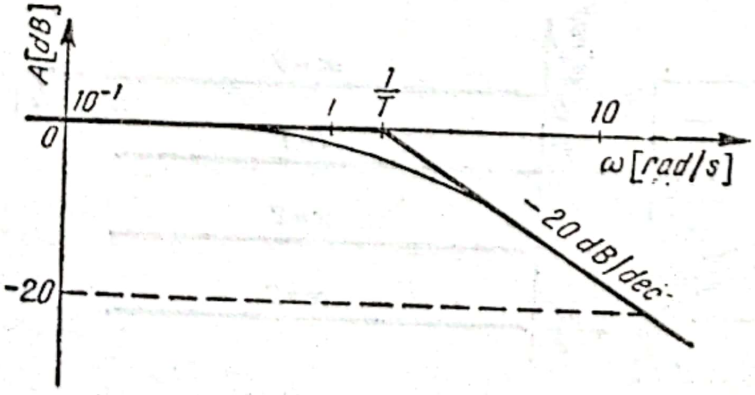


Fig. 3.30. Caracteristica amplitudine-pulsație pentru un element de ordinul întîi.

$$A\left(\frac{1}{T}\right)=-20 \lg \left(\frac{1}{T} \cdot T\right)=$$
$$=0 \text{ dB}.$$

La această pulsație de frîngere are loc schimbarea de pantă a asimptotelor.

Pentru a trasa caracteristica fază-pulsație $\varphi(\omega)$ putem scrie

$$\arg \frac{1}{1+j\omega T}=-\operatorname{arctg} \omega T,$$

Scanned with OKEN Scanner

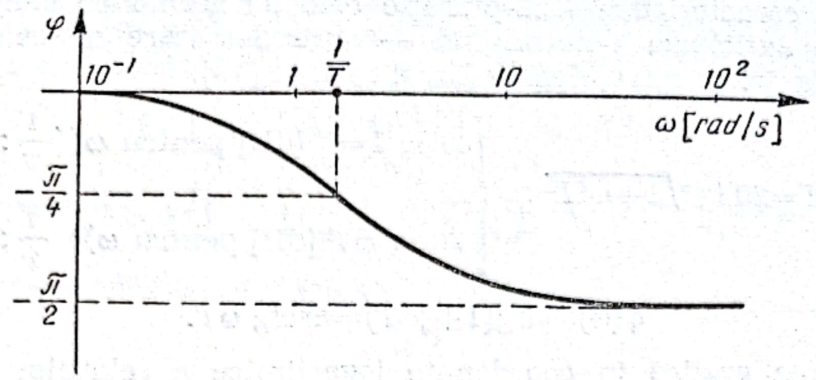


Fig. 3.31. Caracteristica fază-pulsație pentru un sistem de ordinul întîi.

iar asimptotele acestei caracteristici sînt:

$$\arg\left[\frac{1}{1+j\omega T}\right]=-\operatorname{arctg}\omega T\Big|_{\omega\ll\frac{1}{T}}=0°;$$

$$\arg\left[\frac{1}{1+j\omega T}\right]=-\operatorname{arctg}\omega T\Big|_{\omega\gg\frac{1}{T}}=-90°.$$

Caracteristica fază-pulsație tinde spre zero cînd $\omega T\to 0$ și tinde spre $-90°$ cînd $\omega T\to\infty$, așa cum se arată în figura 3.31.

Pentru $\omega=\frac{1}{T}$, $\arg\frac{1}{1+j\omega T}=-45°$ și caracteristica se poate aproxima prin asimptote ducînd o dreaptă cu pantă negativă între pulsațiile $\omega=\frac{1}{5T}$ și $\omega=5\,T$. Eroarea introdusă prin aproximarea caracteristicilor cu asimptotele lor se poate calcula $\varepsilon=20\lg\left|\frac{1}{1+j\omega T}\right|-20\lg\omega T\simeq$ $\simeq 3$ dB pentru $\omega=\omega_f$. În tabelul 3.4 se dau valorile erorii pentru diferite frecvențe. Cea mai mare valoare a erorii făcute prin adoptarea caracteristicii asimptotice în locul celei exacte are loc la pulsația de frîngere și este egală cu -3 dB. Într-o manieră similară se obțin caracteristicile $A(\omega)$ și $\varphi(\omega)$ pentru un element de anticipație de ordinul întîi cu funcția de transfer de forma $H(j\omega)=1+j\omega T$. Pentru elementele de anticipație de ordinul întîi, a doua asimptotă are o pantă pozitivă, de $+20$ dB/dec, caracteristica amplitudine-pulsație fiind astfel simetrică — în raport cu axa absciselor — cu cea a elementelor de întîrziere de or-

Tabelul 3.4

Valorile erorii pentru diferite frecvențe

ω	$\frac{1}{5T}$	$\frac{1}{2T}$	$\frac{1}{T}$	$\frac{2}{T}$	$\frac{3}{T}$
$\varepsilon[dB]$	−0,17	0,96	−3	0,96	−0,11
ε	−11,30	−0,8°	0	0,8°	11,3°

Scanned with OKEN Scanner

dinul întîi; caracteristica fază-pulsație este de asemenea simetrică, elementele de anticipare determinînd — spre deosebire de cele de întîrziere — defazări pozitive, deci defazări înainte [13]:

$$A=20\lg\sqrt{1+\omega^2T^2}\cong\begin{cases}20\lg 1=0\ [\mathrm{dB}]\ \text{pentru}\ \omega\ll\dfrac{1}{T};\\ 20\lg\omega T\ [\mathrm{dB}]\ \text{pentru}\ \omega\gg\dfrac{1}{T};\end{cases}\qquad(3.81)$$

$$\varphi(\omega)=\arg(1+j\omega T)=\operatorname{arctg}\omega T.$$

Reprezentarea grafică în coordonate logaritmice a relațiilor (3.82) este dată în figurile 3.2, *a* și *b*.

Eroarea făcută prin aproximarea caracteristicii cu asimptotele care se intersectează la pulsația de frîngere se calculează în mod similar ca pentru elementele de întîrziere. Această eroare este maximă pentru pulsația de frîngere, $\omega_f=\frac{1}{T}$.

Pentru elementele de ordinul întîi de anticipație sau de întîrziere, pulsațiile de frîngere sînt determinate de modulele zerourilor și polilor funcției de transfer a acestora.

Pentru un element de ordinul doi a cărei funcție de transfer conține doi poli complex conjugați ($0<\zeta<1$), caracteristicile de frecvență $A(\omega)$ și $\varphi(\omega)$ se obțin în mod similar prin aproximarea acestora cu asimptotele lor

$$A=20\lg\left|\frac{1}{1+j2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right|=-20\lg\sqrt{\left[\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+4\zeta^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\ [\mathrm{dB}];\qquad(3.82)$$

$$\varphi(\omega)=-\operatorname{arctg}\frac{2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}.\qquad(3.83)$$

Pentru frecvențe foarte joase, asimptota la caracteristica $A(\omega)$ este axa absciselor, iar pentru frecvențe mari ($\omega\gg\omega_n$) și pentru $\zeta<1$, asimptota este dată de relația

$$A(\omega)\Big|_{\omega\gg\omega n}\cong-40\lg\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)[\mathrm{dB}].\qquad(3.84)$$

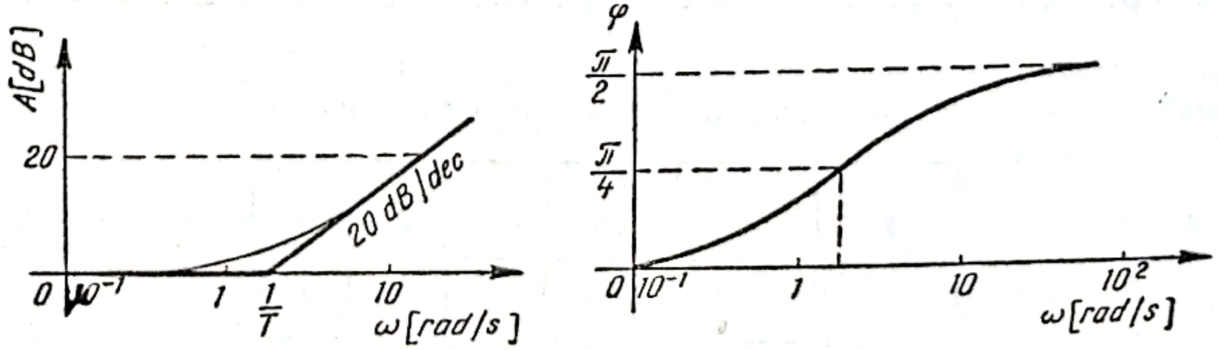


Fig. 3.32. Caracteristicile de frecvență pentru un sistem de anticipație de ordinul întîi.

Scanned with OKEN Scanner

Intersecţia celor două asimptote are loc la pulsaţia de frîngere $\omega_f=\omega_n$. Eroarea făcută prin adaptarea caracteristicii asimptotice în locul caracteristicii exacte în acest caz depinde de valoarea lui ζ:

$$\varepsilon=[A(\omega)]_{exact}-[A(\omega)]_{aproximativ}\ \text{[dB]};$$

$$\varepsilon=-20\ \lg\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+4\zeta^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}+40\ \lg\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\text{[dB]}.$$

Pentru $\omega=\omega_n$, această eroare are expresia

$$\varepsilon=-20\ \lg 2\zeta\ \text{[dB]}.$$

Reprezentarea grafică a celor două caracteristici pentru diverse valori ale lui ζ este dată în figura 3.33.

Argumentul unui element de ordinul doi variază între $\varphi=0°$, pentru frecvenţe foarte joase, şi $\varphi=180°$, pentru frecvenţe foarte înalte.

Caracteristicile de frecvenţă pentru un element de anticipaţie de ordinul doi se trasează în mod similar, fiind simetrice faţă de caracteristicile unui element de întîrziere de ordinul doi. Pulsaţiile de frîngere pentru aceste elemente sînt determinate de pulsaţiile naturale ω_n (proprii), iar forma caracteristicii exacte este influenţată de valoarea factorului de amortizare ζ (fig. 3.33).

Caracteristica totală a unui sistem ce conţine m-zerouri şi n-poli se obţine prin însumarea contribuţiei fiecărui pol şi zero atît asupra amplitudinii cît şi fazei, ţinînd seama de relaţiile (3.78) şi (3.79).

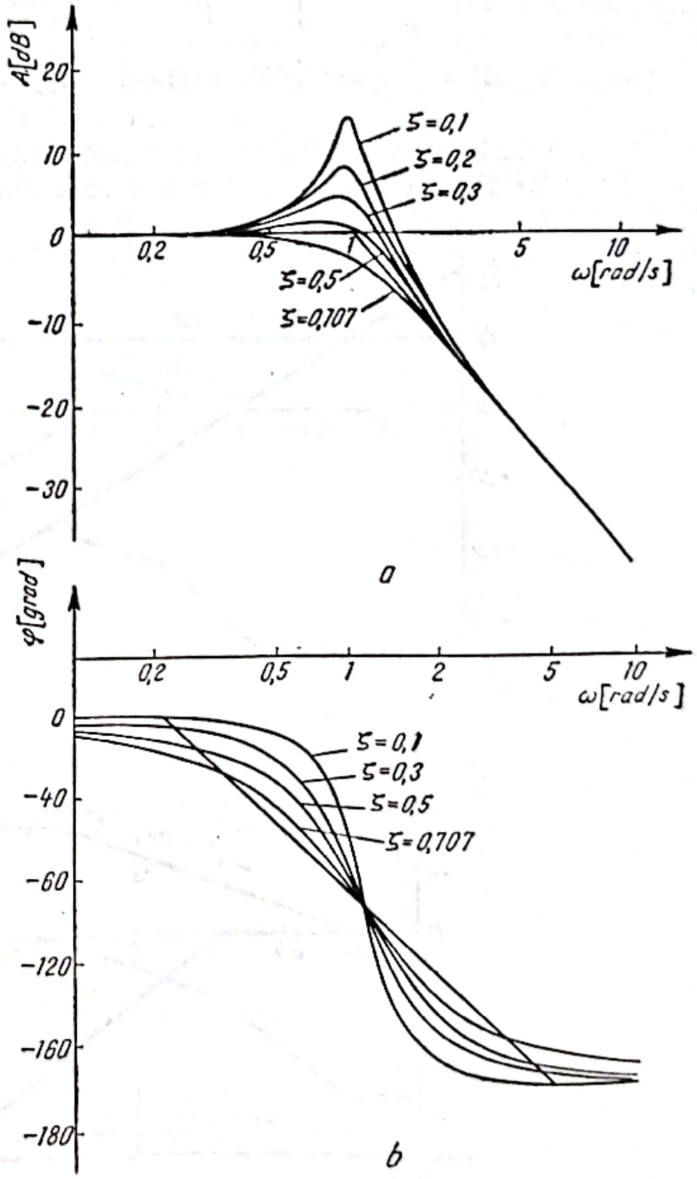


Fig. 3.33. Caracteristicile de frecvenţă pentru un sistem de ordinul doi pentru diverse valori ale factorului ζ:
a — caracteristica A (ω); *b* — caracteristica $(\varphi)\omega$.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 3.9

Pentru a ilustra modul de trasare a caracteristicilor $A(\omega)$ și $\varphi(\omega)$ să considerăm funcţia de transfer a sistemului deschis sub forma

$$HG(j\,\omega)=\frac{10\,(1+j\omega)}{(j\omega)^2[1+j\omega/4-(\omega/4)^2]}.$$

Pentru $A(\omega)$ și $\varphi(\omega)$ rezultă:

$$20\lg|HG(j\,\omega)|=A(\omega)=20\lg 10+20\lg|1+j\omega|-$$

$$-20\lg\left|\frac{1}{(j\omega)^2}\right|-20\lg\left|\frac{1}{1+j\,\omega/4-\left(\frac{\omega}{4}\right)^2}\right|;$$

$$\arg HG(j\,\omega)=\varphi(\omega)=\arg(1+j\,\omega)+\arg(1/j\,\omega)^2-\arg\left(\frac{1}{1+j\omega/4-(\omega/4)^2}\right).$$

Caracteristicile pentru fiecare element component sînt trasate în figura 3.34, iar în figura 3.35 sînt trasate caracteristicile totale ale sistemului.

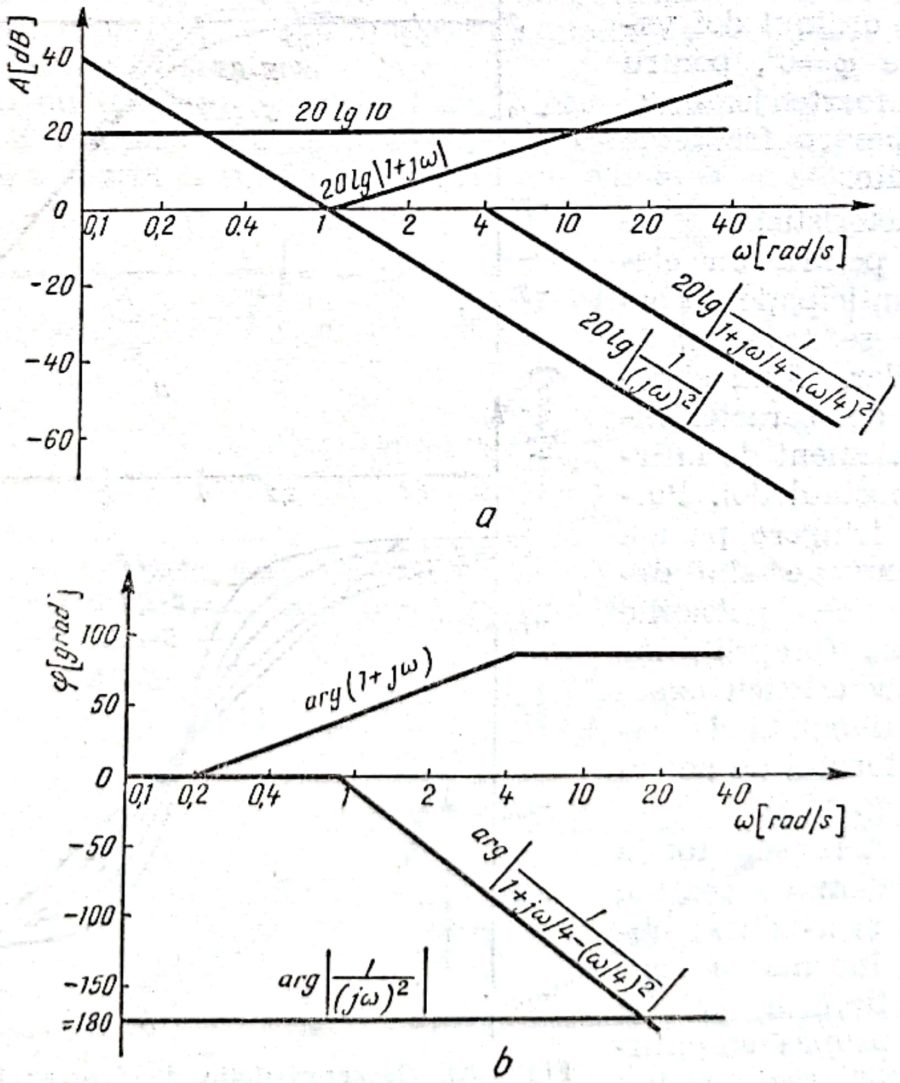


Fig. 3.34. Caracteristici de frecvenţă pentru sistemul considerat în exemplul 3.9:
a — caracteristicile $A(\omega)$; *b* — caracteristicile $\varphi(\omega)$.

Scanned with OKEN Scanner

Pulsațiile de frîngere pentru acest sistem sînt: $\omega_{f1}=1\ s^{-1}$, $\omega_{f2}=4\ s^{-1}$, sistemul conținînd un element de anticipație de ordinul întîi cu pulsația de frîngere ω_{f1}, un element de ordinul doi cu pulsația ω_{f2}, un element dublu integrator ($\alpha=2$) și un element proporțional.

Prin însumarea grafică a caracteristicilor de frecvență a fiecărui element component din figurile 3.34, *a* și 3.34, *b* se obțin caracteristicile de frecvență generale ale sistemului reprezentat în figurile 3.35, *a* și *b*.

Pentru cazul în care sînt cunoscute valorile pulsațiilor de frîngere determinate de polii și zerourile funcției de transfer se poate trasa caracteristica $A(\omega)$ relativ simplu, ținînd seama de asimptotele cu care se pot aproxima caracteristicile fiecărui element de întîrziere și anticipație. Prezența unui număr α de poli în origine determină panta inițială pentru frecvențe foarte joase ca fiind -20α [dB/dec], lucru care rezultă din relația (3.78), care pentru frecvențe joase se reduce la

$$A=20\lg K_b-20\alpha\lg\omega\ \ [\text{dB}].$$

Această pantă se modifică începînd cu prima pulsație de frîngere, adăugîndu-se sau scăzîndu-se 20 (dB/dec) după cum pulsația de frîngere este determinată de un zero sau de un pol al funcției de transfer. În cazul pulsației unui termen pătratic (polii sau zerourile complex conjugate),

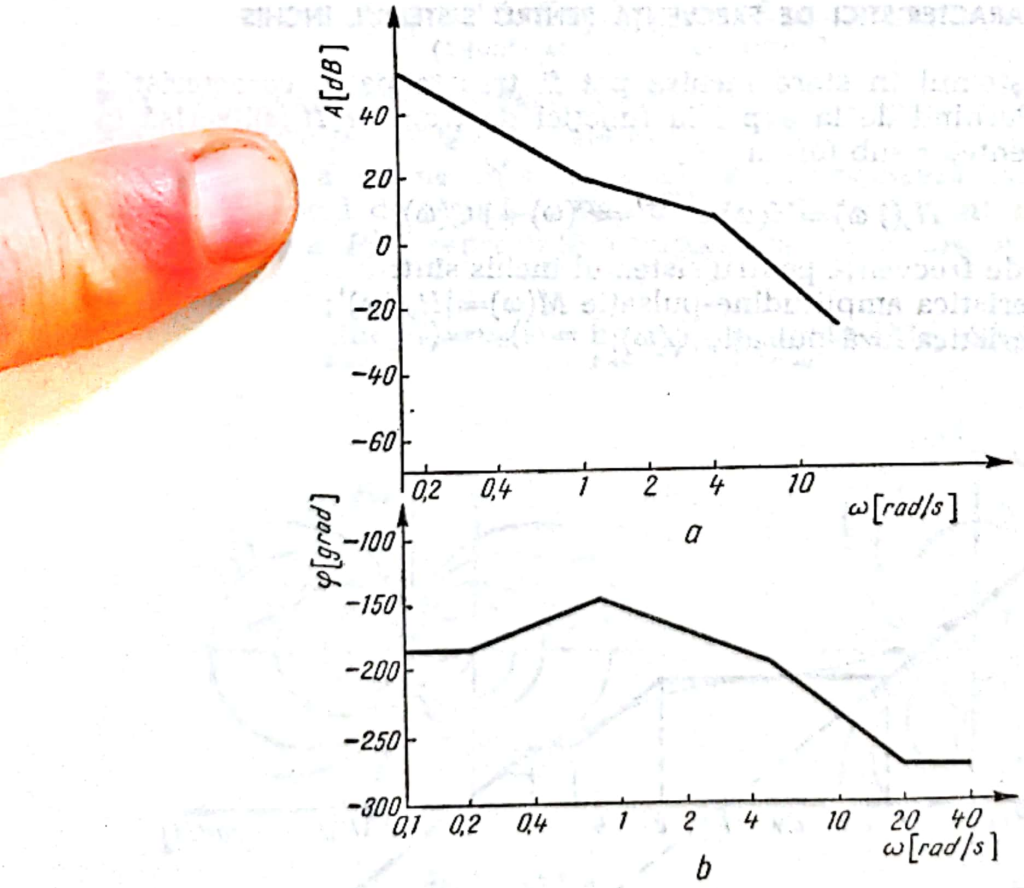


Fig. 3.35. Caracteristica totală a sistemului considerat în exemplul 3.9:
a — caracteristica $A(\omega)$; *b* — caracteristica $\varphi(\omega)$.

Scanned with OKEN Scanner

panta, în funcţia de transfer, se modifică cu ± 40 dB/dec, după cum pulsaţia de frîngere este determinată de polii sau de zerourile complex conjugate.

Exemplul 3.10

Pentru a ilustra modul de trasare direct al caracteristicii $A(\omega)$ considerăm funcţia

$$HG(j\,\omega)=\frac{1}{j\omega}\cdot\frac{(1+0{,}2j\omega)\,(1+8j\omega)}{(1+0{,}5j\omega)\,(1+0{,}1j\omega)}\cdot$$

Pulsaţiile de frîngere sînt: $\omega_{f1}=\frac{1}{8}$; $\omega_{f2}=\frac{1}{0{,}5}$; $\omega_{f3}=\frac{1}{0{,}2}$; $\omega_{f4}=\frac{1}{0{,}1}$.

În figura 3.36 se prezintă caracteristica $A(\omega)$, trasată direct prin aproximarea sa cu asimptotele elementelor de anticipaţie şi de întîrziere de ordinul întîi.

În cazul sistemelor de fază minimă, sisteme la care toţi polii şi toate zerourile sînt în semiplanul stîng şi nu conţin elemente cu timp mort, este posibilă obţinerea uneia dintre cele două caracteristici logaritmice dacă este cunoscută cealaltă.

3.3.3. CARACTERISTICI DE FRECVENŢĂ PENTRU SISTEMUL ÎNCHIS

Pentru sistemul în stare închisă pot fi trasate patru caracteristici de frecvenţă. Pornind de la expresia funcţiei de transfer $H_0(s)$, scrisă în domeniul frecvenţelor sub forma

$$H_0(j\,\omega)=M(\omega)\,e^{j\Psi(\omega)}=P(\omega)+j\,Q(\omega),$$

caracteristicile de frecvenţă pentru sistemul închis sînt:

— caracteristica amplitudine-pulsaţie $M(\omega)=|H_0(j\omega)|$;

— caracteristica fază-pulsaţie $\psi(\omega)$;

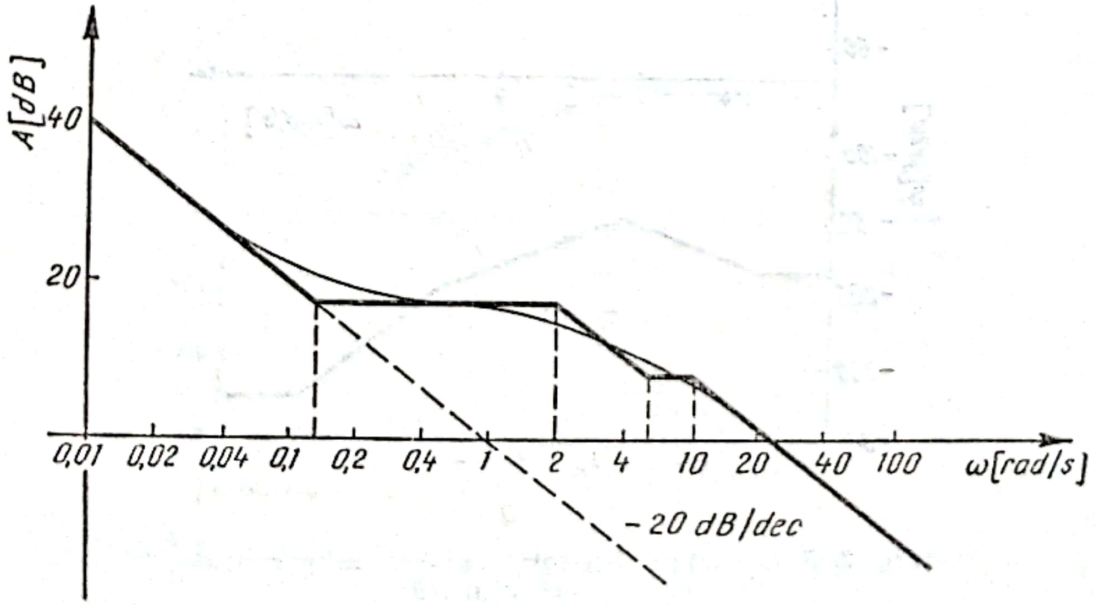


Fig. 3.36. Caracteristica $A(\omega)$ obţinută direct din funcţia de transfer a sistemului.

Scanned with OKEN Scanner

— caracteristica reală de frecvenţă $P(\omega)\ldots$;

— caracteristica imaginară de frecvenţă $Q(\omega)$.

Aceste caracteristici exprimă — pentru sistemul în stare închisă — dependenţele de pulsaţie ale modulului, argumentului, părţii reale şi părţii imaginare ale vectorului complex $H_0(j\omega)$. Determinarea acestor caracteristici are la bază nomograme diferite, sub forma unor familii de cercuri [13, 17, 19]. Intersecţia locului de transfer cu aceste familii de cercuri permite calculul acestor caracteristici [13].

Pornind de la expresia funcţiei de transfer a sistemului în stare închisă şi notînd partea reală şi imaginară a vectorului $H_d(j\omega)$ cu $u(\omega)\equiv u$ şi $v(\omega)\equiv v$, se obţine

$$H_0(j\omega)=\frac{H_d(j\omega)}{1+H_d(j\omega)}=\frac{u+jv}{1+u+jv}=P(\omega)+j\,Q(\omega). \tag{3.85}$$

Din relaţia (3.85), după efectuarea unor calcule simple, se obţine

$$\frac{u^2+v^2+u}{(1+u)^2+v^2}+j\,\frac{v}{(1+u)^2+v^2}=P(\omega)+j\,Q(\omega)$$

şi prin identificarea termenilor reali şi imaginari din cei doi membri, rezultă:

$$P=\frac{u^2+u+v^2}{(1+u)^2+v^2};\quad Q=\frac{v}{(1+u)^2+v^2}. \tag{3.86}$$

Reprezentarea grafică a relaţiilor (3.86) pentru diferite valori constante ale lui P şi respectiv Q este dată în figura 3.37.

Pentru a obţine $P(\omega)$ şi $Q(\omega)$ se intersectează aceste familii de cercuri cu locul de transfer. De observat că pentru intrare treaptă unitară, valoarea $P(o)$ reprezintă componenta staţionară a mărimii de la ieşire

$$\lim_{t\to\infty} y(t)=y_{st}(t)=\lim_{s\to 0} sY(s)=\lim_{s\to 0}[s\cdot H_0(s)\cdot R(s)]$$

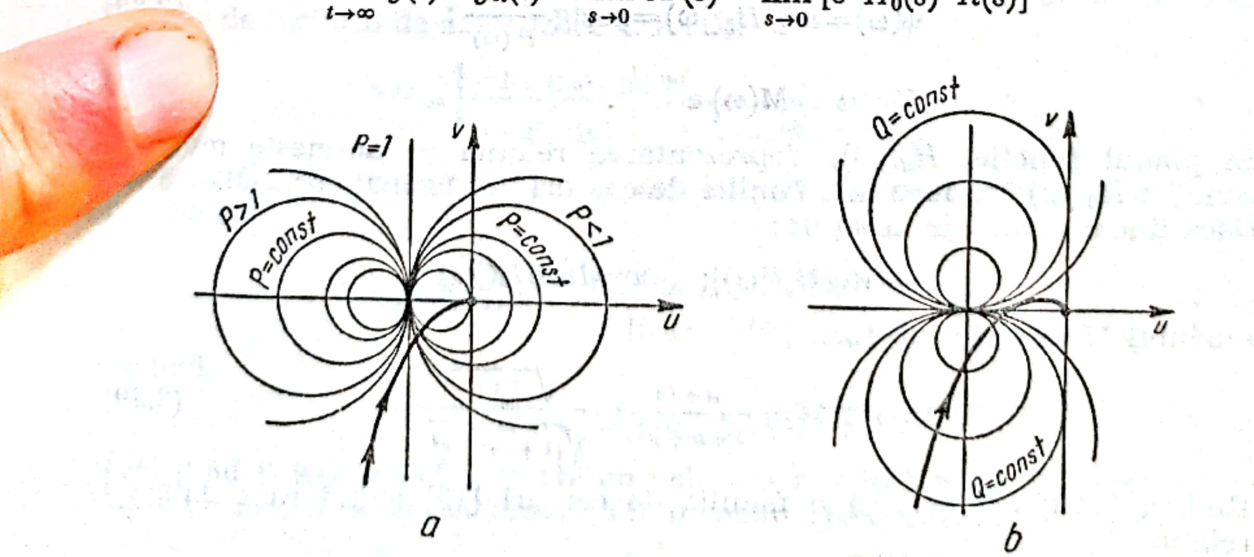


Fig. 3.37. Diagrame pentru calculul caracteristicilor $P(\omega)$ şi $Q(\omega)$:
a — pentru calculul caracteristicii $P(\omega)$; *b* — pentru calculul caracteristicii $Q(\omega)$.

Scanned with OKEN Scanner

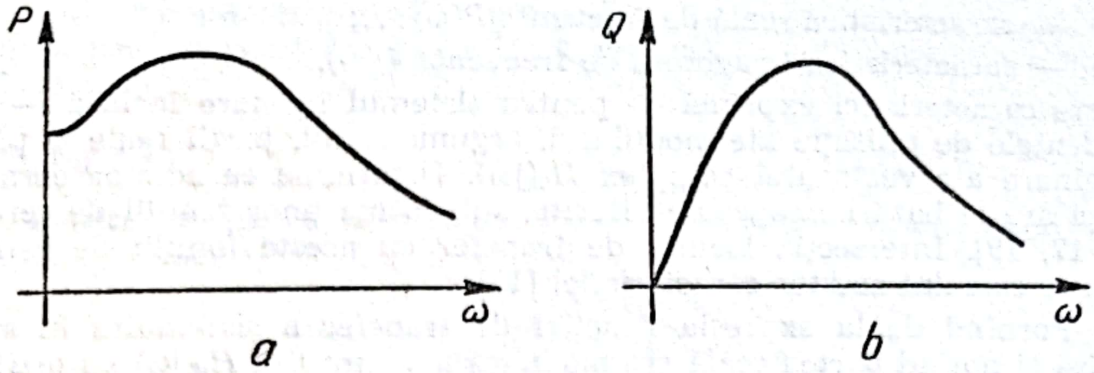


Fig. 3.38. Caracteristicile reală şi imaginară de frecvenţă:
a — caracteristica $P(\omega)$; *b* — caracteristica $Q(\omega)$.

sau:

$$y_{st}=\lim_{s\to 0}\left[s\cdot H_0(s)\cdot\frac{1}{s}\right]=\lim_{s\to 0}H_0(s);$$

$$y_{st}(t)=\lim_{\omega\to 0}[P(\omega)+jQ(\omega)]=P(o), \qquad (3.87)$$

deoarece $Q(o)=0$.
Forma caracteristicilor reală şi imaginară de frecvenţă este prezentată în figurile 3.38, *a* şi *b*.

Aceste caracteristici sînt utilizate pentru calculul aproximativ al răspunsului tranzitoriu al unui sistem automat la intrare treaptă unitară [13]. Pentru sistemul închis se definesc, de asemenea, caracteristicile $M(\omega)$ şi $\psi(\omega)$, care reprezintă modulul şi respectiv argumentul vectorului $H_0(j\omega)$:

$$M(\omega)=|H_0(j\omega)|=\left|\frac{H_d(j\omega)}{1+H_d(j\omega)}\right|;$$

$$\psi(\omega)=\arg H_0(j\omega)=\operatorname{arctg}\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}; \qquad (3.88)$$

$$H_0(j\omega)=M(\omega)\,e^{j\Psi(\omega)}.$$

În planul funcţiei $H_d(j\omega)$, reprezentarea relaţiei ce defineşte modulul funcţiei $H_0(j\omega)$ conduce la o familie de cercuri determinată prin $M=$const. Dacă ţinem seama de notaţiile:

$$u=\mathrm{Re}[H_d(j\omega)]; \qquad v=Im[H_d(j\omega)],$$

modulul M se scrie sub forma

$$M(\omega)\equiv M=\frac{u+jv}{1+u+jv}=\frac{\sqrt{u^2+v}}{\sqrt{(1+u)^2+v^5}}. \qquad (3.89)$$

Relaţia (3.89) evidenţiază o familie de cercuri [13] avînd raza dată de relaţia

$$R=\left|\frac{M}{M^2-1}\right|$$

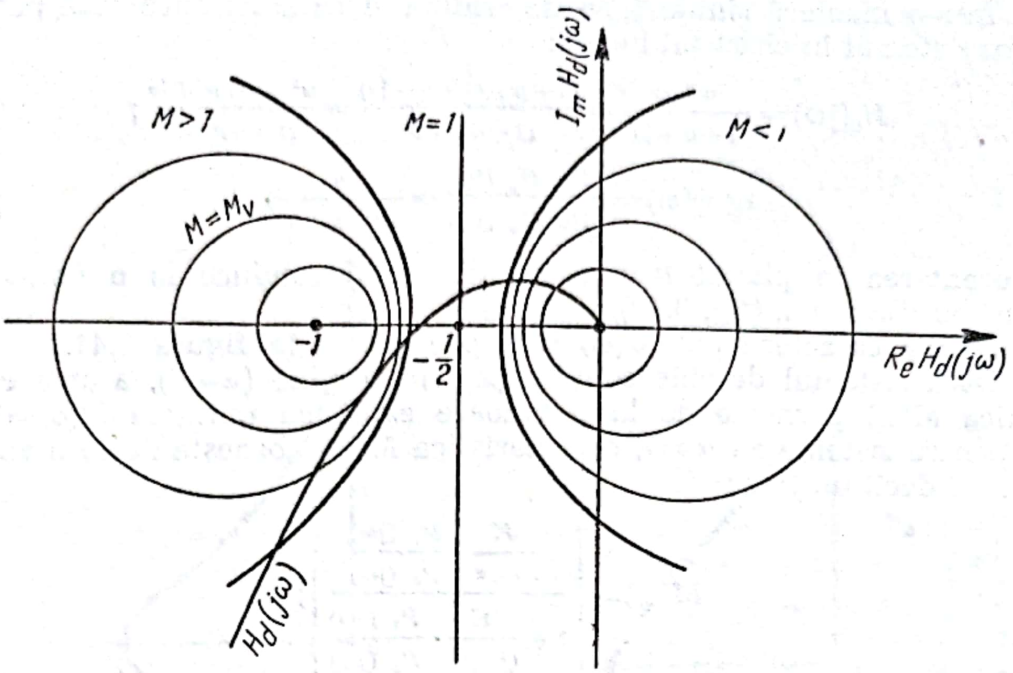


Fig. 3.39. Diagramă pentru calculul caracteristicii $M(\omega)$.

și centrul cercurilor avînd coordonata

$$C\left[\frac{-M^2}{M^2-1}, 0\right].$$

În figura 3.39 se reprezintă familia de cercuri pentru M=const. Intersecția locului de transfer cu cercurile M=const. permite obținerea caracteristicilor $M(\omega)$, respectiv valoarea maximă a modulului M_v. Valoarea de rezonanță a lui M este cea mai mare valoare a lui M la care locul de transfer este tangent.

Pentru sistemul de ordinul doi, valoarea maximă a lui M este funcție de factorul de amortizare ζ. Astfel

$$M^2=\left|\frac{H_d(j\omega)}{1+H_d(j\omega)}\right|=\frac{\omega_n^4}{[\omega_n^2-\omega^2]^2+4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}, \tag{3.90}$$

iar pulsația de rezonanță la care are loc $M=M_v$ se obține prin rezolvarea ecuației

$$\frac{d}{d\omega}[M^2(\omega)]=\frac{\omega_n^4\,[\,2\,(\omega_n^2-\omega^2)\cdot(-2\omega)+8\zeta^2\omega_n^2\cdot\omega}{[(\omega_n^2-\omega^2)^2+4\zeta^2\omega_n^2\omega^2]^2}=0, \tag{3.91}$$

de unde

$$\omega=\omega_r=\pm\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}. \tag{3.92}$$

Înlocuind (3.92) în (3.90) se obține valoarea maximă a lui M, care reprezintă un indicator de performanță în domeniul frecvențelor

$$M_v=\left[\frac{\omega_n^4}{[\omega_n^2-\omega_n^2(1-2\zeta^2)]^2+4\zeta^2\omega_n^4(1-2\zeta^2)}\right]^{1/2}=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}. \tag{3.93}$$

Scanned with OKEN Scanner

Într-o manieră similară se determină și caracteristica fază-pulsație pentru sistemul în circuitul închis:

$$H_0(j\omega)=\frac{u+jv}{1+u+jv}=\frac{(u+jv)\ (1+u-jv)}{(1+u)^2+v^2}=\frac{u^2+u+v^2+jv}{(1+u)^2+v^2}; \tag{3.94}$$

$$\operatorname{tg}\psi(\omega)=\frac{\operatorname{Im}\ H_0\ (j\omega)}{\operatorname{Re}\ H_0\ (j\omega)}=\frac{v}{u^2+u+v^2}; \tag{3.95}$$

Reprezentarea în planul v-u a relației (3.95) conduce la o familie de cercuri cu ψ=const. (fig. 3.40).

Forma caracteristicii $M(\omega)$ este prezentată în figura 3.41.

Dacă sistemul deschis conține poli în origine ($\alpha\neq 0$), atunci caracteristica $M(\omega)$ pornește de la o valoare egală cu unitatea $M(0)=1$, pe cînd pentru sisteme cu $\alpha=0$, caracteristica $M(\omega)$ pornește de la o valoare mai mică decît unitatea:

$$M(\omega)=\left|\frac{\dfrac{K}{(j\omega)^\alpha}\cdot\dfrac{P_1\ (j\omega)}{P_2\ (j\omega)}}{1+\dfrac{K}{(j\omega)^\alpha}\cdot\dfrac{P_1\ (j\omega)}{P_2\ (j\omega)}}\right|; \tag{3.96}$$

$$M(0)=\lim_{\omega\to 0}M(\omega)=\lim_{\omega\to 0}\left|\frac{\dfrac{K}{(j\omega)^\alpha}\cdot\dfrac{P_1\ (j\omega)}{P_2\ (j\omega)}}{1+\dfrac{K}{(j\omega)^\alpha}\cdot\dfrac{P_1\ (j\omega)}{P_2\ (j\omega)}}\right|=\begin{cases}1 \text{ pentru } \alpha\geqslant 1;\\ \dfrac{K}{1+K} \text{ pentru } \alpha=0.\end{cases}$$

Cînd $\omega\to\infty$ rezultă: $H_0(j\omega)\to 0$, iar modulul $M(\omega)=|H_0(j\omega)|\to 0$.

În figurile 3.41, *a* și *b* sînt indicate aspecte ale dependenței $M(\omega)$ pentru cazul $\alpha=0$, iar în figurile 3.41, *c* și *d* pentru cazul $\alpha=1$ sau $\alpha=2$.

Caracteristica $M(\omega)$ este utilizată la proiectarea sistemelor automate. Cu ajutorul acestei caracteristici se poate determina *lărgimea de bandă* sau *banda de frecvență* a sistemului și *valoarea de vîrf* M_v, corespunzătoare frecvenței de rezonanță ω_r, care permite calculul suprareglajului.

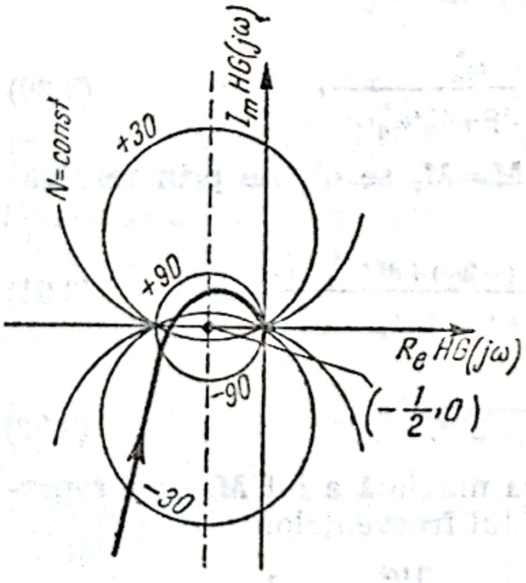


Fig. 3.40. Diagramă pentru calculul caracteristicii $N(\omega)$.

3.3.4. PERFORMANȚELE UNUI SISTEM ÎN DOMENIUL FRECVENȚELOR

Cu ajutorul caracteristicilor de frecvență pot fi definite mai multe performanțe pentru un sistem de reglare automată, cum sînt: *stabilitatea relativă a sistemului, banda de frecvență, frecvența de rezonanță, valoarea de vîrf a modulului* M_v.

Stabilitatea sistemului se poate defini cu ajutorul locului de transfer, pe baza criteriului de stabilitate Nyquist, și cu ajutorul caracteristicilor de frecvență în reprezentare logaritmică. Conform criteriului de stabilitate Nyquist se poate defini stabilitatea unui

Scanned with OKEN Scanner

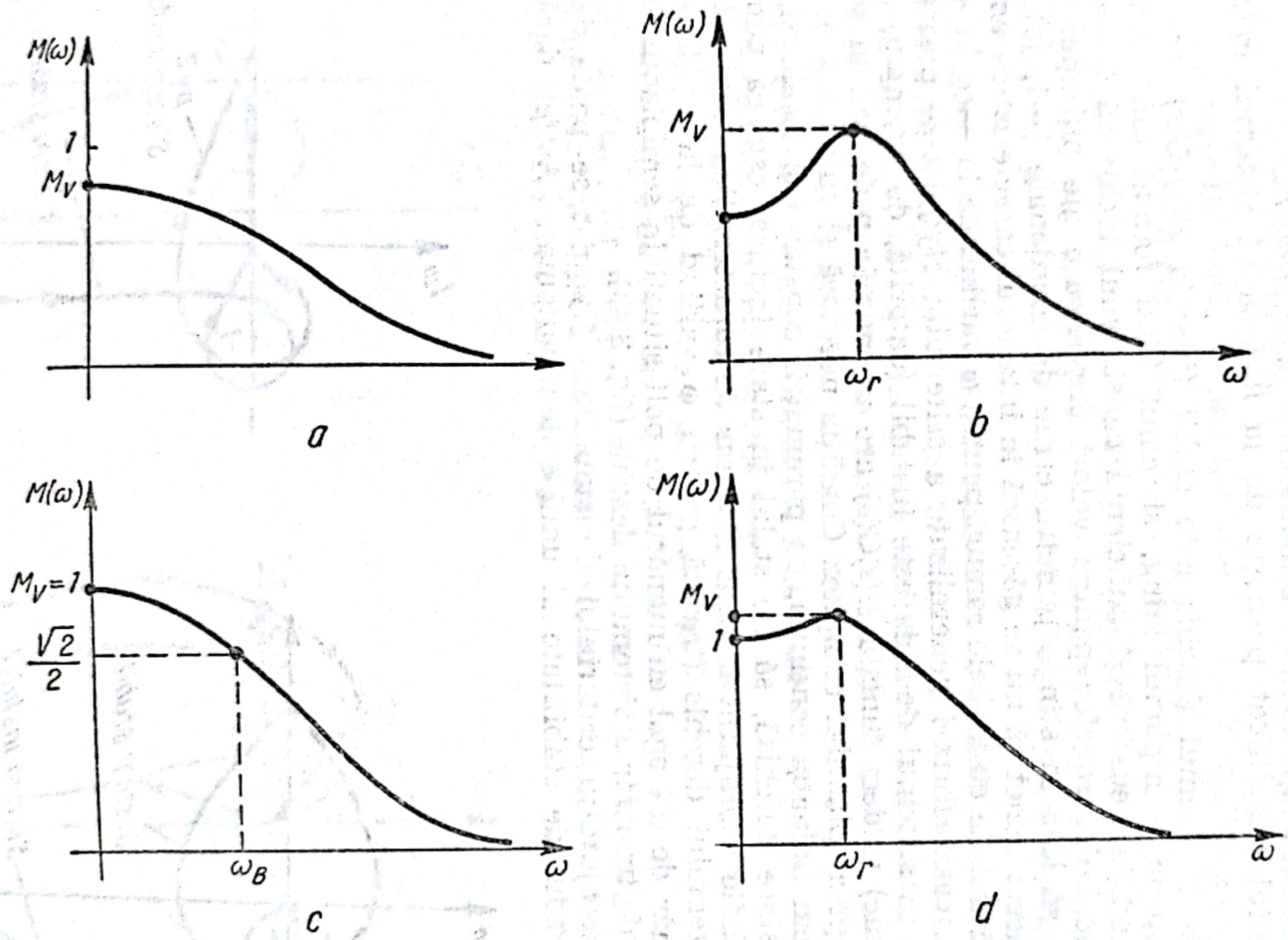


Fig. 3.41. Caracteristicile de frecvență ale unui sistem închis:
a, *b* — diferite caracteristici $M(\omega)$, pentru $\alpha=0$; *c* — caracteristica $M(\omega)$ pentru un sistem cu $\alpha=1$; *d* — caracteristica $M(\omega)$ pentru un sistem cu $\alpha=2$.

Scanned with OKEN Scanner

sistem automat în stare închisă dacă se cunoaşte locul de transfer al sistemului deschis şi faptul că, sistemul deschis este sau nu stabil. Acest criteriu are avantajul că utilizează caracteristica amplitudine-fază a sistemului deschis sau caracteristicile logaritmice amplitudine-pulsaţie şi fază-pulsaţie ale sistemului deschis care se trasează relativ uşor. În unele lucrări [4] sînt prezentate două formulări ale criteriului Nyquist, una denumită *criteriul simplificat*, iar cealaltă *criteriu generalizat*.

Criteriul simplificat porneşte de la ipoteza că sistemul în stare deschisă este stabil.

● Dacă sistemul deschis este stabil (funcţia $H(s)\cdot G(s)$ are toţi polii situaţi în semiplanul stîng, sistemul fiind format din elemente stabile, condiţia necesară şi suficientă ca sistemul închis să fie stabil este ca locul de transfer pentru valori crescătoare ale pulsaţiei ($\omega = 0 \ldots \infty$) să lase în stînga punctul critic de coordonate (—1, j0) (fig. 3.42) sau acest punct să nu se găsească în interiorul caracteristicii amplitudine-fază trasate cu ambele ramuri pentru ω variind de la $-\infty$ la $+\infty$.

● În cazul formei generalizate a criteriului Nyquist se pleacă de la ipoteza că sistemul deschis este instabil (datorită, de exemplu, unor reacţii locale) şi deci funcţia $H(s)G(s)$ are un număr p de poli în semiplanul drept al planului complex. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca un sistem liniar şi continuu, cu parametrii constanţi şi localizaţi, instabil în stare deschisă, să fie stabil în stare închisă, este ca punctul (—1, j0) să fie înconjurat în sens antiorar de caracteristica amplitudine-fază a sistemului deschis (trasată pentru ω variind de la $-\infty$ la $+\infty$) de un număr de ori egal cu numărul de poli situaţi în semiplanul drept ai funcţiei de transfer a sistemului deschis (fig. 3.43).

● Cu ajutorul criteriului de stabilitate Nyquist se poate determina şi gradul de stabilitate al unui sistem automat. Astfel, dacă ω_π

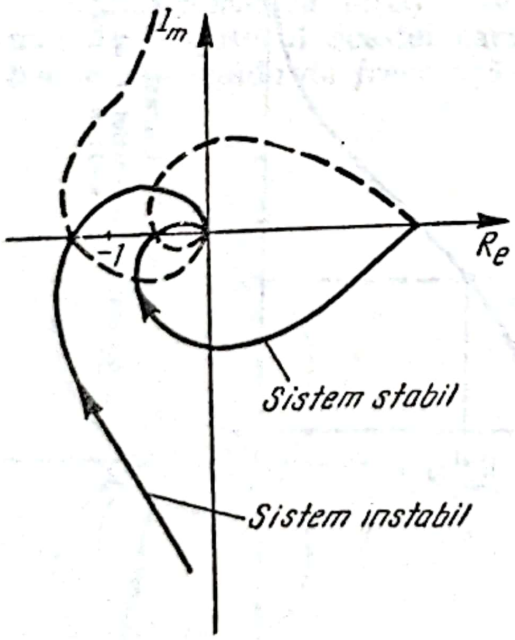


Fig. 3.42. Forma locului de transfer pentru un sistem stabil şi instabil.

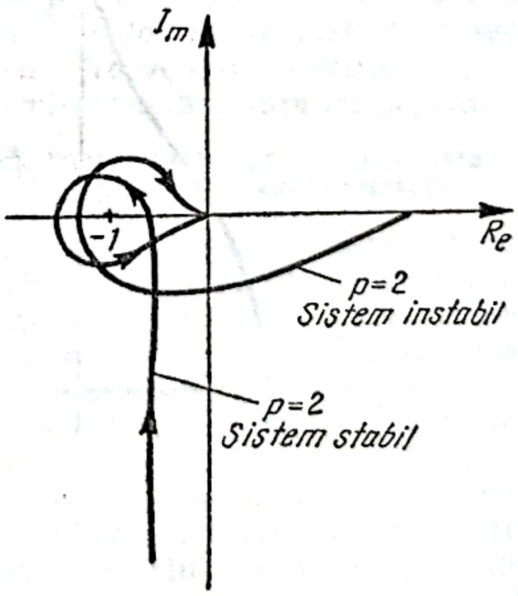


Fig. 3.43. Forma locului de transfer pentru un sistem stabil şi instabil cînd sistemul deschis conţine p poli de instabilitate.

Scanned with OKEN Scanner

este pulsația pentru care faza sistemului este $\varphi=-180°$ (locul de transfer intersectează axa reală negativă), iar ω_c este pulsația la care modulul vectorului $H_dG(j\omega)$ este egal cu unitatea, se pot defini *marginea de cîștig* M_c (sau marginea de amplitudine) și *marginea de fază* M_φ, cu ajutorul cărora se apreciază stabilitatea relativă a sistemului:

$$M_c=\frac{1}{|HG(j\omega_\pi)|} \text{ — marginea de cîștig;} \qquad (3.97)$$

$$M_\varphi=180+\arg HG(j\omega_c) \text{ grade — marginea de fază.} \qquad (3.98)$$

Aceste mărimi pot fi observate grafic în figura 3.44.

Pentru sistemul *1* se observă că $|HG(j\omega_\pi)|<1$ și $\arg HG(j\omega_c)>-180°$; pentru sistemul *2*: $|GH(j\omega_\pi)|=1$ și $\arg HG(j\omega_c)=-180°$ ($\omega_\pi=\omega_c$), iar pentru sistemul 3 rezultă $|HG(j\omega_\pi)|>1$ și $\arg HG(j\omega_c)<-180°$.

Analiza celor trei sisteme din punctul de vedere al stabilității, conform criteriului Nyquist (în cazul în care sistemul deschis este stabil), evidențiază faptul că sistemul *2* este la limita de stabilitate, sistemul *1* este stabil iar sistemul *3* este instabil. Rezultă că pentru ca un sistem să fie stabil trebuie ca $|HG(j\omega_\pi)|<1$, respectiv $M_c>1$ iar $M_\varphi>0$.

Cu cît M_φ este mai mare și M_c mai mare cu atît gradul de stabilitate al sistemului automat este mai mare.

Aceleași rezultate pot fi obținute dacă se utilizează caracteristicile de frecvență în reprezentare logaritmică, (fig. 3.45).

Pentru sistemul cu caracteristicile de frecvență *1*, care este stabil, rezultă $\omega_c<\omega_\pi$, iar marginea de fază și marginea de cîștig pot fi evidențiate direct pe figura 3.45. Pentru sistemul instabil avînd caracteristicile de frecvență *3* rezultă $\omega_c>\omega_\pi$.

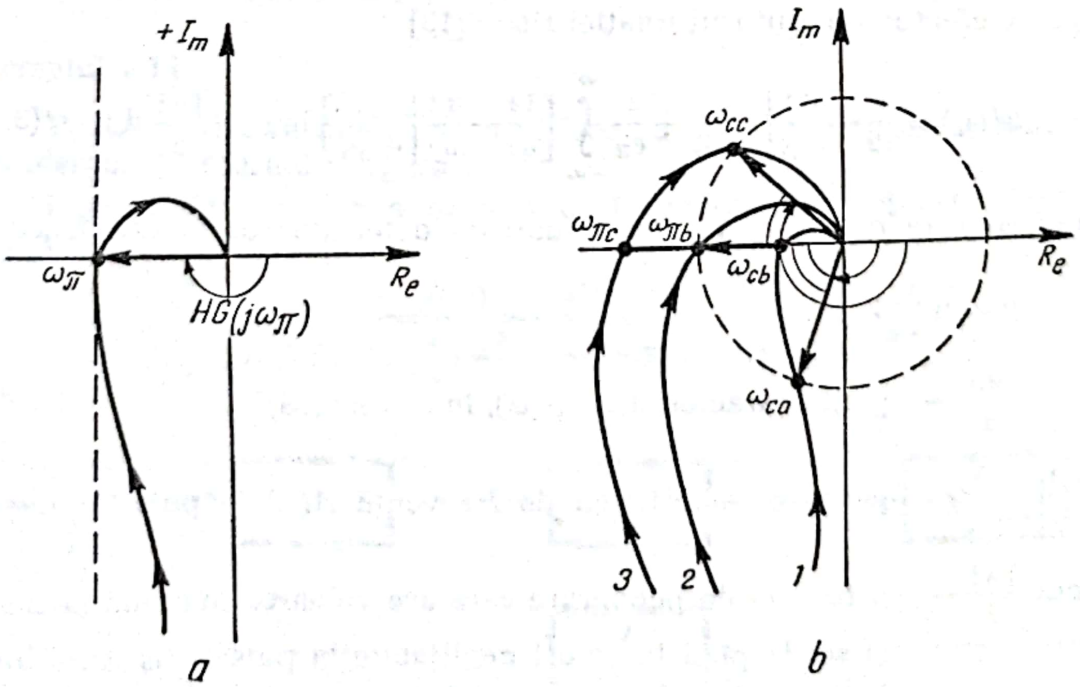


Fig. 3.44. Forma locului de transfer pentru diverse sisteme:
a — sistem la limita de stabilitate; b — sisteme cu diverse grade de stabilitate.

Scanned with OKEN Scanner

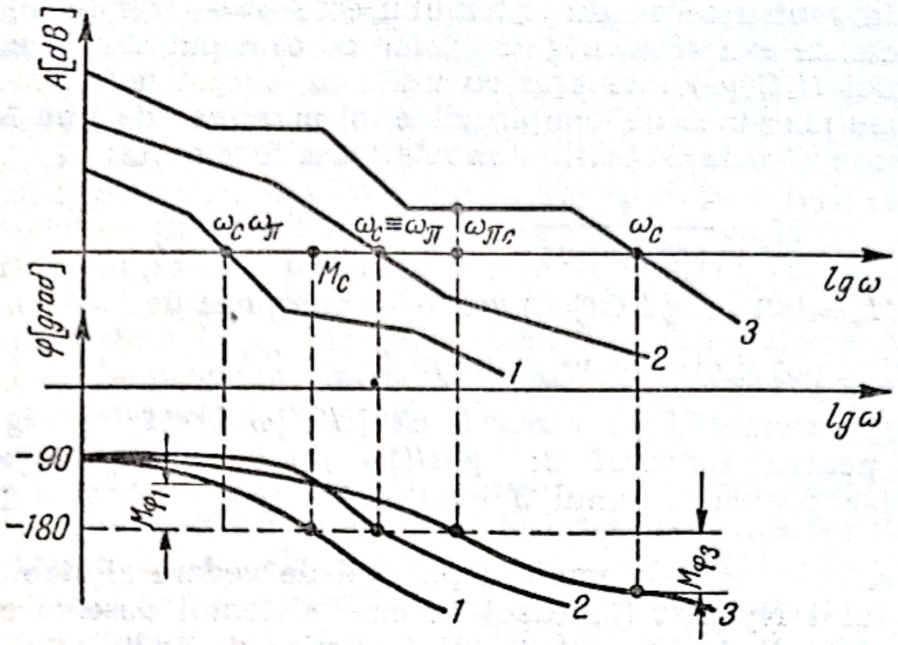


Fig. 3.45. Caracteristicile de frecvenţă în reprezentare logaritmică pentru diverse sisteme cu grade de stabilitate diferite.

Pentru *sistemele cu fază minimă*, ale căror funcţii de transfer nu conţin nici zerouri nici poli în semiplanul drept şi care nu conţin elemente cu timp mort [13, 59], există posibilitatea de a determina caracteristica $\varphi(\omega)$ dacă este cunoscută caracteristica $A(\omega)$ în tot domeniul pulsaţiilor şi reciproc. Astfel, una dintre cele două caracteristici logaritmice $A(\omega)$ sau $\varphi(\omega)$ ale sistemului deschis conţine informaţii complete asupra comportării sistemului. Trecerea de la o caracteristică la cealaltă se poate efectua cu ajutorul relaţiei Bodé [13]

$$\varphi(\omega_k)=\frac{\pi}{12}-\frac{dA}{d\mu}\bigg|_{\omega=\omega_k}+\frac{1}{6\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{dA}{d\mu}-\frac{dA}{d\mu}\bigg|_{\omega=\omega_k}\right]\ln\operatorname{cth}\frac{|\mu|}{2}\,d\mu, \qquad (3.99)$$

unde: ω_k este pulsaţia la care se doreşte determinarea valorii fazei;

$\mu=\ln\frac{\omega}{\omega_k}$;

$\frac{dA}{d\mu}$ — panta caracteristicii $A(\omega)$, în dB/octavă;

$\frac{dA}{d\mu}\Big|_{\omega=\omega_k}$ — panta caracteristicii de frecvenţă $A(\omega)$ la pulsaţia $\omega=\omega_k$;

$\ln\operatorname{cth}\frac{|\mu|}{2}$ — o funcţie de ponderare care are valoarea maximă la $\omega=\omega_k$ şi scade pînă la valori neglijabile la pulsaţii ω care diferă printr-o decadă — într-un sens sau altul — de pulsaţia ω_k.

Relaţia (3.99) permite a aprecia stabilitatea sistemului numai cu ajutorul caracteristicii logaritmice $A(\omega)$.

Considerînd că pulsaţia ω_k este chiar pulsaţia de tăiere ω_c şi în jurul acestei pulsaţii variaţia pantei caracteristicii $A(\omega)$ este neglijabilă, rezultă pentru faza sistemului la această pulsaţie valorile:

$$\varphi(\omega_c)=\frac{\pi}{12}\cdot\frac{dA}{d\mu}\Big|_{\omega=\omega_c}=-\frac{\pi}{2}\text{ radiani}=-90^\circ$$

$$\text{pentru }\frac{dA}{d\mu}=-20\text{ dB/dec}=-6\text{ dB/octavă;}$$

$$\varphi(\omega_c)\cong\frac{\pi}{12}\cdot(-12\text{ dB/octavă})=-\pi$$

$$\text{pentru }\frac{dA}{d\mu}=-40\text{ dB/dec}=-12\text{ dB/octavă;}$$

$$\varphi(\omega_c)\cong\frac{\pi}{12}\cdot(-18\text{ dB/octavă})=-270^\circ$$

$$\text{pentru }\frac{dA}{d\mu}=-60\text{ dB/dec}=-18\text{ dB/octavă.}$$

Condiţia menţinerii constante a pantei în jurul pulsaţiei de tăiere permite a aproxima al doilea termen din relaţia (3.99) cu zero şi deci a calcula similar faza în jurul pulsaţiei de tăiere.

Pornind de la definiţia marginii de fază rezultă că sistemul a cărei caracteristică $A(\omega)$ are panta egală cu -20 dB/dec, pentru o gamă cît mai largă de frecvenţe, în jurul pulsaţiei de tăiere este stabil

$$M_\varphi=180+\varphi(\omega_c)\cong180-90^\circ=90^\circ>0.$$

Exemplul 3.11

Pentru a ilustra modul de verificare a stabilităţii unui sistem dat, considerăm structura din figura 3.46.

Funcţia de transfer a sistemului în stare deschisă este dată de relaţia

$$HG(s)=\overbrace{K\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s+p_1}}^{H(s)}\cdot\overbrace{\frac{1}{s+p_2}}^{G(s)}\equiv H(s)\cdot G(s).$$

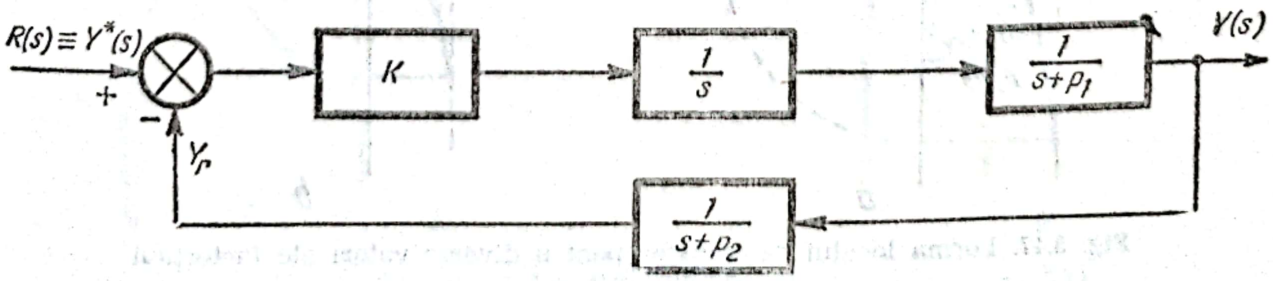


Fig. 3.46. Schema funcţională a sistemului de reglare din exemplul 3.11.

Scanned with OKEN Scanner

Reprezentarea grafică a caracteristicii amplitudine-fază evidenţiază influenţa lui K, p_1 şi p_2 asupra formei acestei caracteristici:

$$HG(j\omega)=\frac{K}{j\omega\,(j\omega+p_1)\,(j\omega+p_2)}=\frac{K}{\omega\sqrt{(\omega^2+p_1^2)\,(\omega^2+p_2^2)}}\cdot$$

$$\measuredangle -90^\circ\ -\mathrm{tg}^{-1}(\omega/p_1)-\mathrm{tg}^{-1}(\omega/p_2);$$

$$\lim_{\omega\to 0} HG(j\omega)=\infty\cdot\measuredangle -90^\circ$$

$$\lim_{\omega\to\infty} HG(j\omega)=0\cdot\measuredangle -270^\circ=0\cdot\measuredangle +90^\circ$$

Schimbarea de semn a argumentului atunci cînd ω creşte evidenţiază faptul că locul de transfer intersectează axa reală. Pentru valori intermediare ale frecvenţei ω, argumentul φ are valori cuprinse între —90° şi —270°, locul de transfer fiind situat în cadranul II şi cadranul III (fig. 3.47).

Asimptota lui $HG(j\omega)$ pentru $\omega\to 0$ se obţine prin scrierea părţii reale şi imaginare a vectorului complex $HG(j\omega)$:

$$HG(j\omega)=-\frac{K\,(p_1+p_2)}{(\omega^2+p_1^2)\,(\omega^2+p_2^2)}-j\,\frac{K\,(p_1p_2-\omega^2)}{\omega\,(\omega^2+p_1^2)\,(\omega^2+p_2^2)};$$

$$\lim_{\omega\to 0} HG(j\omega)=-\frac{K\,(p_1+p_2)}{p_1^2p_2^2}-j\,\infty.$$

Astfel, linia $-\frac{K\,(p_1+p_2)}{p_1^2p_2^2}$ reprezintă o asimptotă a locului de transfer.

Modificarea factorului de amplificare determină o deplasare a acestei linii, ceea ce atrage o creştere sau scădere a gradului de stabilitate a sistemului. În figura 3.47, *b*, reducerea factorului de amplificare deter-

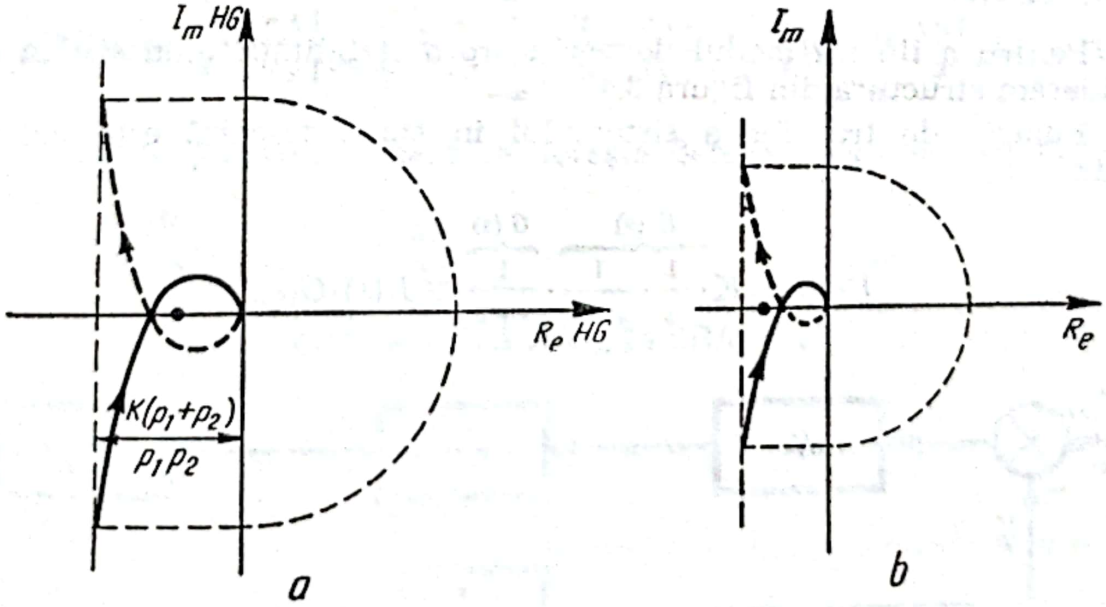


Fig. 3.47. Forma locului de transfer pentru diverse valori ale factorului de amplificare:
a — sistem instabil; *b* — sistem stabil.

Scanned with OKEN Scanner

mină o deplasare a asimptotei locului de transfer în sensul apropierii de axa imaginară, sistemul devenind stabil.

Pentru $K=1$, $p_1=1$ și $p_2=1/2$, se pot calcula frecvențele ω_π și ω_c, respectiv marginea de fază M_φ și marginea de cîștig M_c:

$$\varphi(\omega_\pi)=-\frac{\pi}{2}-\operatorname{tg}^{-1}\omega_\pi-\operatorname{tg}^{-1}2\omega_\pi=-\frac{\pi}{2}-\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{3\omega_\pi}{1-2\omega_\pi^2}\right);$$

$$\frac{3\omega_\pi}{1-2\omega_\pi^2}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\infty; \qquad \omega_\pi=\sqrt{1/2}=0{,}707;$$

$$|HG(j\omega_c)|=1;$$

$$\frac{1}{\omega_c\sqrt{(\omega_c^2+1)\left(\omega_c^2+\frac{1}{4}\right)}}=1; \quad \omega_c=0{,}82.$$

Marginea de cîștig se calculează cu ajutorul relației

$$M_c=\frac{1}{|HG(j\omega_\pi)|}=\frac{1}{HG(j\,0{,}707)}=\frac{3}{4}.$$

Marginea de fază se calculează cu relația

$$M_\varphi=180+\arg HG(j\omega_c)=180+\arg HG(jo,82)=180-90°-\operatorname{tg}^{-1}0{,}82-$$

$$-\operatorname{tg}^{-1}(1,64);$$

$$M_\varphi=180-187{,}8°=-7{,}8.$$

Marginea de fază fiind negativă, sistemul este instabil (fig. 3.48).

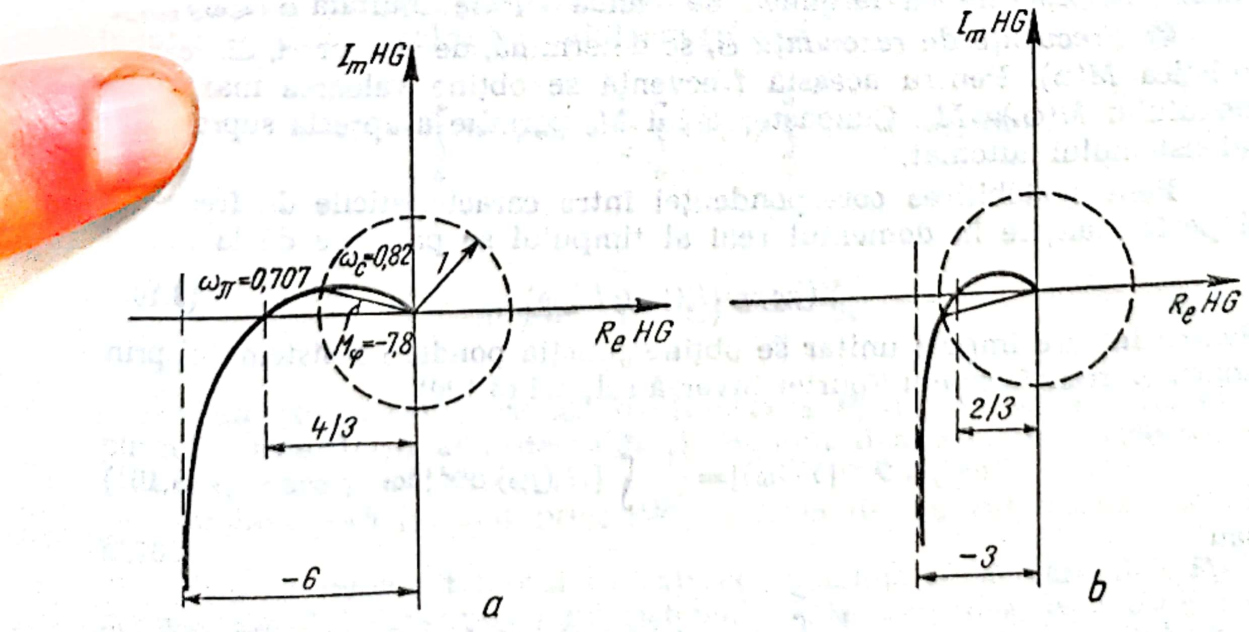


Fig. 3.48. Forma locului de transfer pentru sistemul din exemplu 3.11:
a — sistemul instabil; *b* — sistemul stabil.

Scanned with OKEN Scanner

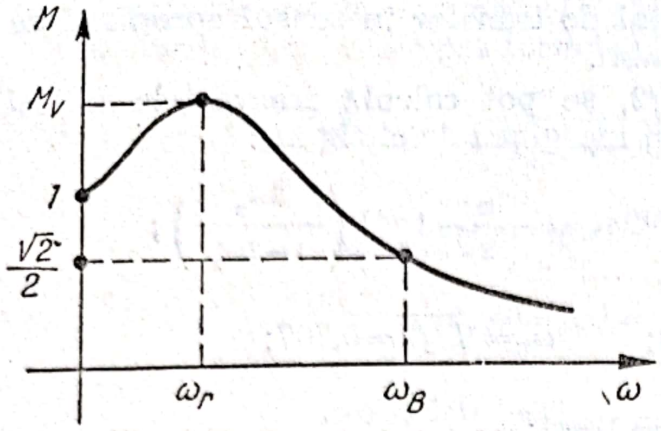


Fig. 3.49. Caracteristica $M(\omega)$.

Pentru $K=0,5$, $p_1=1$, $p_2=1/2$, locul de transfer este reprezentat în figura 3.48, *b*. Marginea de cîștig în acest caz devine $M_c=\frac{3}{2}=1,5$ iar marginea de fază $M_\varphi=15°$, sistemul fiind astfel stabil.

Prin reducerea factorului de amplificare s-a asigurat stabilitatea sistemului. Pentru un grad de stabilitate dorit, impus prin M_c și M_φ, se poate determina valoarea factorului de amplificare care asigură această stabilitate.

● *Banda de frecvență* sau lărgimea de bandă caracterizează proprietățile de filtru ale sistemului, comportarea acestuia în raport cu perturbațiile de înaltă frecvență. Se definește ca acel domeniu de frecvență pentru care raportul amplitudinilor ieșire-intrare nu scade sub 3 dB.

În figura 3.49 se indică pulsația ω_B care limitează banda de frecvență a sistemului. Pentru pulsații $0<\omega<\omega_B$, sistemul se comportă ca un filtru trece-jos. La limita bandei de frecvență rezultă $M(\omega_B)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, iar

$$20 \lg \frac{\sqrt{2}}{2} \cong -3 \text{ dB}.$$

Pentru ca influența perturbațiilor de înaltă frecvență asupra comportării sistemului — și deci asupra mărimii de ieșire — să fie cît mai redusă, se impune ca lărgimea de bandă să fie limitată $\omega_B \leqslant \omega_{B\ impus}$.

● *Frecvența de rezonanță* ω_r se determină, de asemenea, din caracteristica $M(\omega)$. Pentru această frecvență se obține valoarea maximă a modulului $M(\omega_r)=M_v$. Cunoașterea lui M_v permite a aprecia suprareglajul sistemului automat.

Pentru stabilirea corespondenței între caracteristicile de frecvență și performanțele în domeniul real al timpului se pornește de la relația

$$Y(j\omega)=H_0(j\omega)\cdot R(j\omega). \qquad (3.100)$$

Pentru intrare impuls unitar se obține funcția pondere a sistemului prin aplicarea transformatei Fourier inversă relației (3.100)

$$w(t)=\mathcal{F}^{-1}[Y(j\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[H_0(j\omega)\, e^{j\omega t}]d\omega \qquad (3.101)$$

sau

$$w(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[P(\omega)+j\,Q(\omega)]\, e^{j\omega t}\, d\omega=$$

Scanned with OKEN Scanner

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [P(\omega) + j\, Q(\omega)]\, [\cos \omega t + j \sin \omega t]\, d\omega. \qquad (3.102)$$

Dacă ţinem seama de tipul funcţiilor de sub integrală ($P(\omega)$ este o funcţie pară iar $Q(\omega)$ o funcţie impară), funcţia pondere a sistemului liniar continuu se poate calcula cu ajutorul relaţiei

$$w(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [P(\omega) \cos \omega t - Q(\omega) \sin \omega t]\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} [P(\omega) \cos \omega t - Q(\omega) \sin \omega t]\, d\omega \qquad (3.103)$$

sau, ţinînd seama că răspunsul sistemului este definit numai pentru $t > 0$, obţinem (pentru $t < 0$)

$$w(t) = 0 = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} [P(\omega) \cos \omega t + Q(\omega) \sin \omega t]\, d\omega, \qquad (3.104)$$

iar prin însumarea relaţiilor (3.103) şi (3.104), rezultă

$$w(t) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} P(\omega) \cos \omega t\, d\omega. \qquad (3.105)$$

Astfel, răspunsul tranzitoriu al unui sistem liniar continuu poate fi determinat dacă este cunoscută caracteristica reală de frecvenţă a sistemului.

Funcţia indicială (răspunsul sistemului la o treaptă unitară aplicată la intrare) se poate calcula cu ajutorul relaţiei

$$h(t) = \int_{0}^{t} w(t)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} [P(\omega) \int_{0}^{t} \cos \omega t\, dt]\, d\omega$$

sau

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} P(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega. \qquad (3.106)$$

Cunoaşterea caracteristicii de frecvenţă $P(\omega)$ permite calculul răspunsului tranzitoriu al sistemului şi implicit determinarea performanţelor staţionare şi tranzitorii.

În literatură [4] sînt prezentate metode pentru rezolvarea relaţiei (3.106).

Este de remarcat faptul că valoarea maximă a caracteristicii $P(\omega)$ permite calculul suprareglajului sistemului. De asemenea, este uşor de evidenţiat faptul că dilatarea caracteristicii de frecvenţă în sensul axei pulsaţiilor conduce la o contractare în sensul axei timpului.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 4

CORECȚIA SISTEMELOR AUTOMATE

4.1. GENERALITĂȚI. CORECȚIA ÎN SERIE, PARALEL ȘI ÎN REACȚIE

Așa cum s-a arătat în capitolele precedente, un sistem automat este caracterizat prin performanțele staționare și tranzitorii realizate în timpul funcționării. Prin analiza unui sistem automat se urmărește determinarea performanțelor acestuia și compararea lor cu un set de performanțe impuse prin proiectare. În cazul în care anumite performanțe ale sistemului se abat de la valorile prescrise, se impune *corecția sistemului*. Corecția se poate realiza fie prin modificarea anumitor parametri ai regulatorului, urmărindu-se corectarea performanțelor nerealizate, fie prin introducerea în structura sistemului a unor elemente de compensare (de corecție) alese astfel încît să asigure performanțele dorite. Problemele legate de alegerea și acordarea regulatoarelor sînt tratate în subcapitolul 6.4.

Elementele de corecție pot fi introduse în serie, pe calea directă, sau pe reacție (fig. 4.1).

Funcția de transfer a sistemului corectat se calculează cu relațiile:

$$H_{oc}(s)=\frac{H_1(s)\cdot H_c(s)\cdot H_2(s)\cdot H_3(s)}{1+H_1(s)\cdot H_c(s)\cdot H_2(s)\cdot H_3(s)}, \tag{4.1}$$

pentru corecția serie (fig. 4.1, *a*);

$$H_{oc}(s)=\frac{H_1(s)\cdot H_2(s)\cdot H_3(s)}{1+H_1(s)\cdot H_2(s)\cdot H_c(s)+H_1(s)\cdot H_2(s)\cdot H_3(s)\cdot H_c(s)}, \tag{4.2}$$

pentru corecția prin reacție (fig. 4.1, *b*).

Alegerea elementului de corecție și poziționarea acestuia în raport cu celelalte elemente ale sistemului, în mod corespunzător, permite îmbunătățirea performanțelor sistemului. În calitate de elemente de corecție se folosesc fie elemente de automatizare propriu-zise, fie rețele de corecție pasive.

Scanned with OKEN Scanner

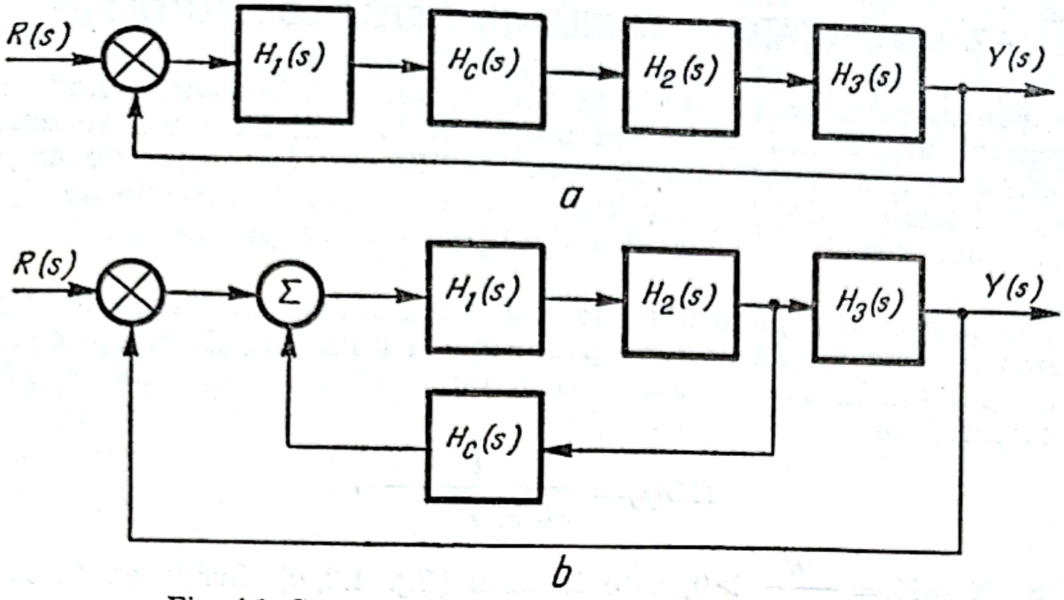


Fig. 4.1. Structuri de sisteme cu reţele de corecţie:
a — corecţie în serie; *b* — corecţie în paralel.

Problemele ce se impun rezolvate prin corecţia unui sistem automat sînt legate pe de o parte de alegerea tipului de corecţie definit prin modelul matematic ce caracterizează circuitul de corecţie, iar pe de altă parte de sinteza circuitului de corecţie, în vederea realizării performanţelor dorite.

În cazul corecţiei serie se poate deduce funcţia de transfer a circuitului de corecţie pornind de la relaţia (4.1)

$$H_c(s)=\frac{1}{H_1(s)\cdot H_2(s)\cdot H_3(s)}\cdot\frac{H_{oc}(s)}{1-H_{oc}(s)}, \tag{4.3}$$

sau dacă $H_{oc}(s)$ reprezintă funcţia de transfer a sistemului închis corespunzătoare performanţelor dorite (impuse) $[H_0(s)]$ *impus* iar $H_d(s)=H_1(s)\cdot H_2(s)\cdot H_3(s)$ reprezintă funcţia de transfer a căii directe a sistemului necorectat, funcţia de transfer a circuitului de corecţie este dată de relaţia

$$H_c(s)=\frac{1}{H_d(s)}\cdot\frac{[H_0(s)]_{impus}}{1-[H_0(s)]_{impus}}. \tag{4.4}$$

În cazul utilizării caracteristicilor de frecvenţă pentru reprezentarea sistemului se poate, de asemenea, determina tipul circuitului de corecţie în vederea corectării anumitor performanţe.

Modelele matematice ale elementelor de automatizare şi ale reţelelor de corecţie uzuale sînt prezentate în tabelul 2.1. Alegerea unui anumit tip de circuit de corecţie este determinată de structura generală a sistemului, modelul matematic al acestuia şi de performanţele ce trebuie realizate prin corecţie.

Cele mai uzuale reţele de corecţie pasive sînt: reţelele de anticipaţie, reţelele de întîrziere şi reţelele de întîrziere-anticipaţie. Principalele performanţe ce se urmăresc a fi corectate la un sistem de reglare automată sînt stabilitatea şi precizia.

Scanned with OKEN Scanner

4.2. ÎMBUNĂTĂȚIREA STABILITĂȚII SISTEMELOR AUTOMATE

Pentru corectarea stabilității sînt utilizate mai multe metode care, în general, afectează modificarea proprietăților căii directe a sistemului. Printre cele mai uzuale menționăm: modificarea factorului de amplificare al sistemului deschis, folosirea unor elemente de corecție de tip *PD* sau a unor circuite de corecție de tip derivativ plasate pe calea de reacție.

● *Micșorarea factorului de amplificare* al sistemului deschis în vederea corectării stabilității se poate aplica numai la sistemele de tip 0 și de tip 1 (adică $\alpha=0$ și $\alpha=1$). Sistemul a cărui funcție de transfer a căii directe este

$$HG(s)=\frac{K}{s\,(s+p_1)\,(s+p_2)},$$

pentru $K_d=K_1=\frac{K}{p_1p_2}>0$, este instabil (fig. 4.2, *a*). Scăderea factorului de amplificare la valoarea $K_d=K_2$ conduce la stabilizarea sistemului. Locul de transfer conform criteriului Nyquist în acest caz nu înconjură punctul critic (fig. 4.2, *b*). Pentru sistemele de tip zero ($\alpha=0$), scăderea factorului de amplificare determină o creștere a erorii în regim staționar al răspunsului la semnal treaptă, respectiv o reducere a preciziei sistemului.

La alegerea valorii factorului de amplificare trebuie avut în vedere și efectul acestuia asupra preciziei sistemului.

● *Introducerea într-un sistem a unui element de tip PD* (de anticipație) are ca efect o îmbunătățire a vitezei de răspuns a sistemului și poate determina și o creștere a gradului de stabilitate pentru anumite sisteme. Prezența unui zero în funcția de transfer a sistemului determină o reducere a diferenței dintre gradele polinoamelor de la numitor și numărător ($\theta=\alpha+n-m$) cu o unitate. Dacă $\theta=3$ în cazul sistemului neco-

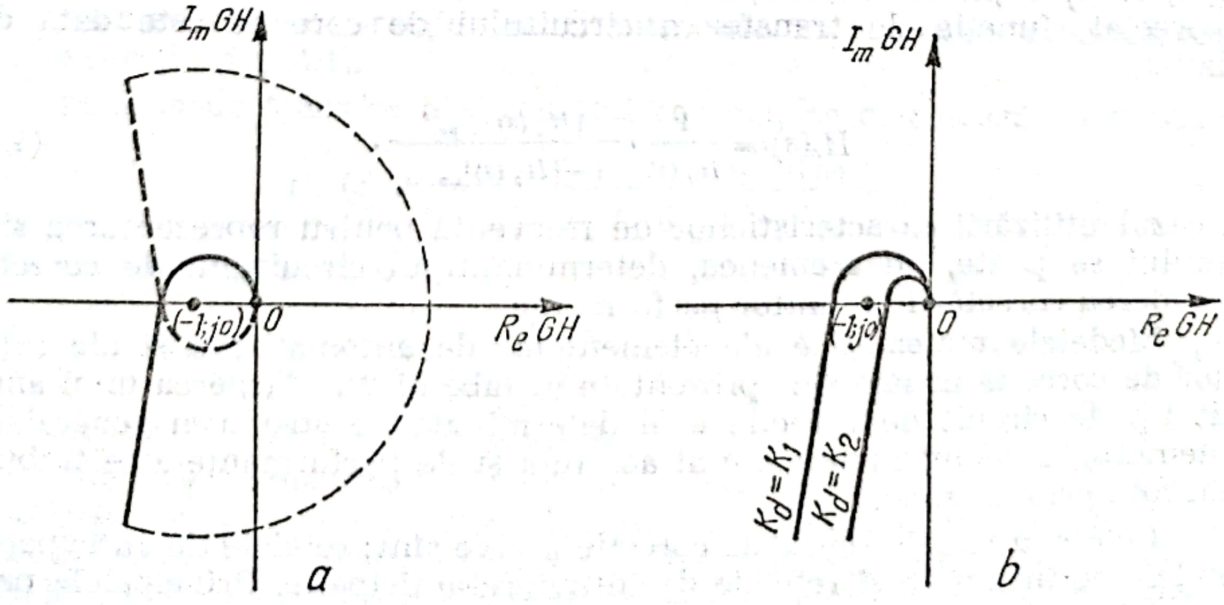


Fig. 4.2. Locul de transfer pentru un sistem:
a — necorectat; *b* — corectat.

Scanned with OKEN Scanner

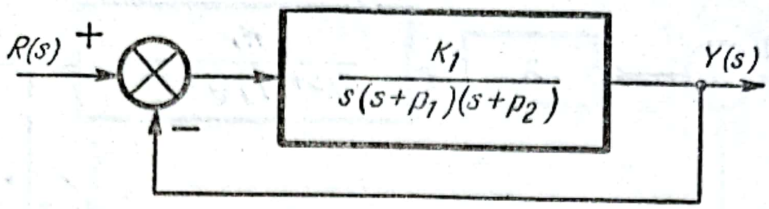


Fig. 4.3. Modelul unui sistem de reglare.

rectat, asimptota locului de transfer pentru frecvenţe înalte este semiaxa imaginară pozitivă; prin introducerea unui zero în funcţia de transfer rezultă $\theta=2$ şi asimptota locului de transfer pentru $\omega \to \infty$ devine axa reală negativă. În aceste condiţii, dacă sistemul deschis este stabil, criteriul Nyquist aplicat sistemului corectat arată că sistemul automat închis poate deveni stabil. Utilizarea unei reţele de corecţie de anticipaţie, a cărei funcţie de transfer este

$$H_c(s)=\frac{s+a}{s+b};\ a<b, \tag{4.5}$$

permite uneori a îmbunătăţi stabilitatea sistemului şi în general conduce la o îmbunătăţire a regimului tranzitoriu prin creşterea lărgimii de bandă a sistemului, ceea ce corespunde unui răspuns mai rapid.

Pentru a înţelege efectul unei reţele de anticipaţie asupra performanţelor unui sistem, considerăm sistemul al cărui model este prezentat în figura 4.3, iar locul de transfer este prezentat în figura 4.4.

Sistemul este stabil, marginea de fază M_φ este mai mare decît 45°, iar eroarea staţionară este mare pentru o intrare rampă dată.

Vom introduce în sistem o reţea de corecţie de anticipaţie pentru a îmbunătăţi viteza de răspuns şi precizia sistemului.

Coeficientul de eroare de viteză se calculează cu relaţia (3.57)

$$K_v=\lim_{s\to 0}\ [sHG(s)]=\frac{K_1}{p_1p_2}, \tag{4.6}$$

iar pentru îmbunătăţirea preciziei, introducerea unui element de amplificare cu factor de amplificare $\lambda>1$ conduce la o valoare mai mare a coeficientului de eroare de viteză

$$K_{v_1}=\frac{\lambda K_1}{p_1p_2}=\frac{K_2}{p_1p_2}.$$

Punînd $K_2=\lambda K_1$, funcţia de transfer a sistemului deschis devine

$$HG_2(s)=\frac{K_2}{s\,(s+p_1)\,(s+p_2)}. \tag{4.7}$$

Sistemul cu funcţia de transfer $HG_2(s)$ are coeficientul de eroare de viteză dorit $K_{v2}=\lambda K_v$.

Modelul sistemului în acest caz este reprezentat în figura 4.5.

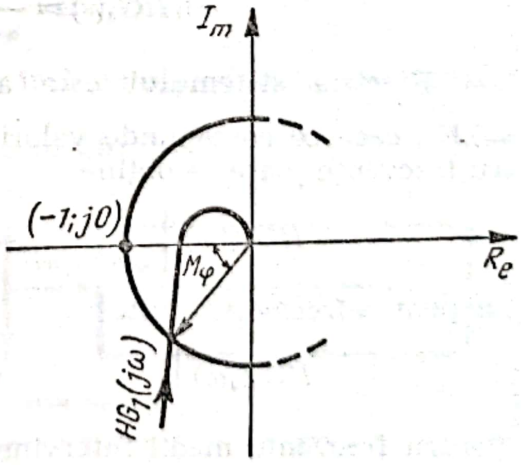


Fig. 4.4. Locul de transfer pentru sistemul considerat în figura 4.3.

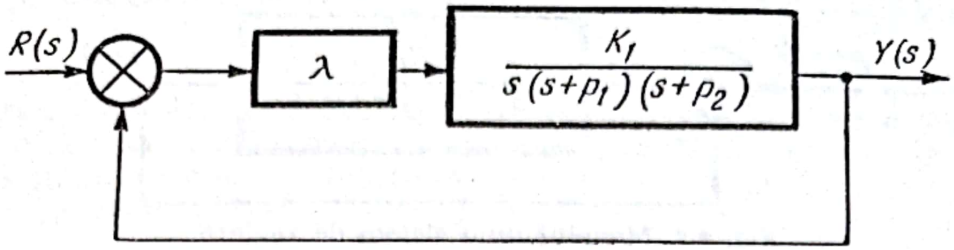


Fig. 4.5. Schema sistemului corectat prin introducerea în serie a unui element proporţional.

De reţinut faptul că valoarea factorului de amplificare λ trebuie aleasă astfel încît să se menţină stabilitatea sistemului. Introducînd în sistem o reţea de corecţie de anticipaţie $H_c(s)$, funcţia de transfer a sistemului devine

$$HG_2(s)\cdot H_c(s)=\frac{K_2}{s\,(s+p_1)\,(s+p_2)}\cdot\frac{s+a}{s+b}. \tag{4.8}$$

Coeficientul de eroare de viteză în acest caz se calculează cu relaţia

$$\lim_{s\to 0}\,[sHG_2(s)\cdot H_c(s)]=\frac{K_2 a}{p_1 p_2 b}<\lambda K_v, \text{ ştiind că } a/b<1.$$

Astfel, reţeaua de anticipaţie acţionează ca un atenuator la frecvenţe joase. Pentru asigurarea preciziei dorite se impune utilizarea unui element de amplificare al cărui factor de amplificare este $\lambda b/a$. Funcţia de transfer a sistemului corectat devine

$$HG_3=\frac{\lambda K_1\cdot(b/a)}{s\,(s+p_1)\,(s+p_2)}. \tag{4.9}$$

Creşterea suplimentară a factorului de amplificare a sistemului datorită coeficientului b/a conduce la instabilitate (fig. 4.6). Prin introducerea reţelei de corecţie de anticipaţie, funcţia de transfer a sistemului devine

$$HG_4(s)=\frac{\lambda\cdot K_1\cdot(b/a)}{s\,(s+p_1)\,(s+p_2)}\cdot\frac{s+a}{s+b}. \tag{4.10}$$

Precizia sistemului este asigurată dat fiind că $\lim\limits_{s\to 0}\,[sHG_4(s)]=\lambda K_v$, ceea ce corespunde valorii dorite a coeficientului de eroare. Pentru frecvenţe joase se obţine

$$HG_4(j\omega)\Big|_{\omega\ foarte\ mic}=\frac{\lambda K_1}{j\omega\,(j\omega+p_1)\,(j\omega+p_2)}=HG_2(j\omega),$$

iar pentru frecvenţe înalte

$$HG_4(j\omega)\Big|_{\omega\ foarte\ mare}=\frac{\lambda K_1(b/c)}{j\omega\,(j\omega+p_1)\,(j\omega+p_2)}=HG_3(j\omega).$$

Pentru frecvenţe medii intervine efectul reţelei de corecţie asupra fazei sistemului, astfel încît locul de transfer al sistemului corectat are forma din figura 4.7.

Scanned with OKEN Scanner

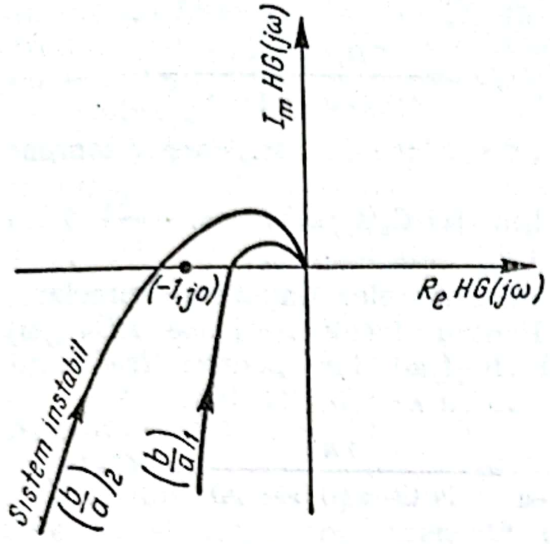


Fig. 4.6. Forma locului de transfer pentru diverse valori ale raportului $\frac{b}{a}$.

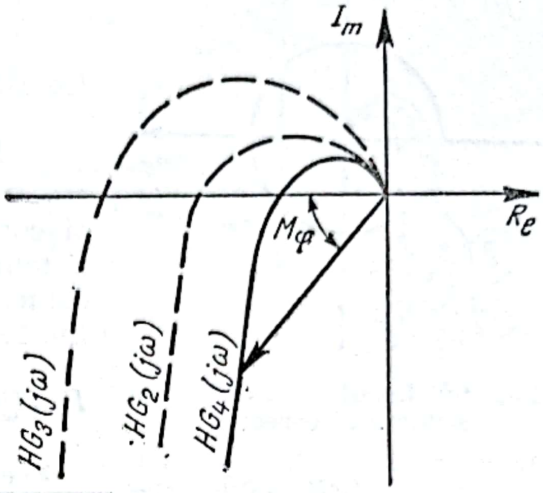


Fig. 4.7. Forma locului de transfer pentru diverse tipuri de circuite corectoare introduse în sistem.

Structura generală a sistemului corectat este prezentată în figura 4.8.

O îmbunătățire a stabilității relative a unui sistem se poate obține și prin utilizarea unei rețele de corecție de întîrziere, în cazul în care este impusă valoarea coeficientului de eroare a sistemului. Utilizarea unei rețele de corecție de întîrziere pentru un sistem dat are ca efect: reducerea lărgimii benzii sistemului, creșterea duratei procesului tranzitoriu și mărirea preciziei prin creșterea valorii coeficientului de eroare, pentru o stabilitate relativă dată.

Considerînd același sistem al cărui model este dat în figura 4.3, efectuăm corecția cu ajutorul unei rețele de întîrziere și cu ajutorul unui element de amplificare. Factorul de amplificare îl introducem în sistem pentru a realiza o valoare dorită a coeficientului de eroare

$$HG_2(s)=\frac{\lambda K_1}{s\,(s+p_1)\,(s+p_2)} \equiv \lambda \cdot HG_1(s).$$

Prin introducerea rețelei de corecție de întîrziere cu funcția de transfer:

$$H_c(s)=\frac{a}{b}\cdot\frac{s+b}{s+a};\quad (a<b),$$

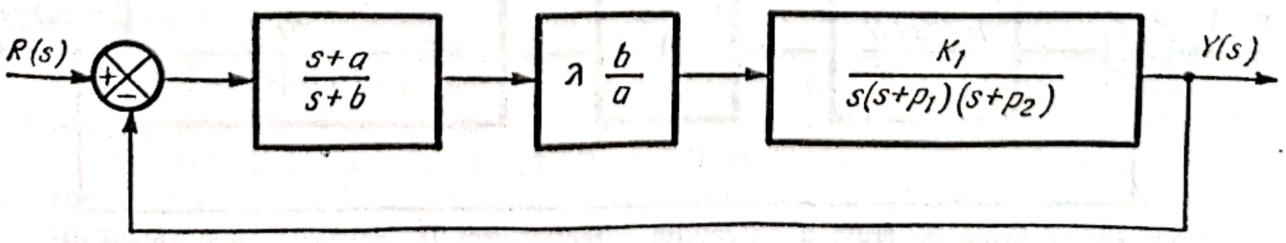


Fig. 4.8. Schema generală a sistemului corectat.

Scanned with OKEN Scanner

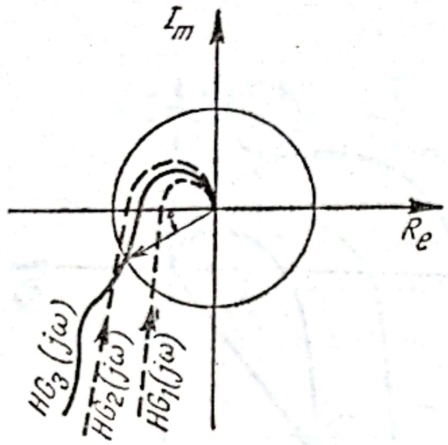


Fig. 4.9. Locul de transfer al sistemului corectat.

se obține

$$HG_3'(s)=\frac{\lambda K_1 (a/b)(s+b)}{s(s+p_1)(s+p_2)(s+a)}.$$

Coeficientul de eroare de viteză are valoarea

$$K_v'=\lim_{s\to 0}[sHG_3'(s)]=\lambda K_v=\lambda\cdot\frac{K_1}{p_1p_2}$$

și corespunde cerințelor impuse de precizia sistemului. Pentru frecvențe joase $HG_3'(j\omega)$ coincide cu $HG_2(j\omega)$, iar pentru frecvențe înalte coincide cu $\lambda\cdot(a/b)HG_1(j\omega)$:

$$HG_3'(j\omega)\Big|_{\omega\to 0}=\frac{\lambda K_1}{j\omega(j\omega+p_1)(j\omega+p_2)}=HG_2(j\omega);$$

$$HG_3'(j\omega)\Big|_{\omega\to\infty}=\frac{\lambda\cdot(a/b)K_1}{j\omega(j\omega+p_1)(j\omega+p_2)}=\lambda\cdot(a/b)\cdot HG_1(j\omega).$$

Reprezentarea grafică a locului de transfer a sistemului compensat și necompensat este dată în figura 4.9. Pentru frecvențe medii, efectul de atenuare al rețelei de corecție crește cu frecvența. Schema generală a sistemului corectat este prezentată în figura 4.10.

O rețea de corecție de tip „anticipație-întîrziere" îmbină avantajul ambelor tipuri de corecție prezentate. Pentru a înțelege efectul acestor circuite de corecție asupra performanțelor, în tabelul 4.1 sînt prezentate caracteristicile de frecvență ale rețelelor uzuale de corecție.

Pentru a ilustra modul de utilizare a unui circuit de corecție cu efecte de întîrziere și anticipație, considerăm un sistem a cărui funcție de transfer în stare deschisă este dată de relația

$$HG(s)=\frac{K}{s^2(s+p_1)};\quad p_1,\ K>0.$$

Locul de transfer corespunzător acestui sistem, prezentat în figura 4.11, evidențiază faptul că sistemul este instabil. Reducerea factorului de amplificare în acest caz nu are efect asupra stabilității. De asemenea, utilizarea unei rețele de corecție de întîrziere nu este eficientă pentru corectarea stabilității, locul de transfer situîndu-se deasupra axei reale negative.

Introducerea unei rețele de corecție de anticipație determină o deplasare a locului de transfer sub axa negativă pentru un anumit do-

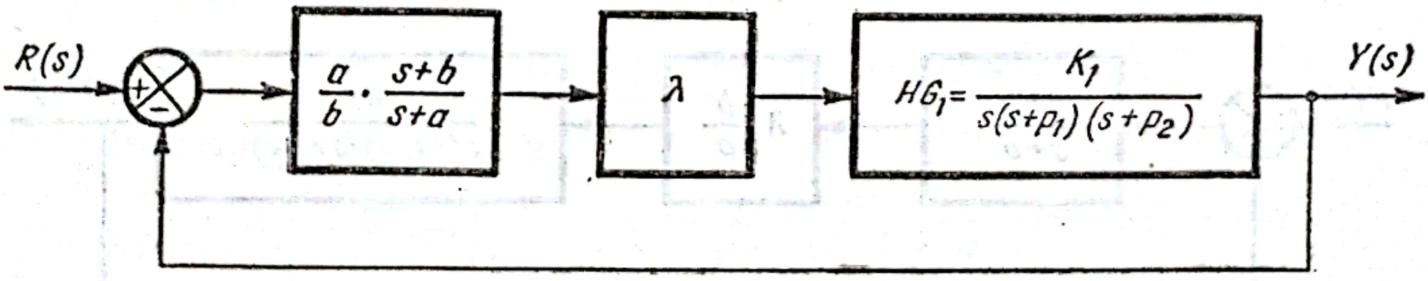


Fig. 4.10. Schema generală a sistemului corectat prin introducerea unei rețele de corecție de întîrziere.

Scanned with OKEN Scanner

meniu de frecvenţe (fig. 4.12, *a*). Introducerea unei reţele de corecţie cu efect de anticipaţie şi întîrziere determină o comportare dorită a sistemului pentru o bandă de frecvenţă mai mică decît poate fi realizată cu o reţea de anticipaţie. În figura 4.12, *b* este reprezentată caracteristica amplitudine fază a sistemului compensat cu reţeaua de corecţie de anticipaţie şi de întîrziere. Printr-o alegere corespunzătoare a parametrilor reţelei de corecţie pot fi realizate performanţele staţionare şi tranzitorii dorite pentru sistemul care în stadiul „necompensat" era instabil.

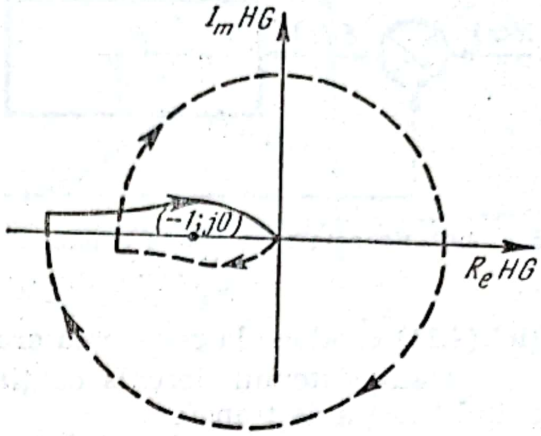


Fig. 4.11. Forma locului de transfer al sistemului necorectat.

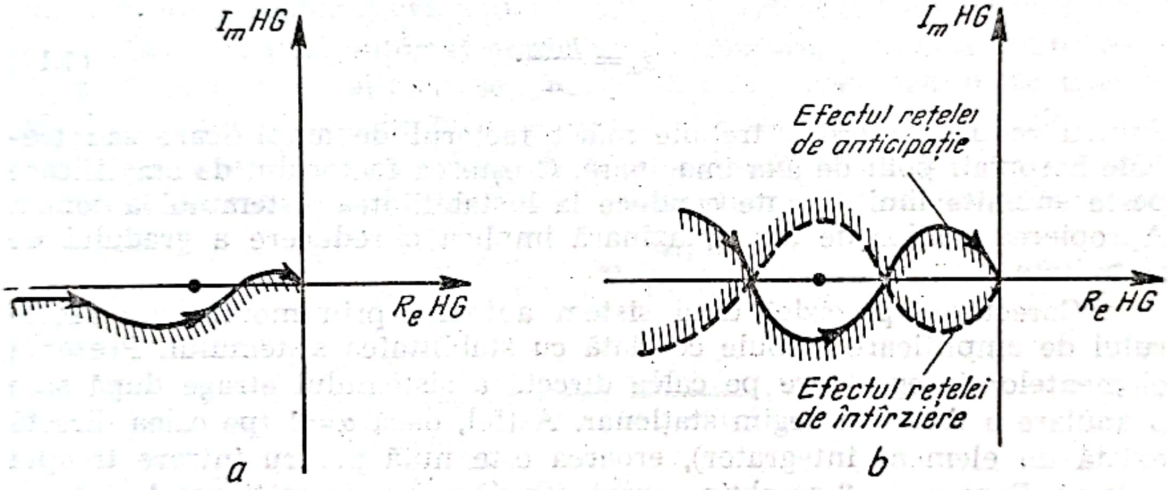


Fig. 4.12. Locul de transfer al sistemului corectat:
a — cu ajutorul unei reţele de anticipaţie; *b* — cu ajutorul unei reţele de întîrziere şi de anticipaţie.

4.3. ÎMBUNĂTĂŢIREA PRECIZIEI SISTEMELOR AUTOMATE

Corectarea preciziei unui sistem automat înseamnă micşorarea erorii lui în regim staţionar. Printre metodele folosite în acest scop, în afară de cele menţionate, notăm: mărirea factorului de amplificare al sistemului deschis, introducerea unor elemente integratoare pe calea directă, reglarea după derivata erorii şi printr-o alegere corespunzătoare a circuitului de reacţie principală.

Pornind de la relaţiile (3.54), (3.57) şi (3.59), care permit calculul coeficienţilor de eroare, rezultă evident faptul că pentru reducerea erorii în regim staţionar la un sistem dat se impune creşterea factorului de amplificare.

Scanned with OKEN Scanner

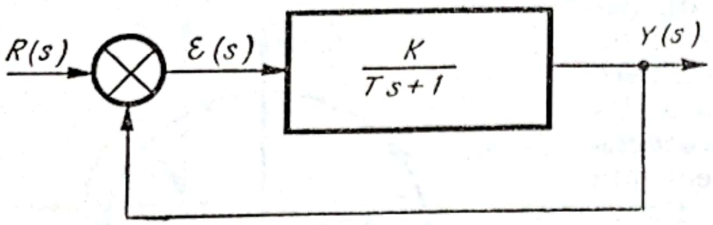


Fig. 4.13. Schema funcțională a unui SRA de ordinul întîi.

Pentru un sistem de ordinul întîi (fig. 4.13), eroarea în regim staționar la o intrare treaptă unitară este dată de relația

$$\varepsilon_{st}=\frac{1}{1+K_p}=\frac{1}{1+K}. \quad (4.11)$$

Creșterea factorului de amplificare conform relației (4.11) conduce la reducerea erorii în regim staționar.

Dacă sistemul deschis conține un pol în origine și doi poli reali, avînd funcția de transfer

$$H_d(s)=\frac{K}{s\,(s+p_1)\,(s+p_2)}, \quad (4.12)$$

eroarea în regim staționar pentru intrare rampă unitară este dată de relația

$$\varepsilon_{st}=\frac{p_1p_2}{K}. \quad (4.13)$$

Pentru reducerea erorii trebuie mărit factorul de amplificare sau trebuie apropiați polii de axa imaginară. Creșterea factorului de amplificare peste anumite limite poate conduce la instabilitatea sistemului automat. Apropierea polilor de axa imaginară implică o reducere a gradului de stabilitate.

Corectarea preciziei unui sistem automat prin modificarea factorului de amplificare trebuie corelată cu stabilitatea sistemului. Prezența elementelor integratoare pe calea directă a sistemului atrage după sine o anulare a erorii în regim staționar. Astfel, dacă $\alpha=1$ (pe calea directă există un element integrator), eroarea este nulă pentru intrare treaptă unitară. Pentru $\alpha=2$ se obține eroarea nulă în regim staționar la intrare rampă. De reținut faptul că pentru $\alpha=2$ gradul de stabilitate al sistemului poate fi foarte scăzut, impunîndu-se o corecție suplimentară pentru stabilitate.

Pentru sistemul deschis avînd funcția de transfer

$$HG(s)=H_d(s)=\frac{K}{s\,(s+p_1)},$$

eroarea nulă în regim staționar pentru intrare rampă se obține dacă se introduce ca element de corecție un integrator $H_c(s)=\frac{K_1}{s}$:

$$H_d(s)\cdot H_c(s)=\frac{K\cdot K_1}{s^2\,(s+p_1)}; \quad (4.14)$$

$$\varepsilon_{st}=\lim_{s\to 0}\left\{s\left[\frac{1}{1+H_d(s)\,H_c(s)}\right]\frac{1}{s^2}\right\}=\lim_{s\to 0}\left\{s\cdot\frac{1}{1+\frac{K\cdot K_1}{s^2(s+p_1)}}\cdot\frac{1}{s^2}\right\}=0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Locul de transfer *1* (fig. 4.14) al acestui sistem evidenţiază instabilitatea sistemului. Pentru a obţine şi o bună stabilitate a sistemului se introduce un element de corecţie de tip *PI*, a cărui funcţie de transfer este

$$H_c(s)=K_R+\frac{K_I}{s}=K_R\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)\cdot \tag{4.15}$$

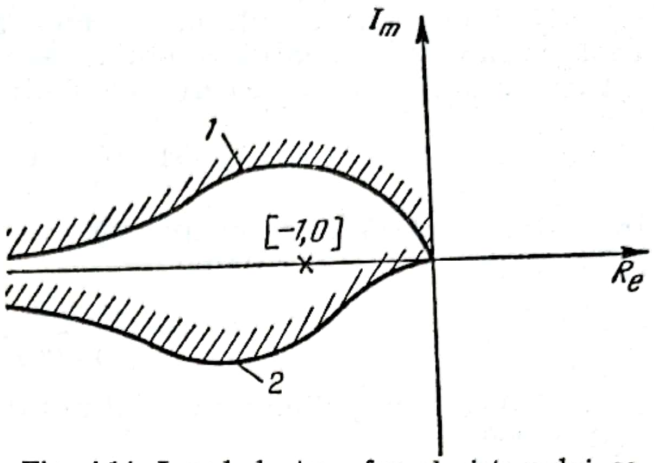


Fig. 4.14. Locul de transfer al sistemului corectat prin utilizarea unui regulator PI.

Sistemul corectat *1* are funcţia de transfer

$$H_d(s)\cdot H_c(s)=\frac{K\cdot K_R(T_i s+1)}{T_i s^2(s+p_1)}=\frac{K_c(T_i s+1)}{s^2(s+p_1)}, \tag{4.16}$$

iar locul de transfer *2* evidenţiază faptul că sistemul automat este stabil.

Dacă sistemul automat are reacţie neunitară, pentru a obţine eroare nulă în regim staţionar se poate determina coeficientul de transfer al circuitului de reacţie principală, care să răspundă acestui deziderat.

Referitor la figura 4.15, funcţia de transfer echivalentă pentru sistemul cu reacţie unitară, ţinînd seama de relaţia de echivalenţă

$$\frac{H(s)}{1+H(s)\cdot G(s)}=\frac{H_e(s)}{1+H_e(s)}, \tag{4.17}$$

este

$$H_e(s)=\frac{H(s)}{1-H(s)\,[1-G(s)]}\cdot \tag{4.18}$$

Dacă $G(s)=K_r$ iar $H(s)=K\cdot\frac{P(s)}{Q(s)}$, rezultă

$$H_e(s)=\frac{K\cdot\frac{P(s)}{Q(s)}}{1-K\frac{P(s)}{Q(s)}(1-K_r)}=\frac{K\cdot P(s)}{Q(s)-K(1-K_r)\cdot P(s)}\cdot \tag{4.19}$$

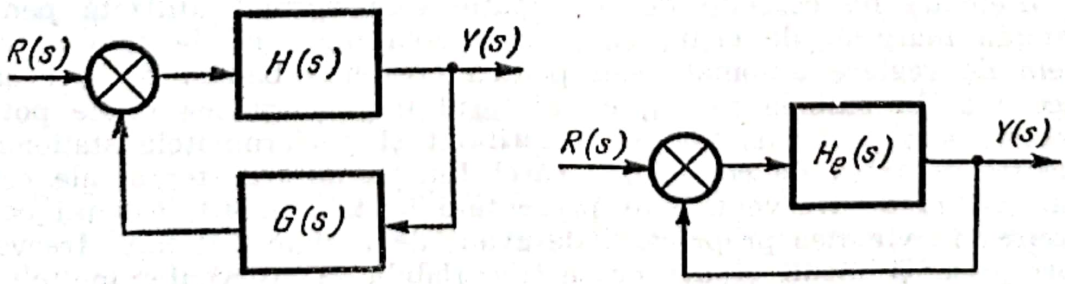


Fig. 4.15. Schema funcţională a unui sistem cu reacţie neunitară:
a — schema generală; *b* — schema echivalentă.

Scanned with OKEN Scanner

Ținînd seama că ultimul termen al polinoamelor $P(s)$ și $Q(s)$ este egal cu unitatea, pentru a obține eroarea nulă în regim staționar la intrare treaptă unitară se cere îndeplinirea condiției

$$K_r=1-\frac{1}{K} \quad \text{și} \quad \frac{1}{K}<1. \tag{4.20}$$

Într-adevăr, dacă este îndeplinită condiția (4.20), funcția de transfer $H_e(s)$ conține un pol în origine

$$H_e(s)=\frac{K\cdot P(s)}{Q(s)-P(s)}=\frac{K\cdot P(s)}{s\cdot B(s)}, \tag{4.21}$$

unde $B(s)$ este un polinom în s obținut din scăderea celor două polinoame $Q(s)$ și $P(s)$.

Pentru sistemul deschis avînd funcția de transfer (4.21), eroarea în regim staționar la o intrare de tip treaptă este nulă.

Pentru corecția performanțelor unui sistem de reglare automată pot fi utilizate și caracteristicile de frecvență în reprezentare logaritmică (caracteristicile Bodé). Prin introducerea unor rețele de corecție corespunzătoare în serie sau în paralel, forma caracteristicilor de frecvență în reprezentare logaritmică se modifică și, corespunzător performanțele în domeniul frecvențelor, vor intra sau nu în limitele impuse.

Ajustarea factorului de amplificare determină o deplasare a caracteristicii $A(\omega)$ fără a influența caracteristica fază-pulsație $\varphi(\omega)$, putînd fi corectată marginea de cîștig a unui sistem. Pentru o dublare a factorului de amplificare, scala pentru amplitudinea în decibeli este deplasată în jos cu valoarea $20 \log 2=6{,}02$ dB. Pentru sistemul a cărui funcție de transfer în stare deschisă este

$$HG(j\omega)=\frac{K}{j\omega(1+0{,}5j\omega)},$$

caracteristicile de frecvență în reprezentare logaritmică pentru $K=1$ sînt reprezentate în figura 4.16.

Valoarea lui K poate fi crescută pentru a îmbunătăți eroarea în regim staționar fără a reduce marginea de fază sub 45°. Frecvența la care se atinge marginea de fază $M\varphi=45°$ este $\omega_1=2$ rad/s și, corespunzător, factorul de amplificare poate fi crescut cu 9 dB, rezervă care corespunde acestei pulsații. Acest lucru se obține prin deplasarea cu 9 dB a scalei în jos, fie a caracteristicii A în sus.

Rețeaua de corecție de anticipație este normal utilizată pentru creșterea marginii de cîștig și/sau creșterea marginii de fază a unui sistem de reglare automată sau pentru creșterea bandei de frecvență a acestuia. În ambele cazuri, cu ajutorul unei asemenea rețele pot fi corectate atît performanțele tranzitorii cît și performanțele staționare. O astfel de rețea de corecție, a cărei funcție de transfer și ale cărei caracteristici de frecvență sînt prezentate în tabelul 4.1, asigură compensarea în virtutea proprietății de avans de fază în domeniul frecvențelor joase și medii și atenuarea neglijabilă la frecvențe înalte. În funcție de raportul a/b se obțin diverse caracteristici de frecvență și corespunzător o atenuare și un avans de fază.

Scanned with OKEN Scanner

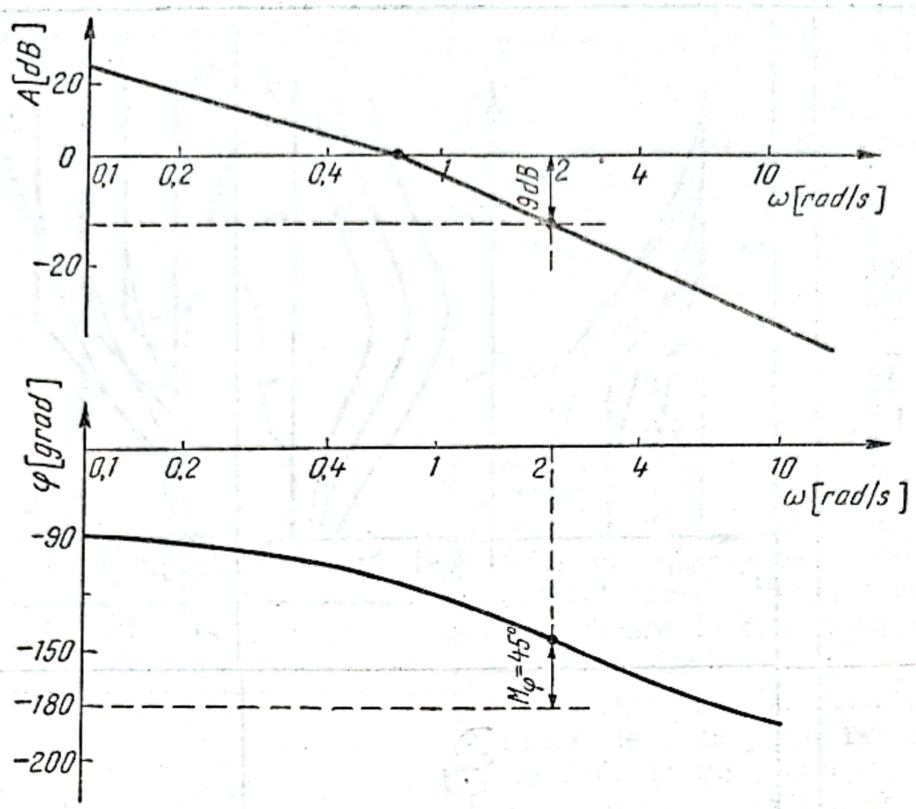


Fig. 4.16. Caracteristicile de frecvenţă pentru un sistem avînd şi un pol real negativ.

Exemplul 4.1

Pentru a ilustra modul de utilizare a reţelei de corecţie de anticipaţie în planul caracteristicilor de frecvenţă în reprezentare logaritmică, considerăm un sistem necompensat avînd funcţia de transfer

$$HG(s)=\frac{24}{s\,(s+2)\,(s+6)}$$

şi $G(s)=1$.

Prin compensare se cere a se obţine, pentru o intrare rampă cu panta de 2π rad/s, o eroare $\varepsilon_{st}\leqslant\frac{\pi}{10}$ rad, o margine de fază $M\varphi=45°\pm5°$, iar pulsaţia ω_1 pentru care $A(\omega_1)=0$ să fie $\omega_1\geqslant1$ rad/s.

Pentru a trasa caracteristicile de frecvenţă în reprezentare logaritmică scriem funcţia de transfer sub forma

$$HG(j\omega)=\frac{2}{j\omega\,(1+j\omega/2)\,(1+j\omega/6)},$$

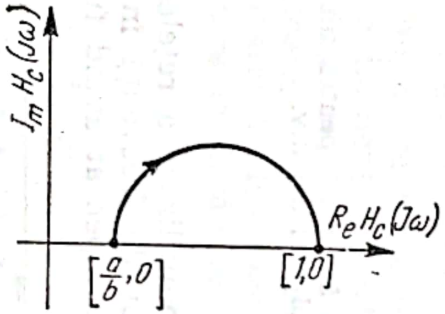
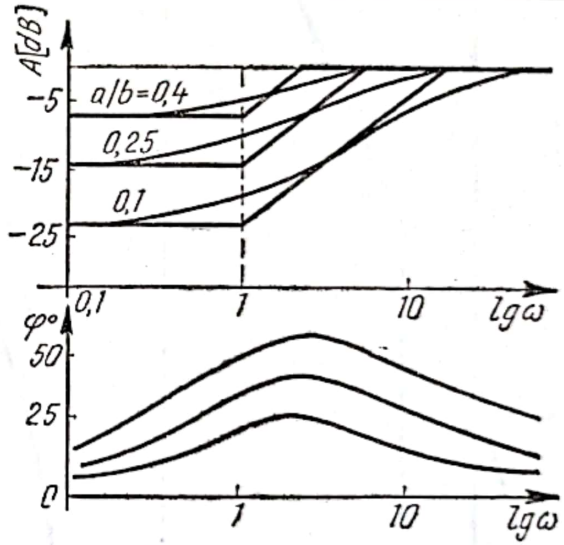
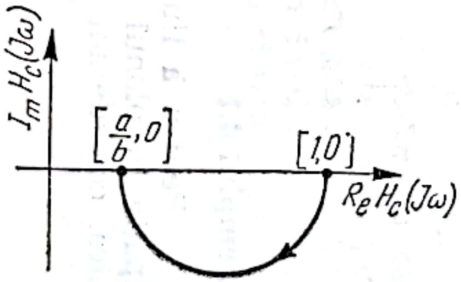
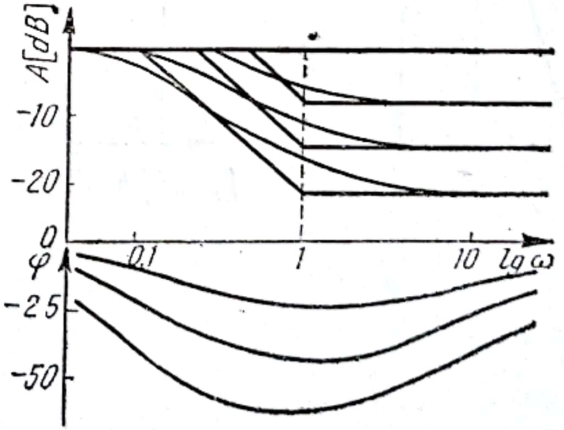
deci $K_{v_1}=2$, iar $\varepsilon_{st}=1/K_{v_1}$ pentru o intrare rampă unitară.

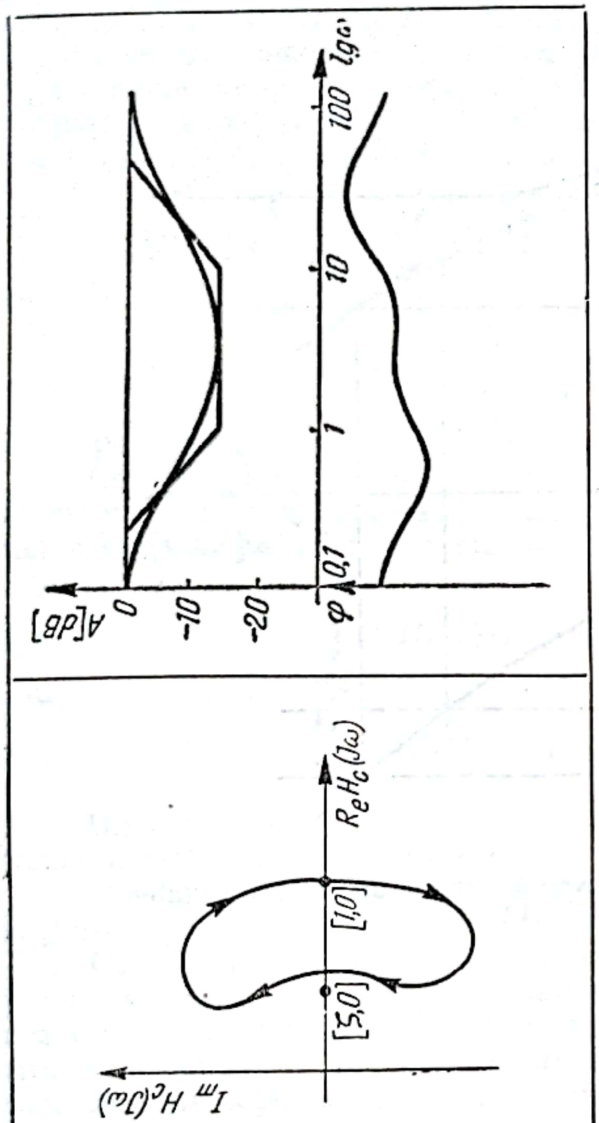
Ţinînd seama de intrarea rampă dată şi de cerinţa de eroare în regim staţionar $\varepsilon_{st}=\pi/10$, se obţine coeficientul de eroare de viteză corespunzătoare $K_{v_2}\geqslant2\pi/(\pi/10)=20\ s^{-1}$. Astfel, cerinţele în regim staţionar pot fi satisfăcute prin introducerea în sistem a unui element pro-

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 4.1

Caracteristicile de frecvență ale rețelelor specifice uzuale

Tipul rețelei de corecție	Funcția de transfer	Locul de transfer	Caracteristicile logaritmice de frecvență
1	2	3	4
Anticipație	$H_c(s)=\frac{s+a}{s+b}$		
Întîrziere	$H_c(s)=\frac{a}{b}\cdot\frac{s+b}{s+a}$		

Întîrziere—anticipație	$H_c(s)=\frac{(s+a_1)(s+b_2)}{(s+b_1)(s+a_2)}$ $\frac{a_1b_2}{b_1a_2}=1$; $\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}$ $a_i, b_i>0$	

porțional cu factorul de amplificare $\lambda_1=10$ sau $\lambda_1=20$ dB. Creșterea factorului de amplificare al căii directe cu 20 dB conduce la o margine de cîștig $M_c=-8$ dB și o margine de fază $M\varphi=-28°$, așa cum se poate citi direct din figura 4.17.

Pentru a obține o margine de fază conform specificațiilor, se impune introducerea în serie a unei rețele de compensare cu avans de fază cît mai mare și corespunzător trebuie cuplată această rețea cu un factor de amplificare b/a de valoare mare, care asigură creșterea factorului de amplificare la frecvențe medii și frecvențe înalte.

Alegem o cascadă de două rețele de anticipație pentru acest exemplu și un factor de amplificare $b/a=10$, avînd funcția de transfer în domeniul frecvențelor de forma

$$H_c(j\omega)=\frac{(1+j\omega/a)^2}{(1+j\omega/10a)^2}.$$

Alegînd valoarea lui a care să asigure performanțele cerute, problema dimensionării rețelei de corecție și deci a compensării sistemului este rezolvată.

Pentru $a=4$ caracteristicile de frecvență au aspectul din figura 4.18, iar performanțele obținute sînt: $M_c=14$ dB, $M\varphi=50°$ și $\omega_1=14$ rad/s.

Structura generală a sistemului compensat este prezentată în figura 4.19.

Într-o manieră similară se poate arăta efectul unei rețele de corecție de întîrziere asupra caracteristicilor de frecvență în reprezentare logaritmică ținînd seama de caracteristicile acestui tip de rețea de corecție prezentat în tabelul 4.1.

Scanned with OKEN Scanner

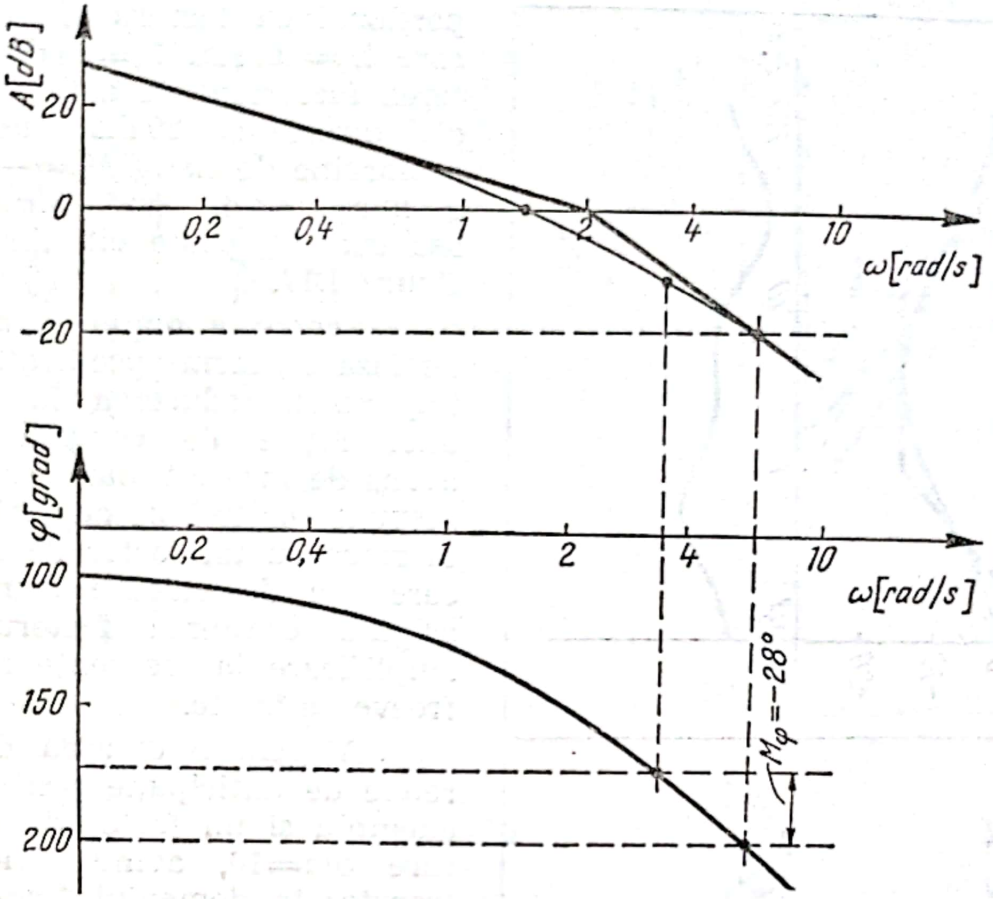


Fig. 4.17. Caracteristicile de frecvență pentru un sistem instabil (exemplul 4.1).

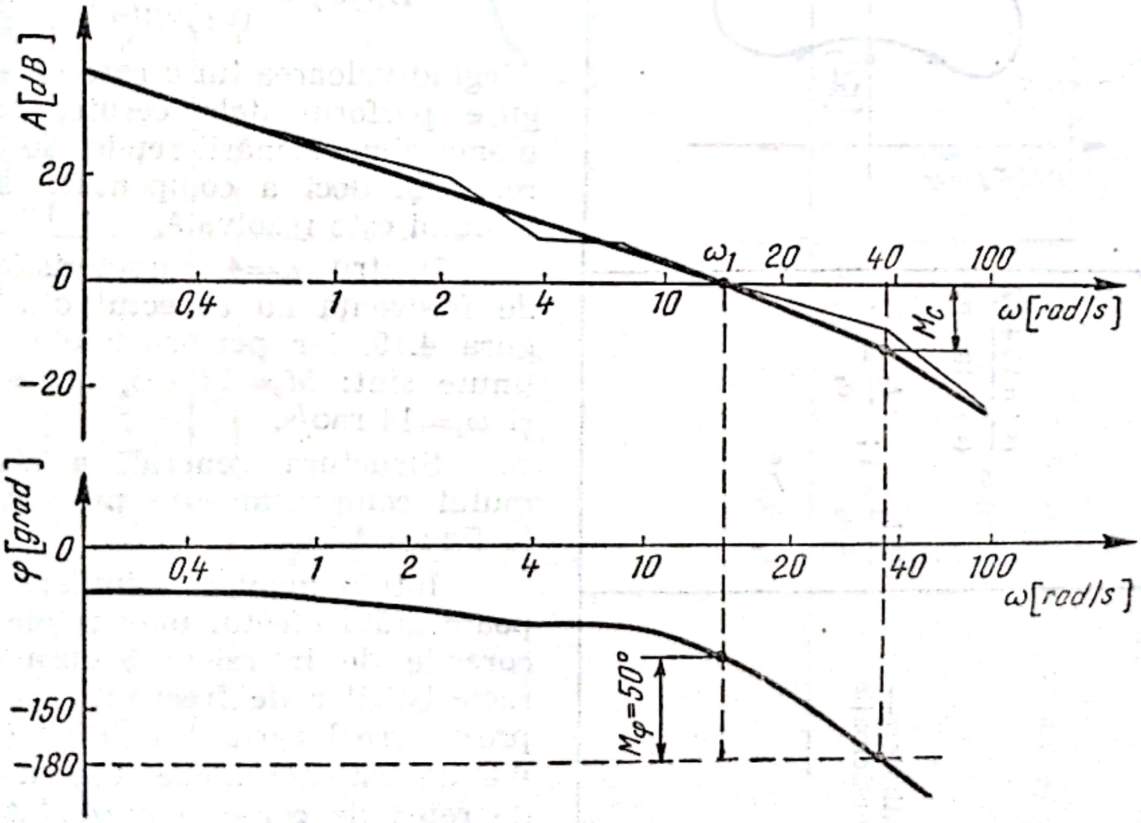


Fig. 4.18. Caracteristicile de frecvență pentru sistemul compensat.

Scanned with OKEN Scanner

O altă metodă de corectare a performanţelor unui sistem automat constă în compensarea directă a perturbaţiilor ce determină apariţia erorilor staţionare în sistem (fig. 4.20, *a*). În acest caz se impune ca perturbaţiile respective să fie accesibile măsurării. Eroarea determinată de perturbaţia $P(s)$ este dată de relaţia

$$\varepsilon_p(s)=\frac{H_2(s)}{1+H_1(s)\cdot H_2(s)}\cdot\cdot P(s) \tag{4.22}$$

sau

$$\varepsilon_p(s)=\frac{1}{1+H_1(s)\cdot H_2(s)}\cdot\cdot P(s), \tag{4.23}$$

dacă perturbaţia se aplică la ieşirea sistemului (fig. 4.20, *b*).

Corecţia după perturbaţie presupune introducerea în sistem a unui element de automatizare ca în figura 4.21. Pentru ca efectul perturbaţiei asupra erorii în regim staţionar să fie nul trebuie îndeplinită condiţia

$$H_{cp}(s)\cdot H_1(s)\cdot H_2(s)=H_2(s) \tag{4.24}$$

sau

$$\lim_{s\to 0}\ [H_{cp}(s)\cdot H_1(s)]=1. \tag{4.25}$$

Un sistem astfel corectat se spune că este invariant în raport cu perturbaţia $p(t)$, atît în regim staţionar cît şi în regim tranzitoriu.

Problemele legate de compensarea şi a altor performanţe prin reglare după perturbaţie sînt prezentate în capitolul 7.

Corectarea unei performanţe a sistemului în general determină o modificare şi a celorlalte performanţe, şi de aceea se impune combinarea diverselor tehnici de compensare pentru a obţine comportarea dorită a sistemului. Trebuie reţinut faptul că aplicarea unei tehnici de corectare presupune verificarea realizabilităţii fizice a reţelei de corecţie.

Reţelele de corecţie pot fi electrice, mecanice, hidraulice sau pneumatice, în funcţie de tipul sistemului ce se impune a fi compensat.

Parametrii reţelelor electrice pasive de anticipaţie, întîrziere şi combinate pot fi obţinuţi printr-o alegere corespunzătoare a valorilor elementelor de circuit.

Pentru o reţea de corecţie de anticipaţie (fig. 4.22), funcţia de transfer se obţine pornind de la ecuaţia

$$C\frac{d}{dt}(u_1-u_2)+\frac{1}{R_1}(u_1-u_2)=\frac{1}{R_2}u_2, \tag{4.26}$$

care reprezintă aplicarea legii lui Kirchoff nodului A, în ipoteza că se neglijează curentul debitat de reţea spre elementul următor.

Aplicînd transformata Laplace ecuaţiei (4.26) pentru condiţii iniţiale nule, se obţine

$$Cs(U_1(s)-U_2(s))+\frac{1}{R_1}(U_1(s)-U_2(s))=\frac{1}{R_2}U_2(s), \tag{4.27}$$

Scanned with OKEN Scanner

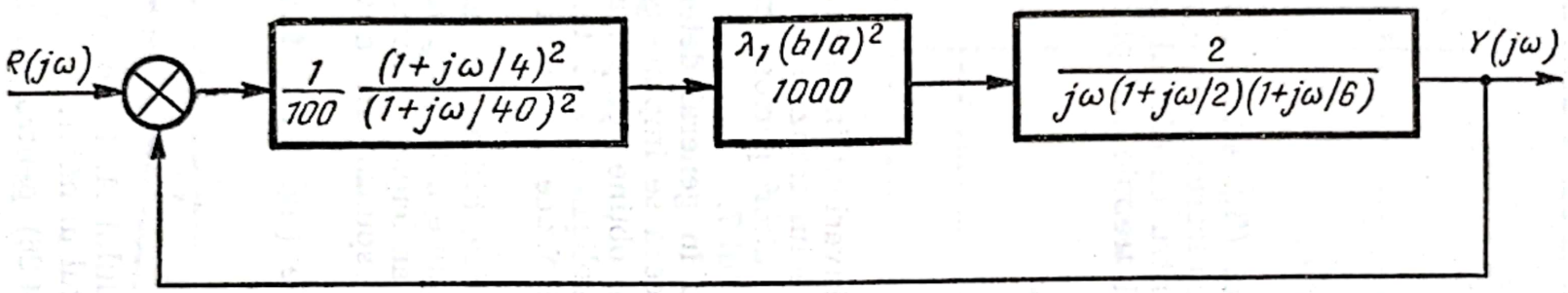


Fig. 4.19. Structura generală a sistemului compensat.

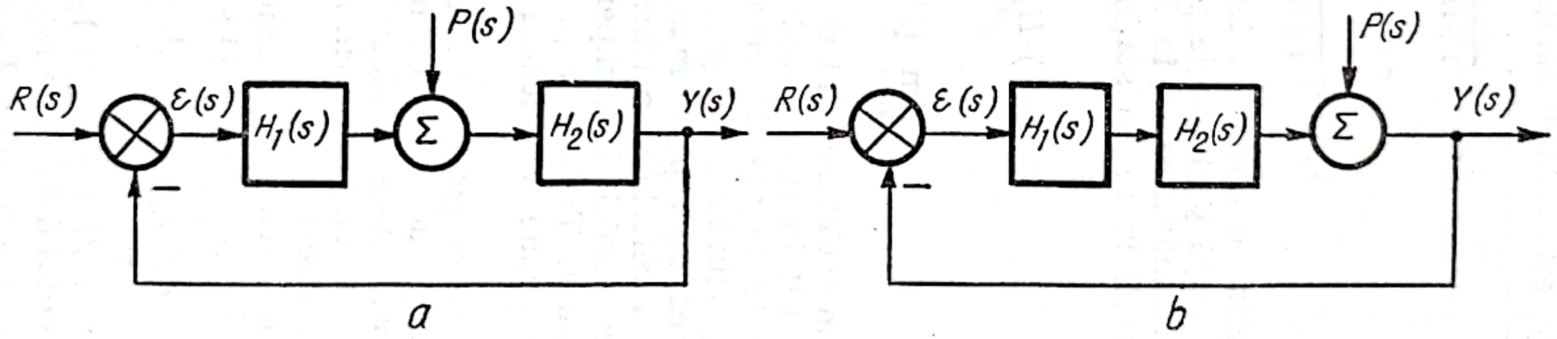


Fig. 4.20. Structura unui sistem supus variației intrării $R(s)$ și perturbației $P(s)$.
a — perturbația se aplică la intrarea procesului; *b* — perturbația se aplică la ieșirea procesului.

Scanned with OKEN Scanner

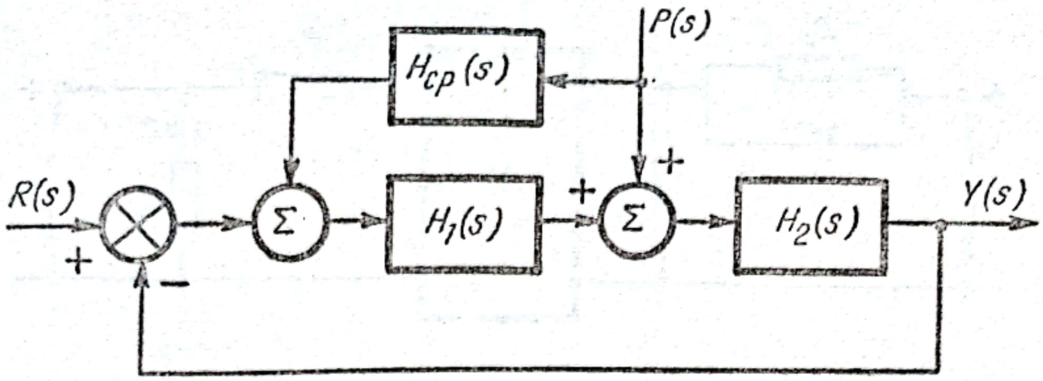


Fig. 4.21. Structura generală a unui sistem cu compensarea perturbației.

iar funcția de transfer capătă forma

$$H_{Ca}(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=\frac{Cs+1/R_1}{Cs+1/R_1+1/R_2}=\frac{s+a}{s+b}, \tag{4.28}$$

unde: $a=1/R_1C$ și $b=1/R_1C+1/R_2C$.

În mod similar se determină funcția de transfer pentru o rețea de corecție de întîrziere (fig. 4.23).

Prin aplicarea teoremei a doua a lui Kirchhoff buclei *I*, se obține relația

$$i\,R_1+\frac{1}{C}\int_0^t i\,dt+i\,R_2=u_1, \tag{4.29}$$

a cărei transformată Laplace este

$$[R_1+R_2+\frac{1}{Cs}]I(s)=U_1(s).$$

Tensiunea de ieșire poate fi exprimată în funcție de $I(s)$ astfel

$$U_2(s)=(R_2+\frac{1}{Cs})I(s),$$

iar (în ipoteza că se neglijează curentul debitat spre exterior) funcția de transfer a acestei rețele de compensație se definește prin

$$H_{ci}(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=\frac{R_2+\frac{1}{Cs}}{R_1+R_2+\frac{1}{Cs}}=\frac{a(s+b)}{b(s+a)}, \tag{4.30}$$

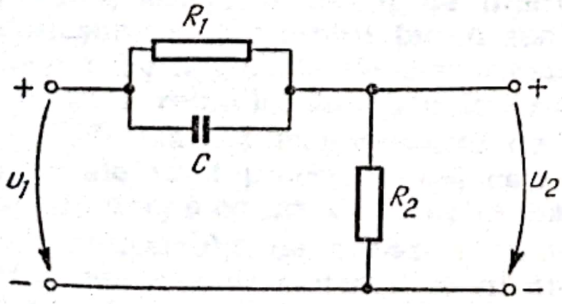


Fig. 4.22. Rețea de corecție de anticipație.

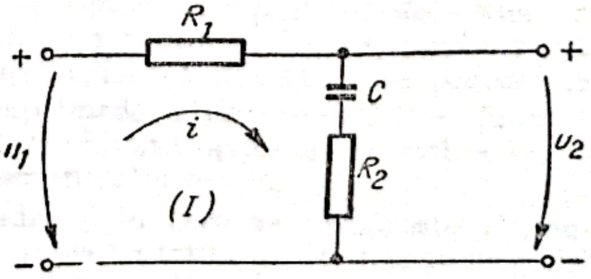


Fig. 4.23. Rețea de corecție de întîrziere.

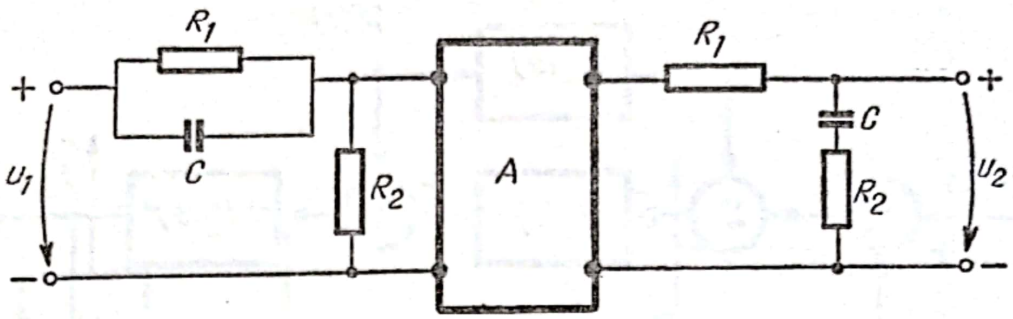


Fig. 4.24. Rețea de corecție de anticipație-întîrziere.

unde:

$$a=\frac{1}{(R_1+R_2)\,C} \text{ și } b=\frac{1}{R_2C}.$$

Prin cuplarea în serie a acestor două rețele de corecție prin intermediul unui amplificator de separare, astfel încît rețeaua de întîrziere să nu reprezinte sarcina rețelei de anticipare (fig. 4.24), se obține o rețea compusă anticipație-întîrziere.

Funcția de transfer a acestui sistem, pentru cazul cînd amplificatorul are factor de amplificare egal cu unitatea, este dată de produsul funcțiilor de transfer (4.28) și (4.30)

$$H_{Cai}(s)=H_{Ca}(s)\cdot H_{Ci}(s)=\frac{s+a_1}{s+b_1}\cdot\frac{s+b_2}{s+a_2}\cdot\frac{a_2}{b_2}.$$

Pentru această rețea de corecție $a_1<b_1$ și $b_2>a_2$.

Utilizarea unor elemente active pentru realizarea diverselor circuite de corecție în combinație cu rețelele pasive RC permite obținerea unor sisteme (regulatoare) ai căror parametri pot fi modificați în limite largi. Alegerea unui anumit tip de circuit de corecție se face în concordanță cu cerințele de performanță impuse și cu tipul sistemului ce trebuie compensat. Verificarea realizabilității fizice a circuitului de corecție se impune ca o etapă esențială a procesului de corecție al sistemelor. În literatură [46, 59] sînt prezentate și alte tipuri de rețele de corecție mecanice, electrice, hidraulice.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 5

IDENTIFICAREA ŞI REPREZENTAREA MATEMATICĂ A PROCESELOR TEHNICE

5.1. PRINCIPIILE ŞI METODELE UTILIZATE PENTRU IDENTIFICARE

Cunoaşterea cît mai exactă a funcţionării proceselor tehnologice, atît în regim staţionar cît şi în regim tranzitoriu, constituie o etapă esenţială în proiectarea şi realizarea sistemelor automate. Determinarea algoritmului de reglare sau de conducere automată în cazul unor procese complexe necesită cunoaşterea cît mai exactă a caracteristicilor instalaţiilor tehnologice, a influenţei diverselor mărimi de intrare şi perturbatoare asupra ieşirii acestora. Gradul de complexitate al dispozitivelor de automatizare este determinat de cantitatea de informaţie apriorică cunoscută despre proces şi, evident, de criteriile de performanţă impuse sistemului automat. În cazul unor procese simple, la care se poate uşor stabili o relaţie funcţională între ieşirea şi intrarea acestora precum şi între ieşire şi mărimile perturbatoare, algoritmul de reglare se poate determina în concordanţă cu aceste relaţii şi cu respectarea criteriilor de performanţă ce asigură buna desfăşurare a proceselor.

Pentru procese complexe cu mai multe intrări şi mai multe ieşiri, la care se impune automatizarea complexă cu menţinerea în anumite limite a mărimilor reglate în funcţie de necesităţile tehnologice şi asigurarea anumitor relaţii de interdependenţă între ele, care să situeze desfăşurarea procesului într-o zonă de optim din punctul de vedere al unor criterii globale de performanţă, se impune o determinare cît mai precisă a relaţiilor funcţionale ce caracterizează desfăşurarea proceselor.

Forma cea mai evoluată de exprimare a caracteristicilor funcţionale ale unui proces, formă care include atît aspecte calitative cît şi cantitative, o constituie modelul matematic al acesteia.

Ansamblul de metode şi procedee prin care se urmăreşte obţinerea unor modele matematice cît mai reprezentative pentru procesele investigate constituie un domeniu al automaticii şi poartă denumirea de *identificarea proceselor.*

Scanned with OKEN Scanner

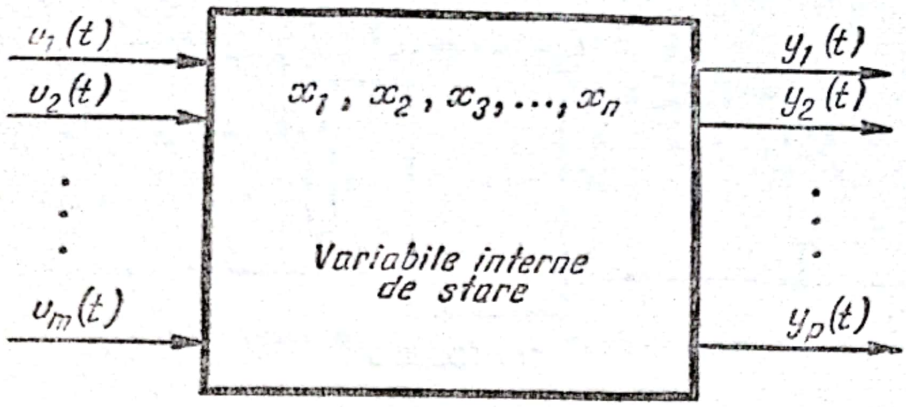


Fig. 5.1. Forma generală a modelului unui proces multivariabil.

Cunoașterea modelului matematic al proceselor este importantă atît pentru proiectarea sistemelor de automatizare convenționale dar mai ales pentru proiectarea sistemelor de automatizare complexă a proceselor multivariabile.

Forma generală a modelului matematic al unui proces multivariabil (fig. 5.1) este:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t); \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{G}(\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t), t), \end{aligned} \tag{5.1}$$

unde:

$\mathbf{y}(t)$ este vectorul variabilelor de ieșire ale procesului;
$\mathbf{u}(t)$ — vectorul variabilelor de intrare (de comandă);
$\mathbf{x}(t)$ — vectorul variabilelor de stare ale procesului.

Caracterul liniar sau neliniar al funcțiilor **F** și **G** determină tipul procesului. Un proces liniar este descris de următoarele ecuații:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{u}(t); \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t) \cdot \mathbf{u}(t), \end{aligned} \tag{5.2}$$

Matricele **A, B, C** și **D** sînt dependente de timp în cazul proceselor cu parametrii variabili în timp și sînt constante pentru procese invariante.

Stabilirea relației (5.2) și cunoașterea exactă a matricelor **A, B, C** și **D,** scrierea ecuației diferențiale sau a funcției de transfer pentru un proces monovariabil și determinarea exactă a coeficienților acestora constituie obiectul identificării proceselor tehnologice. Identificarea presupune determinarea atît a caracteristicilor statice cît și dinamice a proceselor, avînd în vedere faptul că performanțele sistemelor automate trebuie satisfăcute atît în regim staționar cît și în regim tranzitoriu.

Caracteristicile statice reprezintă dependența mărimilor de ieșire ale proceselor de mărimile care acționează la intrarea acestora în regim staționar, adică în regimul în care derivatele în raport cu timpul ale acestor mărimi sînt nule. Pentru un proces cu o ieșire și mai multe intrări, caracteristica statică se poate exprima printr-o relație de forma

$$y = f(u_1, u_2, \ldots, u_m). \tag{5.3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă procesul este considerat liniar, atunci caracteristica statică poate fi reprezentată de un polinom liniar

$$y=a_0+a_1u_1+a_2u_2+\ldots+a_mu_m. \tag{5.4}$$

în care coeficienții a_k iau valorile factorilor de amplificare de pe canalele corespunzătoare intrării u_k.

O serie de metode pentru obținerea modelului staționar care au la bază un număr redus de determinări, realizate printr-o programare adecvată a experimentării, conduc la obținerea modelului sub forma unei serii de puteri. În cadrul acestor metode — denumite *metodele experimentului factorial* — programarea experimentului se realizează astfel încît între variabilele de intrare să fie îndeplinită condiția de ortogonalitate $\sum_1^n u_k u_j=0$ pentru $j\neq k$, ceea ce simplifică calculul coeficienților a_i din modelul matematic. Metoda este cunoscută și sub numele de *metoda Box și Wilson,* care au elaborat metodologia de programare a experimentului ortogonal multifactorial.

Caracteristicile dinamice ale instalațiilor automatizate reprezintă dependența mărimilor de ieșire în raport cu timpul și cu mărimile de intrare. Aceste caracteristici $y(t)=f(u(t), t)$ se deduc prin rezolvarea modelului matematic general al procesului definit, fie sub forma ecuației diferențiale sau funcției de transfer, fie în forma matriceal-vectorială (5.2).

Multitudinea și diversitatea proceselor tehnologice supuse automatizării fac ca metodele de identificare în general să aibă un caracter limitat, existînd puține metode teoretice și experimentale cu caracter de generalitate.

Avînd în vedere că modelul matematic al unui subsistem (proces) implică o anumită relație analitică între variabilele de ieșire și de intrare ale acestuia și anumite valori ale parametrilor ce definesc acest subsistem, identificarea poate fi *globală* atunci cînd se determină atît forma cît și parametrii ce intervin în model sau o identificare a parametrilor cînd se cunoaște forma modelului matematic și se impune determinarea valorilor parametrilor. Astfel sînt utilizate *metode parametrice,* pentru obținerea modelului atunci cînd se cunoaște structura modelului și se impune determinarea parametrilor cuprinși în model, și *metode neparametrice,* care conduc la descrierea modelului printr-un set de curbe sau de valori care printr-o interpretare și prelucrare ulterioară permit deducerea completă a modelului atît ca structură cît și ca parametri.

În funcție de proces și de tipul identificării, dar și de gradul de precizie impus pentru modelul matematic, sînt cunoscute mai multe metode teoretice și experimentale pentru identificarea proceselor tehnologice.

Metodele analitice avînd la bază legile ce determină funcționarea proceselor (legile fizicii, mecanicii, chimiei etc.) permit stabilirea unor modele matematice care aproximează cel mai bine structura procesului studiat, însă o identificare a parametrilor (a coeficienților ecuației) se poate realiza mai greu, implicînd cunoașterea unui număr mare de rapoturi cantitative, dimensiuni geometrice, constante fizice etc.

Scanned with OKEN Scanner

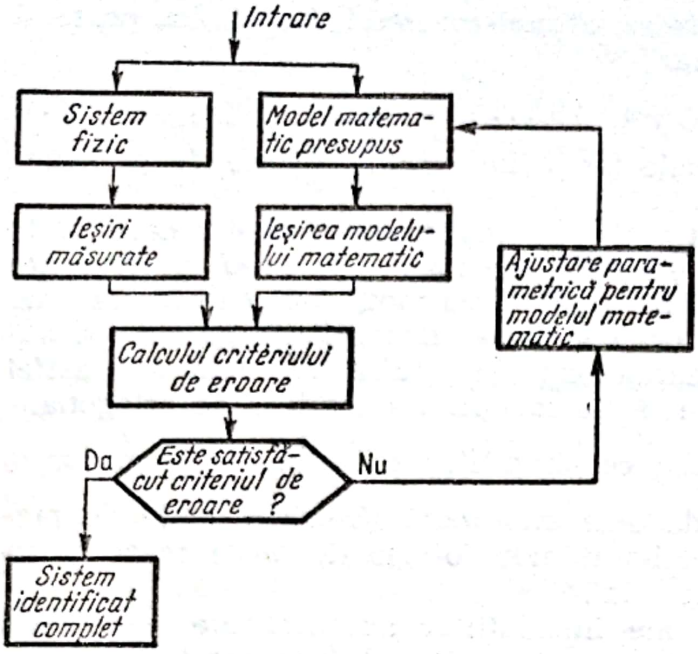


Fig. 5.2. Organigrama etapelor de identificare experimentală.

Metodele experimentale reprezintă în prezent partea de bază a identificării proceselor; acestea, pe baza măsurătorilor asupra variabilelor de intrare şi de ieşire, permit obţinerea unor modele matematice ce descriu comportarea proceselor cît mai apropiate de realitate.

Etapele ce se impun parcurse în procesul de identificare experimentală pot fi urmărite în figura 5.2. Astfel, pornind de la un model aproximativ al procesului, prin compararea cu rezultatele experimentale, se determină parametrii modelului matematic care corespund cel mai bine cu caracteristicile obţinute prin măsurători experimentale.

Adoptînd un criteriu de eroare în funcţie de ieşirile sistemului fizic supus testării şi ieşirile din modelul procesului supus aceloraşi funcţii test şi calculînd acest criteriu, în funcţie de abaterea criteriului faţă de valoarea impusă, se ajustează parametrii modelului. Operaţia de calcul al criteriului şi comparaţia cu o valoare impusă a acestuia se continuă pînă ce criteriul a fost satisfăcut. Drept criteriu de eroare poate fi utilizat în acest caz integrala erorii sau integrala erorii pătratice, eroarea reprezentînd diferenţa între ieşirea reală a procesului şi ieşirea modelului acestuia.

Prima etapă presupune ca sistemul să fie supus unor teste de laborator, evidenţiindu-se variabilele ce trebuie măsurate. Identificarea se poate face în timpul funcţionării procesului (on-line) sau ulterior (off-line). În cazul identificării on-line sînt folosite semnale intrare-ieşire ale sistemului în timpul funcţionării normale, modelul sistemului se obţine în timp real. Schemele de identificare off-line pot utiliza semnale normale de funcţionare care au fost colectate şi înregistrate pentru a fi analizate mai tîrziu.

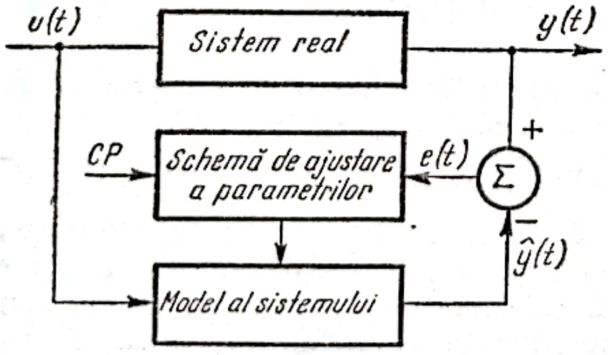


Fig. 5.3. Schema generală pentru estimarea parametrilor unui sistem.

O schemă generală de identificare a parametrilor unui sistem este prezentată în figura 5.3.

Sistemul este identificat cînd eroarea $e(t)$ între ieşirea sistemului real $y(t)$ şi ieşirea modelului $\hat{y}(t)$ este zero sau foarte a-

Scanned with OKEN Scanner

proape de zero. Criteriul de performanţă *CP* este utilizat pentru determinarea concordanţei dintre model şi sistemul real. În funcţie de modul în care se obţin datele asupra procesului supus identificării se cunosc: *metode active*, care implică aplicarea intenţionată a unor semnale de testare în scopul obţinerii informaţiei necesare identificării, şi *metode pasive*, care folosesc pentru identificare mărimile ce apar în funcţionarea normală a procesului.

Cunoscînd scopul final al identificării şi ţinînd seama de informaţia apriorică despre proces se va adopta o metodă sau alta de identificare, în funcţie de aceasta se va alege tipul de semnal pentru testare, se va efectua identificarea în timp real sau nu, utilizînd sau nu calculatorul pentru identificarea procesului.

5.2. IDENTIFICAREA EXPERIMENTALĂ A PROCESELOR

Principalele operaţii ce trebuie efectuate în vederea obţinerii modelului matematic al unui proces pe baza rezultatelor experimentale sînt:

a) organizarea şi realizarea experimentărilor pe proces;

b) interpretarea şi prelucrarea rezultatelor determinărilor experimentale;

c) deducerea modelului prin aproximarea matematică a rezultatelor.

În legătură cu prima operaţie trebuie avute în vedere informaţia apriorică despre proces, (pentru a putea stabili obiectul identificării), parametrii ce trebuie măsuraţi, restricţiile impuse experimentului şi, de asemenea, trebuie cunoscute condiţiile de desfăşurare a experimentului în laborator sau în condiţii normale de funcţionare şi respectiv nivelul perturbaţiilor ce pot acţiona asupra procesului. Modul de organizare a experimentărilor, alegerea semnalelor utilizate pentru testare precum şi modul de măsurare a mărimilor de la ieşire reprezintă operaţii importante în procesul de identificare.

Eficienţa metodelor de identificare experimentală depinde esenţial de strategia adoptată la testarea procesului tehnologic. În funcţie de tipul procesului, respectiv de viteza de evoluţie a acestuia, se vor alege funcţiile de testare precum şi modul de măsurare a mărimilor de la ieşirea procesului. Precizia de identificare depinde în egală măsură de modul de organizare a experimentului, de tipul intrării şi de modul prelucrării informaţiilor obţinute prin testarea procesului.

Selecţionarea şi sistematizarea rezultatelor experimentale în scopul desprinderii informaţiei utile din colecţia de date obţinute prin măsurători implică corectarea erorilor de metodă, de aparat, de transmisie etc., conform procedeelor cunoscute din teoria măsurării şi transmiterii informaţiei [50].

Cea de-a treia etapă se poate prezenta fie sub forma determinării valorilor coeficienţilor unui model cunoscut, ca formă, fie, în cazul general, determinarea atît a formei modelului cît şi a parametrilor acestuia. În primul caz pentru evaluarea parametrilor se apelează la me-

Scanned with OKEN Scanner

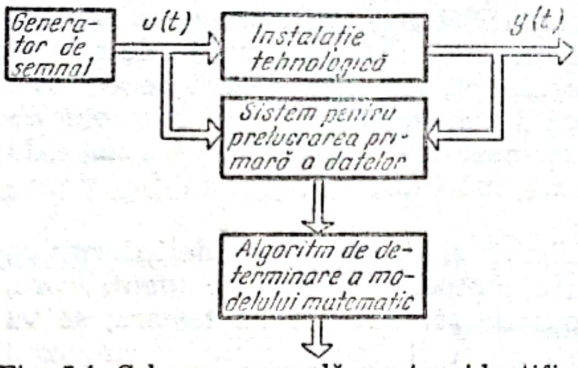


Fig. 5.4. Schema generală pentru identificarea experimentală cu ajutorul semnalelor de probă.

tode bazate pe minimizarea erorilor de aproximare (metoda celor mai mici pătrate, metoda seriilor de funcții ortonormale etc.) [50].

În cel de-al doilea caz se determină mai întîi caracterul procesului (dacă este cu parametri constanți sau cu parametri variabili), domeniul de liniaritate al acestuia și, în funcție de aceste date și de informația apriorică, se adoptă un anumit principiu de scriere al modelului matematic.

Ținînd seama de dificultățile de deducere a modelului matematic pe baza acestor date se apelează la metode grafice sau metode analitice, care permit obținerea relativ simplă a modelului matematic al proceselor.

Schema generală de aplicare a unui semnal de probă a unui proces supus identificării, cu echipamentele necesare pentru prelucrarea datelor experimentale, este prezentată în figura 5.4.

Utilizarea unor semnale de probă de tip impuls unitar, treaptă unitară, semnal sinusoidal sau semnal pseudoaleator binar permite obținerea unor modele matematice neparametrice sub forma funcției pondere, funcției indiciale sau caracteristicii de frecvență.

În cele ce urmează vom prezenta cîteva metode de identificare pe baza rezultatelor experimentale.

Există mai multe variante de obținere a funcției de transfer a procesului $H_f(s)$ după aspectul răspunsului indicial $h(t)$ al acestuia [13, 18, 10].

O variantă care conduce la o aproximație grosieră prevede trasarea tangentei în punctul de inflexiune I al răspunsului indicial (fig. 5.5) și stabilirea punctelor de intersecție A și B ale acestei tangente cu axa timpului și cu axa orizontală ce definește valoarea de regim staționar $y(\infty)=y_{st}$.

Astfel, pentru un răspuns indicial de tipul celui prezentat în figura 5.5, răspuns obținut prin aplicarea la intrarea procesului a unei mărimi de execuție sub formă de treaptă unitară, se poate aproxima funcția de transfer sub forma

$$H_R(s)=\frac{K_f\cdot e^{-\tau s}}{Ts+1}, \qquad (5.5)$$

unde: $K_f=y_{st}$, întrucît constanta de timp T și timpul mort τ intervin numai în regim tranzitoriu:

$y_{st}=y(\infty)=K_f\cdot u(t)=K_f$; ($u(t)$ este o treaptă unitară);

T este proiecția lui AB pe axa timpului;

$\tau=OA$.

În acest caz răspunsul tranzitoriu al procesului determinat experimental poate fi aproximat printr-un proces tranzitoriu caracterizat

Scanned with OKEN Scanner

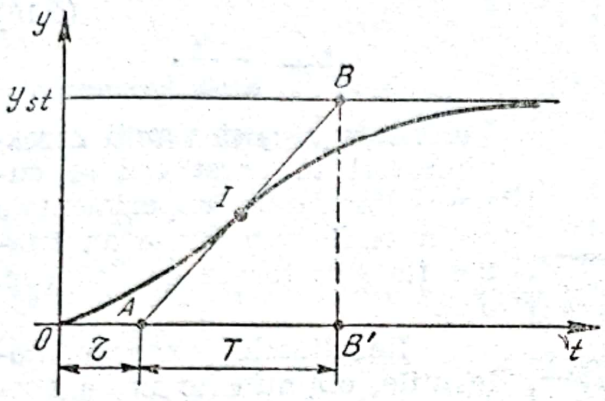


Fig. 5.5. Răspunsul indicial al unui proces.

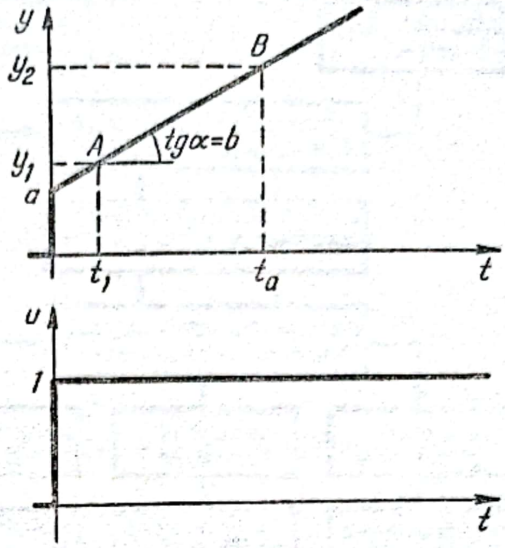


Fig. 5.6. Răspunsul indicial al unui regulator PI utilizat pentru estimarea parametrilor.

de un timp mort τ și o constantă de timp T, determinate ca în figura 5.5.

Alte variante de aproximare [64, 27] conduc de la răspunsul indicial la funcții de transfer caracterizate de un timp mort τ și două constante de timp T_1 și T_2, avînd expresia

$$H_f(s)=\frac{K_f\cdot e^{-\tau s}}{(1+T_1 s)\ (1+T_2 s)}; \tag{5.6}$$

Un grad de precizie mai ridicat se obține prin variantele de aproximare [64], care conduc de la răspunsul indicial la funcții de transfer de forma

$$H_f(s)=\frac{K_f\cdot e^{-\tau s}}{(1+Ts)^n}. \tag{5.7}$$

Asemenea aproximări se bazează pe faptul că o funcție de transfer caracterizată de n constante de timp diferite $T_1, T_2, \ldots T_n$ poate fi cu bună precizie aproximată printr-o funcție de transfer conținînd de n ori o aceeași constantă de timp.

Pentru evaluarea modelului unui regulator de tip *PI* al cărui răspuns indicial îl cunoaștem (fig. 5.6), procedăm după cum urmează.

Expresia analitică a ieșirii pentru o intrare treaptă unitară, este

$$y(t)=a+b\,t. \tag{5.8}$$

Se cere determinarea parametrilor a și b.

Admitem că dreapta este fixată prin punctele A și B cu coordonatele (y_1, t_1) și (y_2, t_2) sau:

$$\begin{aligned} y_1&=a+b\,t_1;\\ y_2&=a+b\,t_2. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Scanned with OKEN Scanner

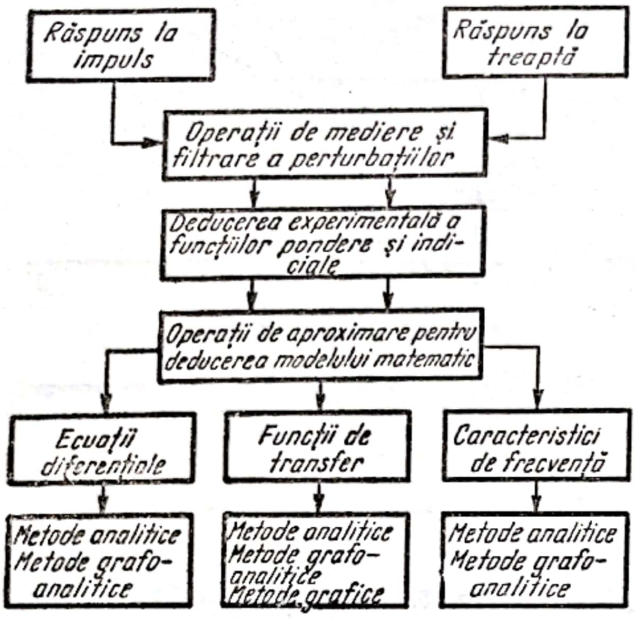


Fig. 5.7. Clasificarea metodelor pentru identificarea experimentală.

Prin rezolvarea acestui sistem de ecuații se obține:

$$a=y_1-\frac{y_1-y_2}{t_1-t_2}\cdot t_1;$$
$$b=\frac{y_1-y_2}{t_1-t_2}. \qquad (5.10)$$

Valorile y_1, y_2 și timpii corespunzători în acest caz se cunosc din datele experimentale obținute fie sub forma unui tabel fie sub forma grafică (fig. 5.6).

Rezultatele experimentale utile, obținute în urma operațiilor de prelucrare a informațiilor prin testarea procesului, se prezintă sub forma unor tabele de valori sau sub forma unor reprezentări grafice ale funcției indiciale sau funcției pondere. Pe baza acestor rezultate se poate determina un model matematic sub forma unei ecuații diferențiale sau sub forma funcției de transfer sau caracteristicii de frecvență.

Cele mai utilizate metode de aproximare matematică a rezultatelor experimentale obținute cu semnale neperiodice sînt prezentate în figura 5.7 [50].

Metodele analitice utilizate pentru determinarea unor expresii analitice în domeniul timpului sînt: metoda celor mai mici pătrate pentru aproximarea cu sume de exponențiale, metoda de aproximare cu funcții ortonormale și metode de aproximare prin serii de putere.

O metodă grafo-analitică pentru determinarea modelului matematic în domeniul timpului este *metoda logaritmării succesive* pentru aproximarea răspunsului indicial cu sume de exponențiale. Această metodă a logaritmării succesive este prezentată în cele ce urmează.

Dispunînd de funcția indicială și în condițiile în care nu apar componente oscilatorii, în răspunsul obținut experimental aproximarea se poate face sub forma

$$\tilde{h}(t)=C_0-\sum_{i=1}^{n} C_i e^{-p_i t}, \qquad (5.11)$$

unde: $C_0=h_{st}=h(\infty)$ este valoarea de stabilizare a funcției indiciale;

C_i sînt coeficienți reali;

p_i — rădăcinile reale ale ecuației caracteristice (se admite că ecuația caracteristică are numai rădăcini reale negative).

Scanned with OKEN Scanner

Dacă punem în evidenţă constantele de timp ce caracterizează regimul tranzitoriu al procesului $p_i = \frac{1}{T_i}$, relaţia (5.11) poate fi scrisă şi sub forma

$$h(t) = C_0 - \sum_{i=1}^{n} C_i e^{-\frac{t}{T_i}}.$$

Valoarea redusă a lui p_i atrage după sine o constantă de timp de valoare mare şi invers întrucît $T_i = \frac{1}{p_i}$.

Trebuie determinaţi coeficienţii C_i, exponenţii p_i şi numărul n de termeni ai sumei, respectiv ordinul ecuaţiei diferenţiale.

Metoda logaritmării succesive are la bază aproximarea succesivă a răspunsului cu elemente de ordinul întîi, doi, ş.a. m.d., pînă ce aproximarea este bună.

Dacă p_1 este valoarea cea mai mică a exponenţilor (din rădăcinile ecuaţiei caracteristice), dat fiind că viteza de descreştere a termenului $C_1 e^{-p_1 t}$ este cea mai mică, putem scrie relaţia aproximativă

$$\tilde{h}(t) \simeq C_0 - C_1 e^{-p_1 t} = C_0 - C_1 e^{-\frac{t}{T_1}} \tag{5.12}$$

sau

$$C_0 - \tilde{h}(t) = \tilde{h}_1(t) = C_1 e^{-p_1 t} = C_1 e^{-\frac{t}{T_1}}, \tag{5.13}$$

relaţie valabilă pentru valori mari ale timpului, cînd influenţa celorlalţi termeni ai sumei poate fi neglijată. În acest caz răspunsul indicial este aproximat numai printr-o constantă de timp T_1.

Logaritmînd relaţia (5.13) obţinem

$$\ln | \tilde{h}_1(t) | = \ln | C_1 | - p_1 t, \tag{5.14}$$

care reprezintă ecuaţia unei drepte în coordonate semilogaritmice.

Construcţia acestei drepte se poate efectua simplu, calculînd valorile funcţiei $\tilde{h}_1(t) = C_0 - \tilde{h}(t)$ din curba experimentală pentru diverse valori ale timpului t şi trasînd graficul $\tilde{h}_1(t)$. *Dacă* $\tilde{h}_1(t)$ poate fi aproximat prin soluţia unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi, atunci diferenţa $\tilde{h}_2(t) = \tilde{h}_1(t) - C_1 e^{-p_1 t}$ va fi nulă, în general numai la valori mari ale timpului. Dacă această diferenţă nu este nulă, se reia calculul considerînd încă un termen important $C_2 e^{-p_2 t}$; astfel se aproximează:

$$\tilde{h}_2(t) = \tilde{h}_1(t) - C_1 e^{-p_1 t} = C_2 e^{-p_2 t} \tag{5.15}$$

$$\ln | \tilde{h}_2(t) | = \ln | C_2 | - p_2 \cdot t, \tag{5.16}$$

relaţie care, de asemenea, reprezintă o dreaptă uşor de identificat (fig. 5.8).

În cazul cînd nici cu această aproximare diferenţa

$$\tilde{h}_3(t) = \tilde{h}_2(t) - C_2 e^{-p_2 t} \tag{5.17}$$

Scanned with OKEN Scanner

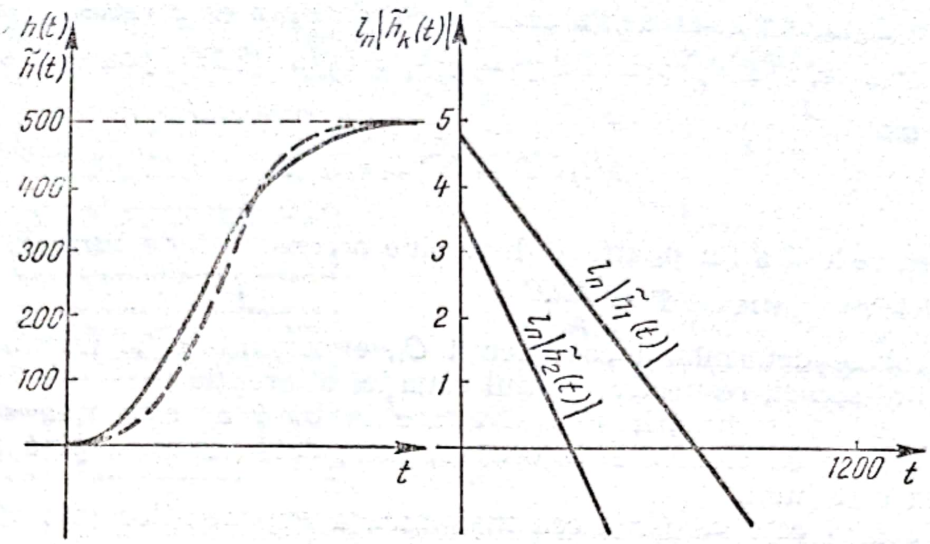


Fig. 5.8. Identificarea unui proces prin metoda logaritmării succesive.

nu este zero, calculul se continuă pînă se obține numărul de termeni ce aproximează cel mai bine funcția indicială experimentală pe întregul interval de timp pentru care este definită această funcție indicială.

Pentru calculul funcției de transfer din răspunsul indicial se poate utiliza și metoda suprafeței [50].

Forma cea mai generală a funcției de transfer a unui proces considerat a fi liniar și conținînd timpul mort τ este

$$H(s)=\frac{K\left(\sum_1^m b_i s^i+1\right)}{\sum_1^n a_i s^i+1}e^{-\tau s}, \tag{5.18}$$

Prin identificare se cere determinarea lui K, b_i, a_i și τ. Valorile lui K și τ se pot determina din porțiunea finală a răspunsului indicial $K=h(\infty)$ și τ din porțiunea inițială a acestuia $h(\tau)\leqslant\varepsilon$.

Considerînd cazul simplificat al funcțiilor de transfer ce nu conțin zerouri

$$H(s)=\frac{K}{1+\sum_1^n a_i s^i}, \tag{5.19}$$

se poate utiliza așa-numita metodă a suprafeței pentru determinarea coeficienților a_i. Metoda constă în calculul succesiv al suprafeței delimitate de curba indicială experimentală și curbele indiciale teoretice corespunzînd unor funcții de transfer de diverse ordine crescătoare, pînă cînd se obține o diferență a suprafețelor nulă.

Se începe cu calculul suprafeței mărginite de curba $K-h(t)$, $h(t)$ fiind funcția indicială determinată experimental

$$S_1=\int_0^\infty [K-h(t)]dt=\lim_{s\to 0}\int_0^\infty e^{-st}[K-h(t)]dt=\lim_{s\to 0}\mathcal{L}[K-h(t)], \tag{5.20}$$

Scanned with OKEN Scanner

dar

$$\mathfrak{L}[K-h(t)]=\frac{K}{s}-H(s)\cdot\frac{1}{s}=\frac{K\sum_{1}^{n}a_i s^{i-1}}{1+\sum_{1}^{n}a_i s^i}. \tag{5.21}$$

Luînd limita expresiei (5.21) pentru $s\to 0$, se obţine

$$S_1=K\cdot a_1.$$

Suprafaţa S_1 se poate evalua grafic prin efectuarea diferenţei între suprafaţa mărginită de dreapta paralelă cu axa absciselor la distanţă egală cu K şi curba $h(t)$ a funcţiei indiciale experimentale. Funcţia de transfer ce aproximează răspunsul indicial în acest caz are forma

$$H(s)=\frac{K}{1+a_1 s}, \tag{5.22}$$

iar funcţia indicială corespunzătoare este

$$h_1(t)=\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{K}{1+a_1 s}\cdot\frac{1}{s}\right]. \tag{5.23}$$

Următoarea suprafaţă ce se cere aproximată este dată de relaţia

$$S_2=\int_0^\infty dt\int_0^t [h_1(t)-h(t)]\,dt=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s_1}\mathfrak{L}[h_1(t)-h(t)]=K\,a_2. \tag{5.24}$$

Funcţia de transfer obţinută în urma acestei a doua aproximări este dată de relaţia

$$H(s)=\frac{K}{1+a_1 s+a_2 s^2}, \tag{5.25}$$

iar funcţia indicială corespunzătoare

$$h_2(t)=\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{K}{1+a_1 s+a_2 s^2}\cdot\frac{1}{s}\right]. \tag{5.26}$$

Repetînd operaţia de aproximare prin calculul suprafeţelor S_i, se obţin toţi coeficienţii a_i ai funcţiei de transfer. Ordinul n al sistemului se calculează dacă se compară suprafeţele S_n cu S_{n+1}. Dacă diferenţa lor este neglijabilă, atunci ultimul termen calculat va rămîne a_n, ceilalţi coeficienţi fiind neglijaţi. În figura 5.9 se prezintă modul de calcul al suprafeţelor S_i şi al coeficienţilor a_i.

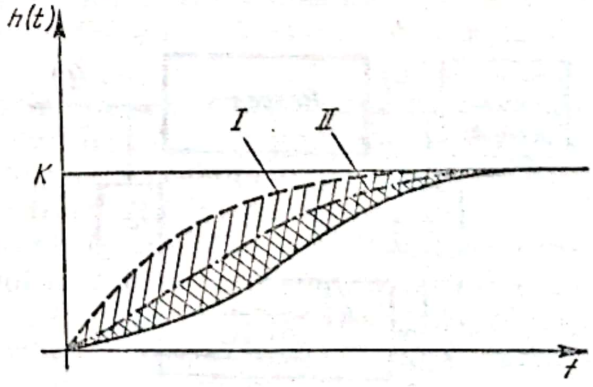


Fig. 5.9. Identificarea prin metoda suprafeţei.

Scanned with OKEN Scanner

5.3. DETERMINAREA CARACTERISTICILOR DINAMICE FOLOSIND SEMNALE DE PROBĂ PERIODICE

Alegerea semnalului de probă reprezintă una din operaţiile importante de identificare, forma, natura fizică şi parametrii acestuia determinînd gradul de complexitate al experimentului şi volumul de calcul la prelucrarea datelor experimentale.

Printre semnalele periodice cele mai uzuale sînt semnalele sinusoidale, care prezintă avantajul că, instalaţia cercetată fiind adusă în regim de oscilaţii forţate, pot fi mai uşor discriminate influenţele zgomotelor interne şi ale diferitelor perturbaţii asupra semnalului util de la ieşire, asigurîndu-se totodată o precizie uniformă pentru întreaga bandă de frecvenţe, proprie procesului cercetat. Utilizarea semnalelor de probă periodice prezintă dezavantajul că necesită aparatură specială pentru generarea semnalelor şi prelucrarea datelor. Aplicarea semnalelor sinusoidale implică verificarea următoarelor ipoteze:

— procesul este cu parametri concentraţi şi constanţi continuu;

— procesul este liniar în domeniul admis de variaţie a mărimilor de intrare şi de ieşire.

Schema simplificată pentru testarea experimentală a unui proces cu semnale periodice este prezentată în figura 5.10. Generatorul de semnal periodic permite aplicarea semnalului la intrarea procesului. Traductoarele T_i şi T_e permit măsurarea semnalului la intrare şi ieşire, iar pe ecranul osciloscopului se vizualizează aceste semnale. Pentru un proces liniar cu parametri concentraţi, la aplicarea unui semnal sinusoidal la intrare, se obţine la ieşire tot un semnal sinusoidal:

$$u(t)=A_i \sin \omega t;$$
$$y(t)=A_e \sin (\omega t+\varphi). \tag{5.27}$$

Din compararea celor două semnale pot fi obţinute caracteristicile de frecvenţă $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$ sau locul de transfer. Astfel, prin modificarea frecvenţei şi după măsurarea semnalelor la intrare şi ieşire se pot obţine caracteristicile (fig. 5.11):

$$A_k(\omega_k)=\frac{2A_e}{2A_i}\Big|_{\omega=\omega_k};$$

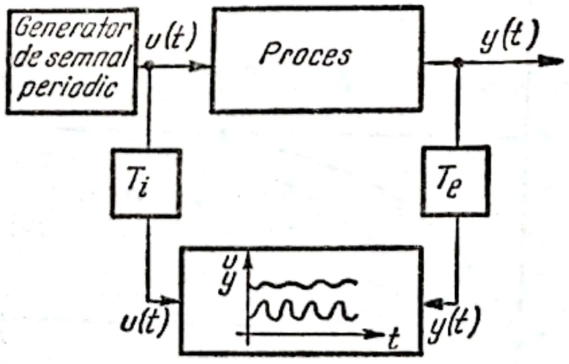


Fig. 5.10. Schema simplificată pentru testarea experimentală a unui proces.

$$\varphi(\omega_k)=-\frac{l_\varphi}{T}\cdot 360°. \tag{5.28}$$

Măsurătorile pot fi efectuate şi în cazul în care procesul este în funcţiune, într-o buclă de reglare automată. Semnalul sinusoidal în acest caz se aplică dispozitivului de fixare a mărimii de referinţă al regulatorului (fig. 5.12).

Scanned with OKEN Scanner

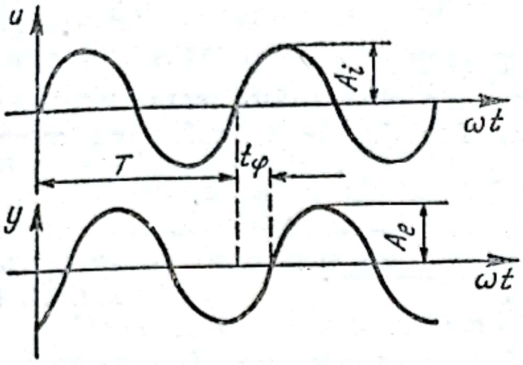


Fig. 5.11. Răspunsul unui sistem liniar testat cu ajutorul unui semnal sinusoidal.

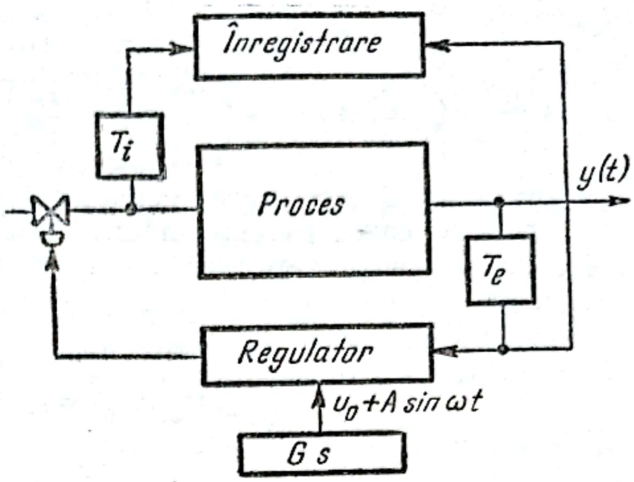


Fig. 5.12. Schema pentru ridicarea caracteristicilor de frecvență ale unui proces.

Semnalul sinusoidal $u_0+A \sin \omega t$ este aplicat prin intermediul generatorului de semnale sinusoidale *GS* la intrarea regulatorului automat. Frecvența semnalului sinusoidal și amplitudinea trebuie astfel alese încît funcționarea sistemului de reglare automată să nu fie compromisă. Semnalul sinusoidal se aplică peste semnalul de referință u_0 de la regulator.

Prelucrarea datelor se realizează în mod automat în cadrul unor dispozitive de calcul specializate denumite *transferometre* care, pe baza datelor de la intrarea și ieșirea procesului, generează direct caracteristicile de frecvență.

Această prelucrare a datelor experimentale care conduc la un model neparametric (caracteristici de frecvență) este posibilă atunci cînd procesul nu este afectat de zgomot sau cînd efectul zgomotelor poate fi neglijat.

În cazul în care în funcționarea procesului, peste semnalul sinusoidal obținut la ieșire se suprapune și zgomotul datorat perturbațiilor ce intervin, prelucrarea rezultatelor experimentale este posibil a se efectua cu ajutorul tehnicilor de corelație [50, 28]. Utilizarea funcțiilor de corelație prezintă dezavantajul că pentru o eliminare cît mai perfectă a zgomotului, timpul de corelație trebuie să fie cît mai mare iar durata de experimentare crește.

Pentru analiza și sinteza sistemelor liniare, cel mai adesea se utilizează funcția de transfer impunîndu-se identificarea unui asemenea model matematic pe baza caracteristicilor de frecvență experimentale, sau se utilizează direct caracteristicile de frecvență (v. paragr. 3.2.3).

În cadrul sistemelor la care nu există o relație de univocitate între $A(\omega)$ și $\varphi(\omega)$ datorită prezenței timpului mort și a polilor în origine, se procedează mai întîi la extragerea din caracteristica de frecvență $H(j\omega)$ a influențelor care introduc neunivocitatea între $A(\omega)$ și $\varphi(\omega)$ rezultînd $H_u(j\omega)$. Caracteristica $H_u(j\omega)$ se aproximează printr-o funcție de transfer de forma

Scanned with OKEN Scanner

$$H_u(j\omega)=\frac{\prod_1^m(1+T_i j\omega)}{\prod_1^n(1+T_k j\omega)}, \tag{5.29}$$

impunîndu-se determinarea constantelor T_i și T_k.

Pentru cazul în care neunivocitatea caracteristicilor este determinată de prezența timpului mort, atunci funcția de transfer va avea forma

$$H(s)=H_u(s)\cdot e^{-\tau s}=\frac{\prod_1^m(1+T_i s)\cdot e^{-\tau s}}{\prod_1^n(1+T_k s)}. \tag{5.30}$$

Constantele de timp se calculează din caracteristicile logaritmice de frecvență, trasînd asimptotele cu pantă standard de +20 dB/dec și determinînd pulsațiile de frîngere rezultă localizarea poli-zerouri. Timpul mort se calculează fie prin răspunsul indicial, fie, calculînd diferența între argumentul funcției $H_u(j\omega)$ și argumentul $\varphi(\omega)$ determinat experimental

$$\varphi_u(\omega)-\varphi(\omega)=\tau\omega \tag{5.31}$$

pentru cazul în care sistemul nu conține poli în origine.

Prezența polilor în origine implică o modificare a argumentului $\varphi(\omega)$. Astfel, pentru frecvențe foarte joase $\omega\to 0$, $\varphi(\omega)=-\alpha\frac{\pi}{2}$, putînd fi ușor identificat numărul de poli în origine ai sistemului. În aceste condiții, relația între argumentul $\varphi_u(\omega)$ și $\varphi(\omega)$ este de forma

$$\varphi(\omega)=\varphi_u(\omega)-\tau\omega-\alpha\frac{\pi}{2}.$$

Astfel, prin cunoașterea caracteristicilor de frecvență în reprezentare logaritmică se poate construi modelul matematic al procesului sub forma unei funcții de transfer.

5.4. DETERMINAREA CARACTERISTICILOR DINAMICE FOLOSIND SEMNALE DE PROBĂ ALEATOARE

Utilizarea semnalelor deterministe pentru identificarea proceselor în prezența perturbațiilor determină o precizie redusă, mărimile măsurate la ieșirea procesului cuprinzînd atît răspunsul acestuia la mărimile de probă aplicate cît și la componente datorită perturbațiilor. Ținînd seama de aceste neajunsuri, utilizarea unor semnale aleatoare se recomandă pentru identificarea proceselor, eliminîndu-se sau reducîndu-se influența perturbațiilor, testarea proceselor putîndu-se efectua fără scoaterea din funcție a procesului.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru interpretarea datelor experimentale se impune în acest caz stabilirea unor legături directe între caracteristicile dinamice ale procesului și rezultatele experimentale, cerîndu-se anumite proprietăți statistice prestabilite semnalelor de probă.

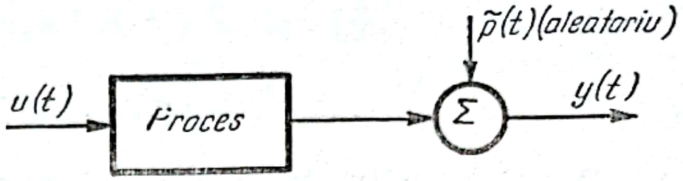


Fig. 5.13. Modelul unui proces supus semnalului aleatoriu.

Identificarea cu ajutorul semnalelor aleatoare presupune determinarea funcțiilor de corelație, de densitate spectrală, care depind atît de proprietățile dinamice ale procesului cît și de mărimile care acționează asupra acestuia.

Dacă procesul este supus unei mărimi de intrare aleatoare $u(\cdot)$, ieșirea sa $y(\cdot)$ este tot o mărime aleatoare (fig. 5.13).

Legătura statistică între intrare și ieșire este dată de *funcția de intercorelație.*

Funcția de intercorelație între intrarea și ieșirea procesului se definește prin [57, 50].

$$R_{uy}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}u(t)\,y(t+\tau)\mathrm{d}t. \tag{5.32}$$

Funcția de la ieșirea sistemului se poate calcula ținînd seama atît de efectul mărimii $u(t)$ cît și de efectul mărimii aleatoare $\tilde{p}(t)$, cu ajutorul relației

$$y(t)=\int_{0}^{\infty}w(\theta)\cdot u(t-\theta)\mathrm{d}\theta+\tilde{p}(t).$$

Funcția de autocorelație a intrării este definită prin relația

$$R_{uu}(\tau-\theta)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}u(t-\theta)\cdot u(t-\tau)\mathrm{d}t \tag{5.33}$$

și reprezintă valoarea medie a produsului mărimilor aleatoare $u(t-\theta)$ și $u(t-\tau)$ considerate în două momente separate de timp.

Funcția de autocorelație oferă o indicație asupra măsurii în care există o legătură între valorile mărimii aleatoare la două momente separate de timp.

Admițînd că perturbația și semnalul de intrare nu sînt corelate sau sînt foarte slab corelate și $\tilde{p}(t)$ are valoarea medie nulă, rezultă

$$R_{uy}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left[u(t)\cdot\int_{0}^{\infty}w(\theta)\cdot u(t-\theta)\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}t=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left[w(\theta)\cdot\int_{0}^{\infty}u(t)\cdot u(t-\theta)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\theta$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$R_{uy}(\tau)=\int_0^\infty w(\theta)\cdot R_{uu}(\tau-\theta)\mathrm{d}\theta. \tag{5.34}$$

O altă caracteristică importantă a proceselor aleatoare staţionare este *densitatea spectrală*. Se demonstrează [13, 50] că densitatea spectrală reprezintă transformata Fourier a funcţiei de corelaţie.

Aplicînd transformata Fourier relaţiei (5.34) şi ţinînd seama de teorema convoluţiei în complex se obţine

$$S_{uy}(\mathrm{j}\omega)=H(\mathrm{j}\omega)\cdot S_{uu}(\omega), \tag{5.35}$$

unde:

$S_{uu}(\omega)$ este funcţia de densitate spectrală (de putere) a mărimii de intrare;

$S_{uy}(\mathrm{j}\omega)$ — funcţia de densitate interspectrală a celor două mărimi $u(t)$ şi $y(t)$;

$H(\mathrm{j}\omega)$ — funcţia de transfer a procesului.

Alte relaţii importante pentru calculul statistic al sistemelor automate liniare sînt acelea care definesc funcţia de autocorelaţie a mărimilor de ieşire

$$R_{yy}(\tau)=\int_0^\infty w(\zeta)\mathrm{d}\zeta\int_0^\infty\cdot w(\theta)\cdot R_{uu}(\tau+\zeta-\theta)\mathrm{d}\theta \tag{5.36}$$

şi funcţia de densitate spectrală corespunzătoare dedusă prin aplicarea transformării Fourier relaţiei (5.36)

$$S_{yy}(\omega)=|H(\mathrm{j}\omega)|^2\cdot S_{uu}(\omega). \tag{5.37}$$

Relaţiile sînt similare cu cele care stabilesc legătura între mărimea de intrare şi cea de ieşire la sistemele liniare continue; rolul mărimilor de intrare şi de ieşire în domeniul timpului îl au funcţia de autocorelaţie a intrării şi funcţia de intercorelaţie între intrare şi ieşire în domeniu frecvenţelor, funcţia de densitate spectrală a intrării şi funcţia de densitate interspectrală [50].

Rezultă că prin cunoaşterea fie a funcţiilor de corelaţie fie a funcţiilor de densitate spectrală se pot rezolva ecuaţiile (5.34) sau (5.35), putînd determina funcţia pondere a procesului sau funcţia de transfer. Utilizarea acestor funcţii pentru identificare impune:

— adoptarea şi generarea de semnale de probă aleatoare avînd caracteristici convenabile procesului de identificat;

— obţinerea cu precizie ridicată a funcţiilor de corelaţie sau de densitate spectrală, în condiţii de experimentare acceptabile;

— rezolvarea cît mai exactă a ecuaţiilor (5.34) şi (5.35).

Principalele semnale aleatoare utilizate pentru identificare sînt: *zgomotul alb, semnalele aleatoare binare, semnalele pseudoaleatoare binare* [50].

Analiza relaţiilor de legătură în timp şi frecvenţă a mărimilor aleatoare evidenţiază faptul că cele mai indicate semnale aleatoare sînt cele

Scanned with OKEN Scanner

care au funcţia de intercorelaţie sub formă de impuls Dirac, iar funcţia de densitate spectrală constantă pentru întreaga bandă de frecvenţă

$$R_{uu}(\tau)=\delta(\tau), \tag{5.38}$$

iar

$$S_{uu}(\omega)=1 \text{ pentru } -\infty \leqslant \omega \leqslant +\infty.$$

Funcţia de intercorelaţie în aceste condiţii, ţinînd seama de proprietăţile funcţiei impuls, este

$$R_{uy}(\tau)=\int_0^{\infty} w(\theta)\cdot\delta(\tau-\theta)\mathrm{d}\theta=w(\tau) \tag{5.39}$$

şi, evident, prin aplicarea transformatei Fourier relaţiei (5.39), se obţine

$$S_{uy}(\mathrm{j}\omega)=H(\mathrm{j}\omega). \tag{5.40}$$

Astfel, funcţia de corelaţie şi transformata Fourier a acesteia reprezintă chiar funcţia pondere şi respectiv funcţia de transfer a procesului. Semnalul aleator care are aceste proprietăţi se numeşte *zgomot alb*.

Generarea unui asemenea semnal necesită un generator de putere infinită. Caracteristicile de filtru trece-jos a proceselor industriale fac inutilă o asemenea sursă de zgomot-alb, şi de aceea se utilizează surse de zgomot cu putere limitată care are funcţia de densitate spectrală constantă într-o bandă de frecvenţă limitată $-\omega_c \leqslant \omega \leqslant +\omega_c$ figura 5.14, *a* şi care se pot obţine printr-o filtrare adecvată a semnalelor emise de surse primare de zgomot-rezistoare, tranzistoare, tuburi electronice, fotoelemente. Forma funcţiei de intercorelaţie a semnalului aleator de tipul zgomotului alb cu bandă de frecvenţă limitată este prezentată în figura 5.14, *b*.

O categorie de semnale aleatoare care posedă proprietăţi deosebit de utile pentru identificare sînt semnalele aleatoare binare şi pseudoaleatoare binare (fig. 5.15), pe care le notăm cu $x(t)$.

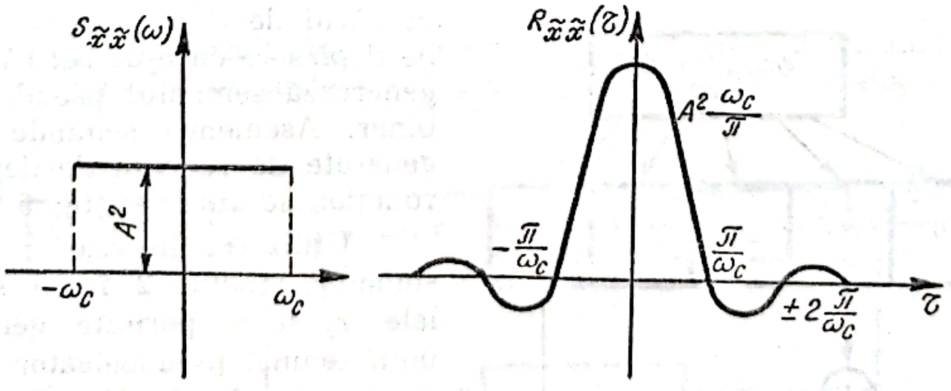


Fig. 5.14. Caracteristici ale zgomotului alb:
a — funcţie de densitate spectrală a semnalului de tip zgomot alb; *b* — funcţie de autocorelaţie a semnalului aleatoriu de tip zgomot alb.

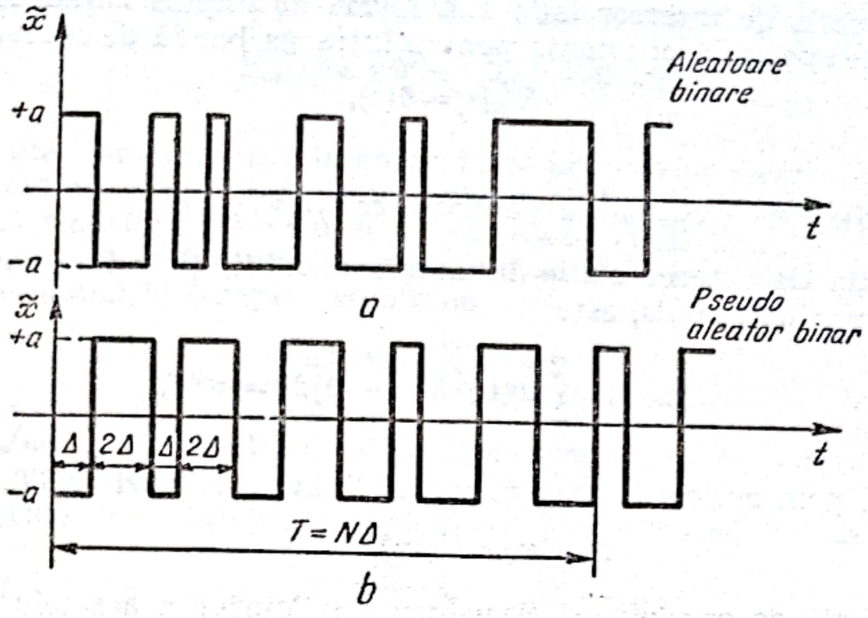


Fig. 5.15. Forme de semnale aleatoare:
a — semnal aleatoriu binar; *b* — semnal pseudoaleatoriu binar.

Semnalele aleatoare binare de tipul semnalului telegrafic (fig. 5.15, *a*) pot lua numai două valori în amplitudine $\pm a$, trecerea de la o valoare la alta avînd un caracter aleator.

Semnalele pseudoaleatoare binare (fig. 5.15, *b*) se apropie foarte mult ca proprietăţi statistice de zgomotul alb. Aceste semnale sînt în fond deterministice (generate cu o lege bine cunoscută), care au anumite proprietăţi esenţiale pentru realizarea caracteristicilor statistice similare caracteristicilor statistice ale zgomotului alb.

Semnalul se prezintă ca o succesiune de impulsuri de durată Δ şi multiplu de Δ, putînd lua valorile $(\pm a)$ sau $(0, a)$; este periodic avînd perioada $T=N$, iar în fiecare perioadă numărul de intervale în care semnalul are valoarea $+a$ $(-a)$ excede cu o unitate numărul de intervale elementare în care semnalul are valoarea $-a$ (0). Numărul de intervale elementare dintr-o perioadă este $N=2^p-1$, unde p reprezintă numărul de celule ale registrului de deplasare cu ajutorul căruia se generează semnalul pseudoaleator binar. Asemenea semnale pot fi generate de registre de deplasare funcţionînd automat (fig. 5.16).

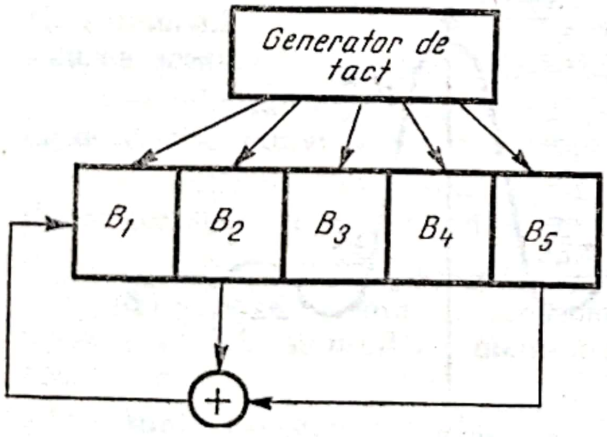


Fig. 5.16. Schema unui generator de semnale pseudoaleatoare liniare.

Utilizarea în reacţie a unui sumator modulo 2 între semnalele x_2 şi x_5 permite generarea unui semnal pseudoaleator cu perioade $N=2^5-1=31$. Pentru a obţine semnale cu perioadă mai mare se impune utilizarea unui

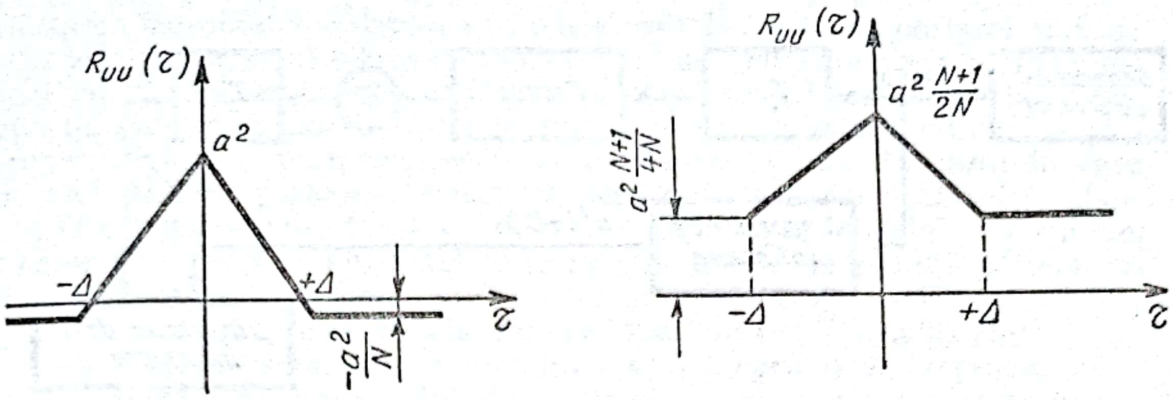


Fig. 5.17. Funcţie de autocorelaţie a semnalelor:
a — aleatoriu binar; *b* — pseudoaleatoriu binar.

registru cu mai multe celule ($p>5$) şi aplicarea unor reacţii corespunzătoare.

Funcţia de autocorelaţie a semnalelor pseudoaleatoare binare avînd proprietăţile menţionate are forma prezentată în figura 5.17, *a* pentru cazul cînd amplitudinea semnalului este $+a$ şi în figura 5.17, *b* pentru cazul cînd amplitudinea semnalului este cuprinsă între zero şi $+a$.

Aplicarea acestor semnale la intrarea procesului şi prelucrarea rezultatelor cu ajutorul unui calculator sau cu ajutorul unui corelator permite obţinerea funcţiei pondere a procesului.

Identificarea proceselor folosind semnale de probă aleatoare, se poate efectua fie în domeniul timpului, prin determinarea şi interpretarea funcţiilor de corelaţie, fie în domeniul frecvenţelor, prin determinarea funcţiilor de densitate spectrală. Prelucrarea matematică a rezultatelor experimentării se poate face în timpul experimentării (procedeul on-line) sau cu ajutorul unor echipamente specializate după încheierea experienţelor.

În figura 5.18 se prezintă o structură de sistem de identificare a unui proces pe baza funcţiilor de corelaţie, cu prelucrarea ulterioară a datelor experimentale.

Prelucrarea rezultatelor înregistrate în vederea determinării modelului matematic se poate efectua cu ajutorul unui corelator automat.

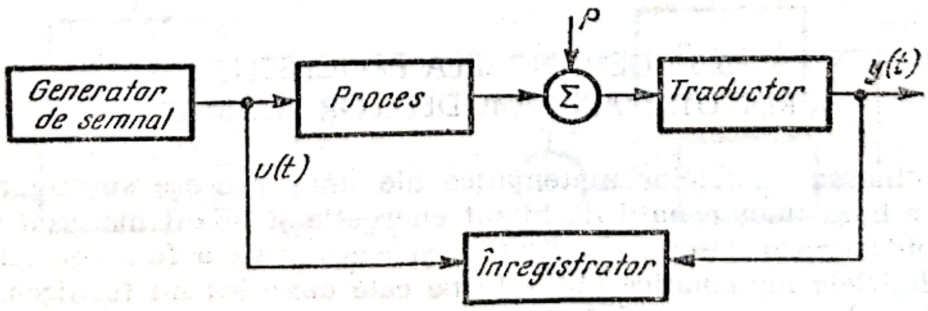


Fig. 5.18. Schema de identificare a unui proces pe baza funcţiilor de corelaţie.

Scanned with OKEN Scanner

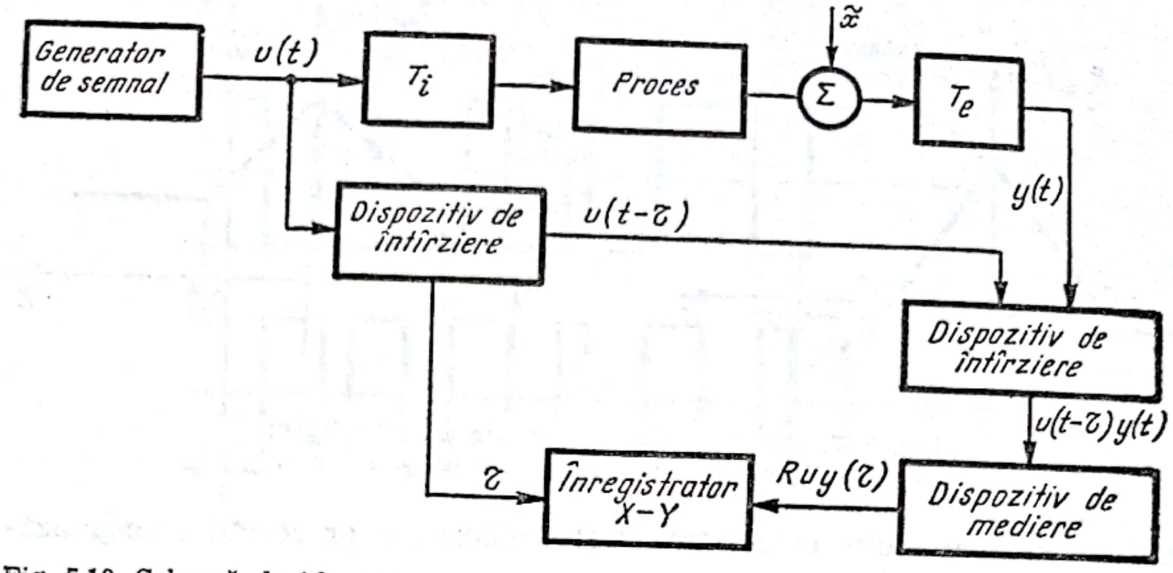


Fig. 5.19. Schemă de identificare cu determinarea automată a funcţiilor de corelaţie.

O asemenea identificare necesită timp îndelungat pentru obţinerea modelului matematic, chiar dacă se utilizează un calculator numeric. Identificare on-line prezintă avantaje dat fiind că în condiţiile desfăşurării experimentului se determină funcţiile de corelaţie şi de densitate spectrală.

O schemă principială de identificare cu determinarea automată a funcţiilor de corelaţie este prezentată în figura 5.19.

Pornind de la relaţia de definiţie a funcţiei de corelaţie aproximative

$$R_{uy}(\tau)=\frac{1}{T}\int_0^T u(t)\cdot y(t+\tau)\mathrm{d}\tau,$$

rezultă operaţiile ce trebuie efectuate în vederea obţinerii acestei funcţii. Astfel, se impune întîrzierea semnalului de intrare cu intervalul de timp τ sau decalarea în avans a semnalului de ieşire, efectuarea operaţiei de înmulţire şi mediere a semnalelor de la intrare şi de la ieşire. Toate blocurile funcţionale ce realizează aceste funcţii alcătuiesc structura minimală a unui corelator automat.

5.5. IDENTIFICAREA PROCESELOR PRIN UTILIZAREA MODELELOR AJUSTABILE

Obţinerea modelelor matematice ale unor procese supuse automatizării pe baza unor ecuaţii de bilanţ energetic şi bilanţ material nu permit întotdeauna o descriere calitativă şi cantitativă a funcţionării proceselor. Modelele matematice obţinute pe cale analitică nu furnizează decît aspectele calitative privind funcţionarea procesului, deoarece coeficienţii ecuaţiilor ce formează modelul analitic sînt întotdeauna necunoscuţi.

Ajustarea parametrilor acestor modele astfel încît comportarea lor să reflecte cît mai fidel comportarea procesului real constituie esența metodei de identificare a proceselor cu ajutorul modelelor ajustabile. Operația de ajustare a parametrilor se poate face manual sau automat. Ajustarea automată a parametrilor unui model se impune în cazul în care procesul este cu parametri variabili, respectiv în cazul sistemelor adaptive. O categorie importantă de modele o reprezintă modelele instruibile, ai căror parametri se ajustează automat, în funcție de evoluția sistemului pe o perioadă dată de timp.

Principalele probleme ale sintezei unui model ajustabil sînt:

— alegerea structurii modelului cît mai apropiată de proces;

— formularea criteriului de performanță pentru comparația modelului cu procesul supus identificării;

— stabilirea algoritmului de ajustare a parametrilor modelului.

Pentru alegerea structurii modelului se folosesc informațiile aprioriice despre proces, care permit întocmirea unui model analitic. În cazul obținerii unor modele analitice complexe greu de ajustat, pot fi introduse aproximații la alcătuirea modelului, astfel încît acesta să poată fi încadrat într-o clasă de modele ajustabile. În ceea ce privește formularea criteriului de performanță pentru comparația modelului cu procesul, cel mai frecvent se utilizează un criteriu integral care este funcție de eroarea între ieșirea procesului și ieșirea modelului, așa cum se arată în figura 5.20, *a*, sau este funcție de eroarea obținută între intrarea în proces și ieșirea modelului invers (fig. 5.20, *b*), dacă modelul este presupus inversabil (adică este întotdeauna posibil a găsi o intrare unică ce produce o ieșire dată)

$$e(t)=y(t)-\hat{y}(t)=y(t)-M[u(t)]$$

unde $M\,[u(t)]$ reprezintă ieșirea modelului
sau

$$e(t)=u(t)-\hat{u}(t)=u(t)-M^{-1}[y(t)].$$

Criteriul ce trebuie minimizat în acest caz are forma

$$J=\int_0^T [y(t)-\hat{y}(t)]^2 dt=\text{minim}$$

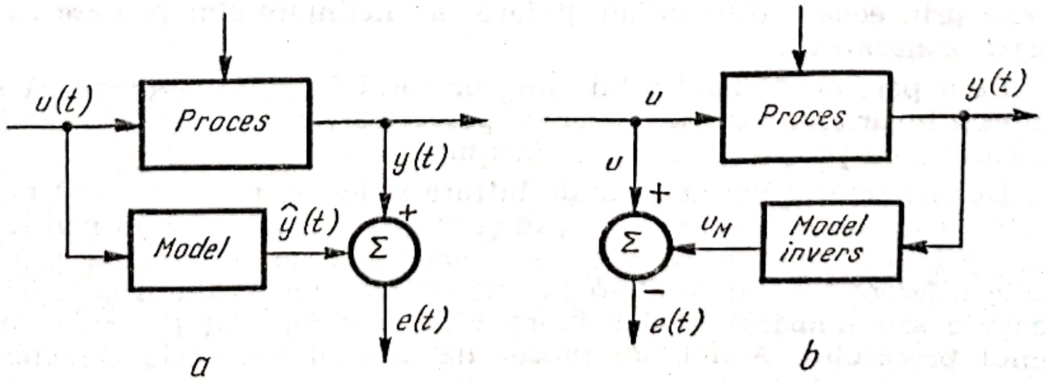


Fig. 5.20. Identificarea cu ajutorul modelului ajustabil:
a — modelul direct; *b* — modelul invers.

Scanned with OKEN Scanner

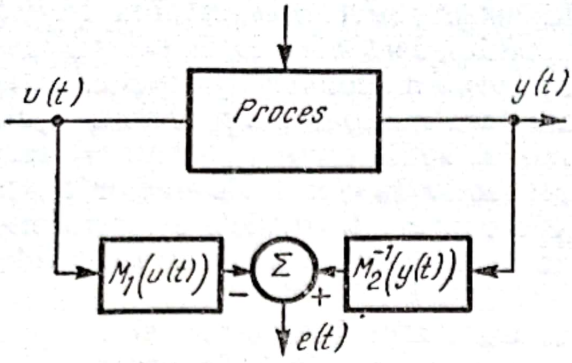


Fig. 5.21. Identificarea cu ajutorul modelului generalizat.

sau

$$J=\int_0^T [u(t)-\hat{u}(t)]dt=\text{minim.}$$

Adoptarea unui criteriu funcție de eroarea la intrarea $e=u(t)-\hat{u}(t)$ este preferabilă atunci cînd perturbațiile nemăsurabile acționează asupra intrării procesului.

Într-un caz mai general, eroarea poate fi definită (fig. 5.21) astfel

$$e(t)=M_2^{-1}[y(t)]-M_1[u(t)],$$

unde M_2^{-1} reprezintă un model inversabil. Un asemenea model poartă denumirea de model generalizat.

Pentru extremizarea criteriului de performanță în vederea obținerii parametrilor optimi ai modelului, acei parametri care asigură a concordanță maximă între model și proces, pot fi folosite diverse strategii de minimizare. Astfel pot fi utilizate metode statistice sau metode deterministice pentru obținerea parametrilor optimi ce minimizează criteriul adoptat, metode de gradient, metoda Newton-Raphson, metoda Newton-Gauss, metoda Gauss-Seidel etc. Alegerea metodei de minimizare a funcției (funcționalei) definită prin criteriul J are la bază criterii cum ar fi convergența, timpul de calcul, precizia de obținere a soluției.

5.6. CLASIFICAREA PROCESELOR DUPĂ MODELUL MATEMATIC AL ACESTORA

În capitolul 1 s-a prezentat o clasificare a sistemelor ținînd seama de modelul matematic al acestora. Cele mai uzuale modele pentru procesele tehnologice sînt modelele cu parametri concentrați și cu parametri distribuiți. Procesele din industria chimică, petrolieră, procesele ce definesc transportul de fluid, de energie, care sînt descrise de modele cu ecuații cu derivate parțiale, sînt procese cu *parametri distribuiți*. Procesele descrise prin ecuații diferențiale liniare sau neliniare sînt *procese cu parametri concentrați*.

Dacă parametrii modelului sînt constanți în timp, spunem că procesul este invariant, spre deosebire de procesele variante care sînt definite prin modele cu parametri variabili în timp.

După numărul variabilelor de intrare și ieșire, procesele sînt monovariabile dacă au o intrare și o ieșire și multivariabile dacă au mai multe variabile la intrare și ieșire. Procesele monovariabile sînt descrise printr-o ecuație diferențială sau printr-o funcție de transfer. Ordinul ecuației diferențiale sau numărul polilor funcției de transfer sînt determinate de ordinul procesului. Astfel, un proces de ordinul întîi este caracterizat printr-o constantă de timp (deci un pol) și un coeficient de transfer, un proces de ordinul doi este caracterizat printr-un coeficient de transfer și

Scanned with OKEN Scanner

prin intermediul lui ζ și ω_n dacă polii sînt complex conjugați sau prin două constante de timp dacă $\zeta > 1$ (polii sînt reali). Forma cea mai generală a funcției de transfer a unui proces liniar este

$$H(s) = \frac{K_1 \cdot \prod_1^m (s+z_i)}{\prod_1^n (s+p_i)} \cdot e^{-\tau s} \tag{5.41}$$

sau

$$H(s) = \frac{K \cdot \prod_1^m (T_i s+1)}{\prod_1^n (T_k s+1)} \cdot e^{-\tau s}, \tag{5.42}$$

unde $K = K_1 \cdot \frac{\prod_1^m z_i}{\prod_1^n p_i}$ reprezintă factorul de amplificare al procesului;

$T_i = \frac{1}{z_i}$, $T_k = \frac{1}{p_k}$ — constantele de timp ale procesului.

Cele mai uzuale modele pentru procesele tehnologice conțin constantele de timp T_k, timpul mort τ și coeficientul de transfer K

$$H(s) = \frac{K \cdot e^{-\tau s}}{\prod_1^n (T_k s+1)}; \tag{5.43}$$

În funcție de valoarea constantelor de timp T_k și de valoarea timpului mort τ, procesele tehnologice sînt lente, dacă conțin timp mort și $T_k \geqslant 10$ s, și rapide, dacă timpul mort este neglijabil iar constantele de timp $T_k < 10$ s. Procesele rapide sînt caracterizate în general prin constante de timp predominante și constante de timp parazite, care sînt mult mai mici decît constantele predominante. Cel mai uzual model matematic pentru un proces rapid are forma

$$H(s) = \frac{K}{(T_\Sigma s+1) \prod_1^n (T_k s+1)}, \tag{5.44}$$

unde: T_k sînt constantele de timp predominante;

T_Σ — suma tuturor constantelor de timp parazite ($T_\Sigma \ll \min T_k$). Unele procese tehnologice conțin în funcția de transfer și un pol în origine (motor de curent continuu, rezervor avînd ca ieșire nivelul cînd debitul de fluid ce se evacuează este constant etc.). Modelul matematic al motorului de curent continuu, considerat ca proces supus automatizării avînd ca intrare tensiunea de alimentare și ca ieșire poziția unghiulară la axul motorului, este de forma

$$H(s) = \frac{K}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)}. \tag{5.45}$$

Scanned with OKEN Scanner

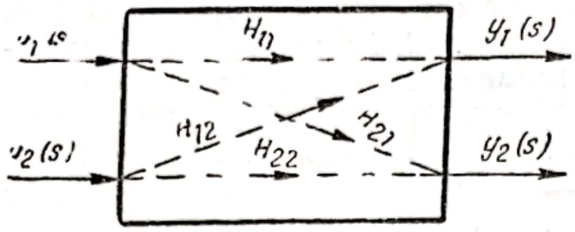


Fig. 5.22. Modelul unui proces cu două intrări și două ieșiri.

Un proces multivariabil este descris de un set de ecuații diferențiale sau prin intermediul unei matrice de transfer. Pentru sistemul cu două intrări și două ieșiri prezentat în figura 5.22, modelul matematic se scrie ținînd seama de legătura între ieșiri și intrări, sub forma:

$$Y_1(s)=H_{11}(s)\cdot U_1(s)+H_{12}(s)\cdot U_2(s);$$
$$Y_2(s)=H_{21}(s)\cdot U_1(s)+H_{22}(s)\cdot U_2(s), \qquad (5.46)$$

sau în forma matriceal-vectorială

$$\mathbf{Y}(s)=\mathbf{H}(s)\cdot\mathbf{U}(s), \qquad (5.47)$$

unde:

$\mathbf{Y}(s)=\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix}$ — vectorul variabilelor de la ieșire;

$\mathbf{U}(s)=\begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$ — vectorul variabilelor de la intrare;

$\mathbf{H}(s)=\begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \end{bmatrix}$ — matricea de transfer a sistemului.

Un exemplu de proces multivariabil îl constituie un rezervor la care se cere reglarea presiunii și nivelul lichidului în vas, sau o coloană de distilare la care se impune reglarea temperaturii la diverse nivele în coloană și nivelul la baza coloanei.

Cunoașterea cu precizie a modelului matematic obținut fie pe cale analitică fie pe cale experimentală, precum și a perturbațiilor ce acționează asupra procesului, permite a realiza structuri de sisteme automate cu performanțe optime, precum și rezolvarea problemelor de proiectare pe cale analitică.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 6

PROIECTAREA SISTEMELOR DE REGLARE AUTOMATĂ

6.1. OBIECTIVELE PROIECTĂRII. CRITERII DE PERFORMANȚĂ

Proiectarea unui sistem de reglare automată presupune rezolvarea unor probleme legate de alegerea și dimensionarea elementelor componente, precum și interconectarea lor astfel încît să fie realizate performanțele impuse sistemului.

Prima etapă a proiectării constă în definirea obiectivelor propuse a fi realizate de sistem, ținînd seama de tipul procesului, de condițiile tehnologice de funcționare a acestuia respectiv de restricțiile impuse în funcționare.

A doua etapă constă în definirea mijloacelor și a metodelor disponibile pentru realizarea obiectivului respectiv propus. Găsirea unor soluții optime pentru sistemul de reglare, ținînd seama de scopul propus, reprezintă cea de-a treia etapă a proiectării.

Cunoașterea cît mai exactă a procesului supus automatizării, a modelului său matematic reprezintă una dintre problemele cele mai dificile ale proiectării riguroase a unui sistem de reglare automată. Se impune cunoașterea mărimilor de intrare și mărimilor de ieșire esențiale ale procesului, perturbațiilor care acționează asupra procesului și locul unde acestea acționează. Se mai cere a se cunoaște dacă procesul este observabil, respectiv care sînt mărimile prin intermediul cărora se pot obține informații semnificative asupra stării procesului.

Metodele de identificare analitică și experimentală dezvoltate în ultimii ani permit astăzi determinarea cu bună precizie a modelelor matematice ale multor procese supuse automatizării. Restricțiile funcționale proprii fiecărui proces pot de asemenea fi precizate, astfel încît informația apriorică despre procesul supus automatizării să fie cît mai completă. În cazul în care informația apriorică despre proces este incompletă se impune utilizarea unor structuri complexe pentru sistemul automat, care să asigure atît identificarea continuă a procesului cît și elaborarea algoritmului de reglare sau de conducere.

Scanned with OKEN Scanner

În ceea ce privește stabilirea criteriilor de performanță ce trebuie satisfăcute, aceasta se face în funcție de tipul sistemului automat care poate fi de stabilizare, de urmărire sau de conducere optimală. Criteriile de performanță care trebuie urmărite sînt definite atît pentru regimul staționar cît și pentru regimul tranzitoriu de funcționare. Astfel, în general se cer a fi satisfăcute: stabilitatea sistemului, precizia în regim staționar ε_{st}, răspuns tranzitoriu (definit prin suprareglaj σ, timp tranzistoriu t_t, factor de amortizare ψ, timp de creștere t_c și timp de întîrziere t_i satisfăcător, iar în domeniul frecvențelor performanțele: bandă de frecvență ω_B, margine de fază M_φ și margine de cîștig M_c, pulsație de rezonanță ω_r și valoarea de vîrf a modulului $M_v(\omega_r)$.

Criteriile de performanță se pot defini sub forma menționată sau sub formă integrală, putînd îngloba nu numai o performanță ci un grup de performanțe, asigurînd astfel o comportare optimă a sistemului atît la variația intrării cît și la variația perturbării.

Criteriile integrale permit asigurarea unui optim privind regimul tranzitoriu sau unui optim privind consumul de energie necesar acțiunii de reglare, fiind funcție de expresia introdusă sub semnul integralei prin a cărei minimizare se obține optimul urmărit.

Cele mai uzuale criterii integrale utilizate la alegerea și acordarea regulatoarelor automate, respectiv la proiectarea sistemelor de reglare automată liniare monovariabile, pot avea diferite expresii în funcție de performanțele ce se impun.

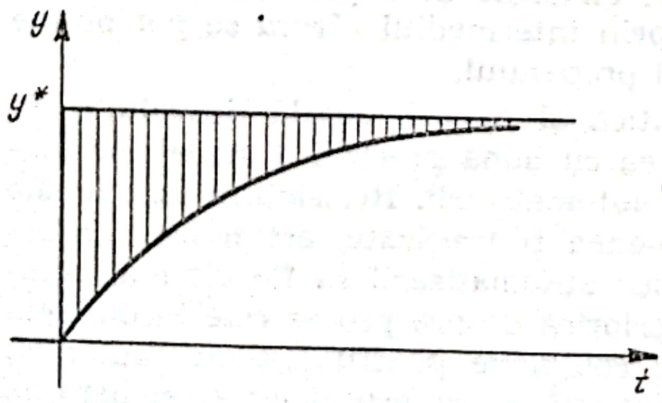
Pentru un răspuns aperiodic la o intrare treaptă unitară (fig. 6.1), o comportare cît mai bună a sistemului se obține cu cît aria hașurată va fi mai redusă, deci cu cît integrala

$$IP=\int_0^\infty (y^*-y)\mathrm{d}t=\int_0^\infty \varepsilon \mathrm{d}t=\text{minim} \tag{6.1}$$

va avea o valoare mai mică (y^* este mărimea de referință).

Este evident faptul că relația (6.1) poate fi utilizată drept criteriu integral de performanță numai dacă $\varepsilon_{st}=\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t)=0$.

Pentru un răspuns oscilant, dată fiind apariția atît a unor abateri pozitive cît și negative (fig. 6.2) față de comportarea staționară a răspunsului, nu poate fi folosită relația (6.1) drept indice de performanță, da-



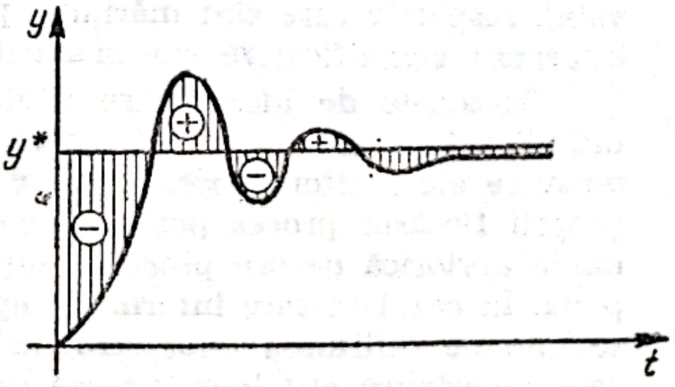


Fig. 6.1. Răspunsul aperiodic al unui sistem. Fig. 6.2. Răspunsul oscilant amortizat.

Scanned with OKEN Scanner

torită faptului că diversele arii intervin cu semne diferite şi integrala poate avea o valoare redusă chiar dacă regimul tranzitoriu este nesatisfăcător. Pentru asemenea răspunsuri este necesar un criteriu integral, care să elimine semnele diferite ale ariilor menţionate:

$$IP=\int_0^\infty |\varepsilon| dt=\text{minim}; \tag{6.2}$$

$$IP=\int_0^\infty \varepsilon^2 dt=\text{minim}. \tag{6.3}$$

Minimizarea integralei (6.3) asigură limitarea erorii într-o anumită gamă şi a ariilor delimitate de curba ε^2, reprezentată în funcţie de timp, deci limitează atît suprareglajul cît şi durata procesului tranzitoriu.

Un indice sintetic de calitate care asigură o limitare mai eficientă a suprareglajului este reprezentat de integrala

$$IP=\int_0^\infty (\varepsilon^2+T^2\dot{\varepsilon}^2)dt=\text{minim}, \tag{6.4}$$

întrucît prin introducerea derivatei $\dot{\varepsilon}$ sub integrală se obţine nu numai o limitare a erorii ε ci şi a derivatei $\dot{\varepsilon}$, ceea ce asigură o reducere a suprareglajului.

De remarcat faptul că aceste criterii integrale nu pot oferi informaţii asupra regimului staţionar, ele fiind aplicabile numai la sisteme cu eroare staţionară zero (altfel valoarea integralelor ar deveni infinită).

În cazul în care prin proiectare se urmăreşte nu numai obţinerea anumitor calităţi ale regimului tranzitoriu ci şi minimizarea unor indici de dimensiunea energiei sau costului, în cadrul criteriilor integrale de performanţă pe lîngă eroare şi derivatele acesteia intervin şi alte mărimi (cum este, de exemplu, mărimea de comandă) ridicate la pătrat.

Alegerea unui criteriu integral din cele prezentate se face avînd în vedere atît măsura în care criteriul poate efectiv reprezenta performanţa globală a sistemului, cît şi complexitatea efectuării integralelor necesare calculării indicelui de performanţă. Pentru proiectarea propriu-zisă, avînd în vedere satisfacerea criteriului de performanţă ales, trebuie luate în considerare elementele de automatizare ce pot fi utilizate precum şi metodele de proiectare ce pot fi folosite pentru acest scop. Pornind de la proces şi de la criteriul de performanţă impus pot fi alese şi dimensionate: regulatorul, elementul de execuţie, traductorul de pe calea de reacţie, astfel încît acestea să asigure performanţele dorite, precum şi siguranţa în funcţionare, o durată de funcţionare cît mai mare şi un preţ de cost cît mai redus.

Utilizarea criteriilor integrale pentru proiectarea optimă a unui sistem de reglare automată presupune cunoaşterea structurii regulatorului, urmînd ca în cadrul proiectării să fie determinate valorile optime ale parametrilor de acord care satisfac cel mai bine criteriul adoptat.

În ceea ce priveşte alegerea şi acordarea elementelor de automatizare, aceasta se poate face prin mai multe metode analitice sau metode avînd la bază încercări succesive.

Scanned with OKEN Scanner

În funcţie de formalismul matematic adoptat pentru descrierea comportării dinamice a întregului sistem, se pot folosi diferite metode de proiectare atît în domeniul timpului cît şi în domeniul frecvenţelor sau în domeniul complex, cum ar fi: metoda distribuţiei poli-zerouri, metoda locului rădăcinilor, metoda caracteristicilor de frecvenţă [13, 46].

Utilizarea unui calculator numeric pentru proiectarea asistată de calculator a sistemului de reglare automată permite obţinerea unor soluţii optime cu mare precizie.

Realizarea fizică a sistemului prin conectarea tuturor elementelor alese şi dimensionate (acordate) prin una din metodele menţionate şi verificarea performanţelor realizate, reprezintă ultima etapă a proiectării.

În cazul în care unele performanţe ale sistemului proiectat şi implementat pe proces nu au valoarea dorită, se impune corectarea sistemului folosind metodele expuse în capitolul 4.

Avînd în vedere scopul urmărit în lucrare, în acest capitol se vor prezenta în cele ce urmează metode analitice privind alegerea algoritmului de reglare pentru procese rapide şi lente precum şi principalele aspecte privind alegerea optimă a elementelor de execuţie şi a traductoarelor pentru o structură convenţională de sistem de reglare şi un proces tehnologic cunoscut apriori.

6.2. CONSIDERAŢII PRIVIND ALEGEREA ELEMENTELOR DE EXECUŢIE PENTRU UN PROCES TEHNOLOGIC DAT

În cadrul sistemelor automate, *elementele de execuţie* ca şi *traductoarele* constituie elemente de cuplare a regulatorului la procesul supus automatizării (fig. 6.3).

Elementele de execuţie pot fi privite ca generatoare de cuplu (sau forţă) cu viteze date, folosind energie exterioară comandată de semnalele de comandă elaborate de regulator. Elementul de execuţie are un dublu rol, informaţional şi de vehiculare a unor puteri importante. Prin intermediul elementului de execuţie se acţionează asupra surselor energetice ale procesului tehnologic, comandînd aceste surse în concordanţă cu cerinţele impuse variaţiei mărimii de la ieşirea procesului.

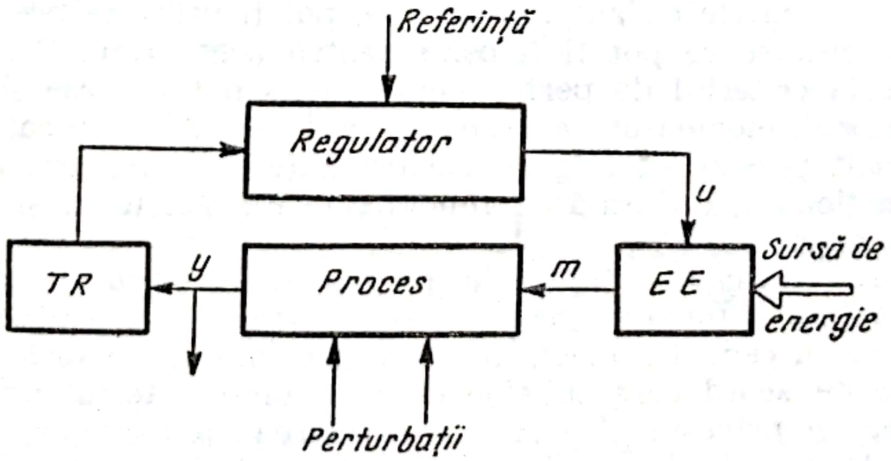


Fig. 6.3. Schema generală a unui SRA.

Scanned with OKEN Scanner

Un element de execuţie este alcătuit din elementul de acţionare, sau partea motoare propriu-zisă, şi organul de execuţie, sau organul de reglare determinat de natura procesului tehnologic. Elementul de acţionare transformă mărimea de comandă u într-o mărime motoare de execuţie, pentru care natura fizică şi nivel energetic sînt compatibile cu *organul de execuţie* sau *organul de reglare* care acţionează direct asupra procesului tehnologic prin intermediul mărimii de execuţie m.

După natura energiei utilizate pentru realizarea funcţiei de acţionare, elementele de execuţie se clasifică în: elemente de execuţie pneumatice, hidraulice şi electrice. După modul de acţionare se întîlnesc elemente de execuţie cu acţiune continuă, bipoziţionale şi de tip pas cu pas.

Un alt mod de clasificare a elementelor de execuţie, dată fiind importanţa acestora la realizarea performanţelor sistemului automat, este în funcţie de relaţia între mărimea de execuţie $m(t)$ şi mărimea de comandă $u(t)$, obţinută la ieşirea regulatorului automat.

În practică sînt utilizate două tipuri de elemente de execuţie: elemente de execuţie cu acţiune integrală (caracterizate printr-o funcţie de transfer ce conţine un pol în origine) şi elemente cu acţiune proporţională.

În primul caz mărimea de execuţie este proporţională cu integrala din mărimea de comandă sau viteza de deplasare a tijei elementului de execuţie iar în al doilea caz, mărimea de execuţie este proporţională cu mărimea de comandă.

Principalele calităţi ce se impun a fi luate în consideraţie la alegerea unui element de execuţie sînt:

— puterea (sau cuplul) dezvoltată la ieşire, corelată cu puterea necesară acţionării organului de reglare pentru întregul domeniu de încărcare a procesului;

— domeniul de liniaritate cît mai mare al caracteristicilor statice, asigurîndu-se o înaltă sensibilitate în funcţionare;

— precizie şi siguranţă în funcţionare cît mai ridicate;

— viteze de răspuns cît mai mari (constante de timp cît mai mici);

— posibilitatea reglării vitezei în limite largi şi reversarea sensului de mişcare;

— asigurarea unei supleţi constructive cît mai economice.

6.2.1. ELEMENTE DE ACŢIONARE. TIPURI, CARACTERISTICI

Elemente de acţionare pneumatică. Din punct de vedere constructiv, aceste elemente pot fi: cu membrană cu simplu şi dublu efect, cu piston cu simplu şi dublu efect pentru mişcări de translaţie şi cu palete pentru mişcări unghiulare. Pot fi comandate de regulatoare pneumatice şi de regulatoare electronice. În cazul în care regulatorul este electronic, cuplarea între regulator şi elementul de execuţie se face prin intermediul unui convertor electro-pneumatic, care transformă liniar semnalul unificat electric într-un semnal unificat pneumatic. Comportarea unui element de acţionare pneumatic cu membrană cu simplu efect poate fi descrisă

Scanned with OKEN Scanner

pe porțiunea liniară a funcționării sale printr-o funcție de transfer de forma

$$H_a(s)=\frac{K}{a_2s^2+a_1s+a_0}, \tag{6.5}$$

unde K, a_0, a_1 și a_2 sînt parametrii elementului de acționare, care depind de masa pieselor în mișcare, de elasticitatea membranei și resortului (fig. 6.4), precum și de forțele de frecare vîscoasă ce apar în funcționare. Dependența între deplasarea h și presiunea de comandă este reprezentată în figura 6.4, *b*.

Neglijînd inerția elementului, avînd în vedere că masele în mișcare la acest element sînt reduse, se poate aproxima modelul matematic al unui element de execuție pneumatic cu membrană cu simplu efect prin

$$H_a(s)=\frac{K}{T_as+1}, \tag{6.6}$$

unde T_a reprezintă constanta de timp a elementului de execuție pneumatic, a cărei valoare este determinată de parametrii geometrici ai acestuia precum și de caracteristicile membranei și resortului.

În aplicații uzuale, constantele de timp pentru elementele de execuție pneumatice au valori mai mici de 3 s.

Pentru îmbunătățirea răspunsului tranzitoriu și a preciziei în funcționare se folosesc elemente de execuție cu poziționer [26].

Introducerea poziționerelor în structura elementelor de execuție conduce la creșterea domeniului de liniaritate al caracteristicii statice a acestuia și la o îmbunătățire a performanțelor staționare și tranzitorii.

Acționarea pneumatică a organelor de reglare pentru procese lente (robinete de reglare a debitelor de substanță) este recomandată ca urmare a compatibilității acesteia cu reglarea pneumatică a unor procese lente din industria chimică și petrolieră datorită unei bune viteze de răspuns și a siguranței ridicate în funcționare. Elementele de acționare

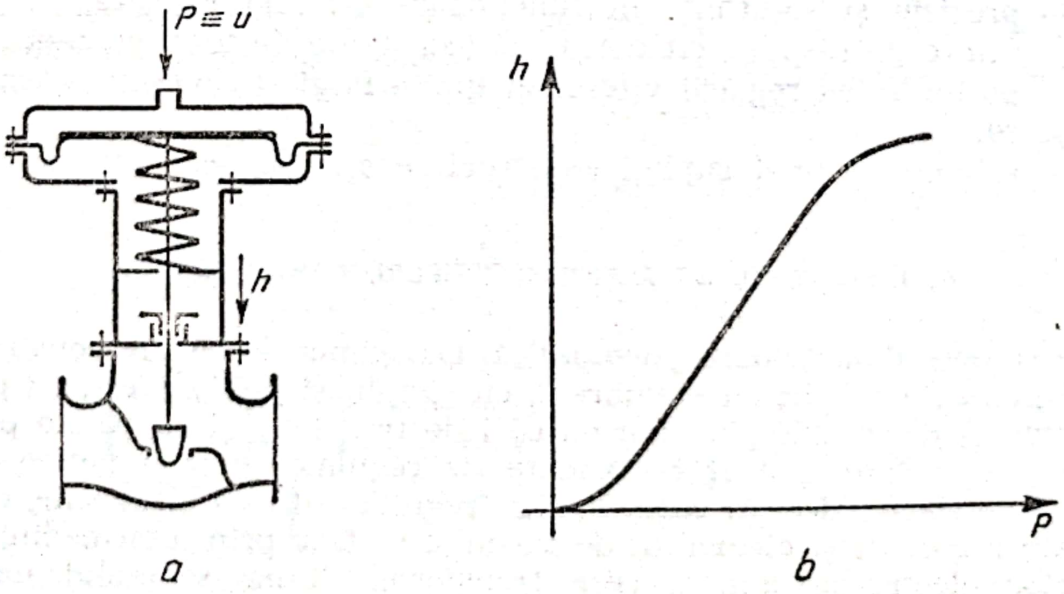


Fig. 6.4. Element de execuție pneumatic cu membrană:
a — schema elementului; *b* — caracteristica statică a elementului.

Scanned with OKEN Scanner

pneumatică au viteza de răspuns ridicată, un domeniu de liniaritate mare, oferă posibilitatea reglării vitezei de acţionare, au o construcţie simplă, dezvoltă forţe şi cupluri mari, fiind compatibile cu organele de reglare a debitelor de substanţă.

Elemente de acţionare hidraulică. Acţionarea hidraulică este caracterizată printr-o viteză de răspuns mare, prin dezvoltarea unor cupluri mari la gabarite reduse şi prin realizarea unor precizii ridicate. Elementele de acţionare hidraulice cele mai răspîndite sînt elementele cu piston cu simplu sau dublu efect pentru deplasări liniare şi elementele cu pistoane radiale pentru deplasări unghiulare. Sînt utilizate, în general, ca elemente de acţionare în sistemele hidraulice pentru maşini-unelte, pentru sistemele de comandă şi reglare în domeniul aviaţiei. Aceste elemente de acţionare au posibilitatea de a dezvolta viteze reglabile în limite largi cu precizie ridicată. Elementele de comandă ale acestor elemente de acţionare sînt hidraulice sau electro-hidraulice. Elementele de acţionare hidraulice pot funcţiona după o caracteristică continuă, bipoziţională, sau pot funcţiona în regim pas cu pas.

Pentru procese lente, aceste elemente de acţionare sînt rar întîlnite. Utilizarea uleiului sub presiune ca agent purtător de informaţie şi energie impune restricţii asupra domeniilor de utilizare a acestor elemente de acţionare. De asemenea, pregătirea uleiului sub presiune din punctul de vedere al calităţilor necesare (puritate, compresibilitate, viscozitate etc.) reprezintă un alt factor important ce se impune a fi luat în considerare la alegerea acţionării hidraulice.

Din punctul de vedere al modelului matematic folosit pentru elementele de acţionare hidraulice, acestea pot fi liniarizate în jurul punctului de funcţionare, fiind definite sub forma unor funcţii de transfer ce conţin sau nu un pol în origine şi una sau mai multe constante de timp. De remarcat faptul că constantele de timp sînt de ordinul zecimilor sau sutimilor de secundă. Unele probleme ale alegerii şi calculului elementelor de acţionare hidraulică sînt prezentate în lucrările [26, 15].

Elemente de acţionare electrică. Acţionarea electrică a organelor de reglare se poate face *continuu,* cu ajutorul motoarelor electrice de curent continuu şi motoarelor asincrone monofazate, bifazate şi trifazate, precum şi cu ajutorul motoarelor cu rotor disc, şi *discontinuu,* cu ajutorul electromagneţilor.

Utilizarea unor motoare electrice de tip pas cu pas permite acţionarea discretă a organelor de reglare. Acţionarea cu electromagneţi se caracterizează prin realizarea numai a două poziţii ale organului de reglare, „deschis" şi „închis". Asemenea elemente de acţionare sînt frecvent întîlnite în reglările industriale bipoziţionale. Trecerea dintr-o stare staţionară în cealaltă stare staţionară se realizează într-un timp scurt, de ordinul secundelor şi chiar a zecimilor de secundă, la aplicarea semnalului de comandă la nivelul maxim.

Alimentarea electromagnetului se poate face în curent continuu cu valori ale tensiunii 6; 24; 100 V, iar în curent alternativ cu valori ale tensiunii 24; 120; 220 V.

Pentru puteri reduse necesare acţionării organului de execuţie se utilizează ca element de acţionare motorul de curent alternativ bifazat.

Scanned with OKEN Scanner

Turaţia axului motorului pentru o sarcină dată este proporţională cu valoarea curentului din înfăşurarea de comandă, iar sensul de rotaţie depinde de faza curentului de comandă, care este cu 90° în avans sau în întîrziere faţă de faza curentului de referinţă care circulă prin cea de-a doua înfăşurare a motorului.

Cuplarea cu organul de reglare se face prin intermediul unui reductor de turaţie, pentru a se asigura pe de o parte un cuplu corespunzător, iar pe de altă parte, compatibilitatea între viteza motorului cu viteza organului de execuţie.

Prezenţa reductorului de turaţie introduce o întîrziere în răspunsul elementului de execuţie şi evident o neliniaritate suplimentară. Motorul de curent alternativ este în general mai simplu, mai robust şi cu inerţie mai mică decît motorul de curent continuu, însă este mai voluminos, are un factor de putere mai slab, este mai scump. Motorul de curent continuu poate fi comandat prin variaţia curentului de excitaţie sau prin variaţia curentului în indusul motorului.

Motoarele electrice utilizate ca elemente de acţionare au o viteză de răspuns mai scăzută decît elementele de acţionare pneumatică şi hidraulică, dezvoltă un cuplu mai redus pentru acelaşi volum şi prezintă o siguranţă mai scăzută în condiţii dificile de mediu. Sînt elemente neliniare, însă pe porţiunea liniară a caracteristicilor statice pot fi descrise cu ajutorul unor funcţii de transfer de forma

$$H_m(s) = \frac{K}{s(Ts+1)(T_m s+1)}, \tag{6.7}$$

unde: T_m reprezintă constanta de timp mecanică a elementului de execuţie;

T reprezintă constanta de timp a circuitului electric.

La alegerea unui element de acţionare de tip motor electric trebuie avute în vedere următoarele criterii:

— realizarea unei abateri admisibile de poziţie datorită frecărilor statice;

— asigurarea vitezei şi acceleraţiei necesare acţionării unei sarcini date;

— asigurarea unui domeniu de liniaritate în funcţionare cît mai mare.

Folosirea unor reacţii tahometrice (cu ajutorul unui tahogenerator) sau utilizarea unor elemente de corecţie în jurul elementului de acţionare pot îmbunătăţi performanţele acestora [29].

6.2.2. ORGANE DE REGLARE. TIPURI, CARACTERISTICI

În funcţie de natura energiei reglate şi de tipul procesului, organele de reglare pot fi mecanice şi electrice, pentru reglarea unor debite sau pentru reglarea altor mărimi electrice sau neelectrice. Cele mai frecvente organe de reglare pentru procese lente sînt robinetele de reglare a unor debite de fluid. Aceste elemente au ca mărimi de intrare mărimea mecanică (deplasarea) generată de elementul de acţionare, iar ca mărime

Scanned with OKEN Scanner

de ieșire un debit care se introduce sau se evacuează din instalația tehnologică.

Relația între debitul de fluid printr-un robinet de reglare și secțiunea de trecere a acestuia este

$$Q_v = C_d \cdot S_r \sqrt{\frac{\Delta p_r}{\rho}}, \tag{6.8}$$

unde: C_d este coeficientul de debit caracteristic unei rezistențe hidraulice;
S_r — aria secțiunii de trecere a fluidului prin robinet;
Δp_r — căderea de presiune pe robinet;
ρ — densitatea fluidului.

Căderea de presiune pe robinet, ținînd seama că robinetul reprezintă o rezistență hidraulică variabilă între sursa de energie și instalația tehnologică, poate fi calculată cu ajutorul relației

$$\Delta p_r = \Delta p_0 - \Delta p_c, \tag{6.9}$$

unde: $\Delta p_0 = p_1 - p_2$ este căderea totală de presiune în sistem între sursă și proces;
Δp_c — căderea de presiune pe conducta de legătură (fig. 6.5).

Ținînd seama de relațiile (6.8) și (6.9) rezultă că debitul de fluid prin robinetul de reglare nu este o funcție univocă de poziția tijei robinetului de reglare, acesta depinzînd de sistemul hidraulic în care este montat robinetul respectiv, de căderile de presiune Δp_0 și Δp_c.

Relația (6.8) mai evidențiază faptul că robinetul are o caracteristică intrinsecă, care depinde numai de geometria sa, și o caracteristică definită de tipul fluidului și de structura sistemului hidraulic în cadrul căruia este montat robinetul.

Caracteristica intrinsecă a robinetului o notăm prin K_v, fiind dată de relația

$$K_v = C_d \cdot S_r = K_v(h), \tag{6.10}$$

unde h este cursa ventilului.

Semnificația fizică a acestei caracteristici a unui robinet de reglare se obține prin interpretarea relației

$$K_v = \frac{Q_v}{\sqrt{\frac{\Delta p_r}{\rho}}}. \tag{6.11}$$

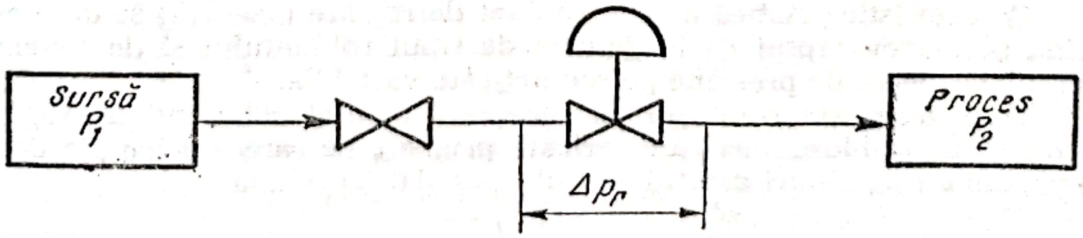


Fig. 6.5. Schema generală a unui sistem hidraulic cu reglarea debitului de fluid prin intermediul unui ventil de reglare.

Scanned with OKEN Scanner

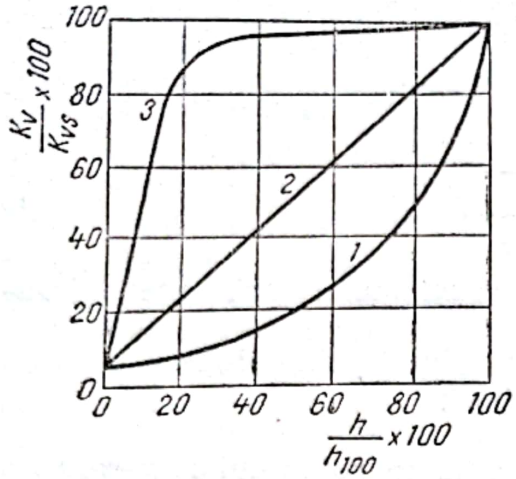


Fig. 6.6. Caracteristici intrinseci ale ventilelor uzuale:
1 — logaritmică; 2 — liniară; 3 — rapidă.

Astfel, K_v reprezintă debitul exprimat în m^3/h al unui fluid cu densitatea $\rho = 1\ kg/dm^3$ (apă), care trecînd prin robinetul de reglare produce căderea de presiune $\Delta p_r = 1\ daN/cm^2$. Mărimea K_v are semnificaţia unui debit specific ce trece prin robinetul de reglare în condiţiile enunţate.

Pentru tehnica reglării automate, cele mai uzuale tipuri de caracteristici intrinseci sînt: caracteristica liniară *1*, caracteristica logaritmică *2* şi caracteristica de deschidere (închidere) rapidă *3* (fig. 6.6).

În această figură s-a notat:

K_{vs} este valoarea lui K_v la cursa nominală;

K_{v0} — valoarea la care caracteristica $K_v(h)$ intersectează axa K_v (valoarea minimă a debitului specific la închiderea robinetului).

Expresia analitică a caracteristicii intrinseci liniară şi logaritmică este:

$$\frac{K_v}{K_{vs}} = \frac{K_{v0}}{K_{vs}} + \left(1 - \frac{K_{v0}}{K_{vs}}\right) \frac{h}{h_{100}}; \tag{6.12}$$

$$\frac{K_v}{K_{vs}} = \frac{K_{v0}}{K_{vs}} \exp\left[1 \text{ n} \left(\frac{K_{vs}}{K_{v0}}\right) \cdot \frac{h}{h_{100}}\right], \tag{6.13}$$

unde: h_{100} reprezintă cursa nominală a tijei robinetului de reglare.

Un parametru caracteristic pentru robinetul de reglare îl reprezintă raportul de reglare $R_r = \frac{K_{vs}}{K_{v0}}$, care defineşte lărgimea domeniului de reglare de la o valoare minimă K_{v0} la o valoare nominală K_{vs}.

Calculul debitului ce trece printr-un robinet presupune cunoaşterea valorii corespunzătoare a lui K_v ţinînd seama de relaţia

$$Q = K_v \sqrt{\frac{\Delta p_r}{\rho}}. \tag{6.14}$$

Alegerea robinetului se face în funcţie de valoarea lui K_v, ţinînd seama de natura fluidului, de proprietăţile acestuia şi de structura sistemului hidraulic în cadrul căruia este montat robinetul de reglare [26, 43].

Caracteristica statică a unui robinet de reglare ($Q = Q(h)$ se defineşte ţinînd seama de faptul că în funcţie de tipul robinetului şi de sistemul hidraulic căderea de presiune pe robinet este variabilă.

Dacă asimilăm conducta pe care este montat robinetul de reglare cu o rezistenţă hidraulică caracterizată prin K_c, pe care are loc pierderea de presiune Δp_c, atunci debitul de fluid este dat de relaţia

$$Q = K_c \sqrt{\frac{\Delta p_c}{\rho}}. \tag{6.15}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pe baza relaţiilor (6.14), (6.15) şi (6.9), obţinem

$$Q = K_v \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{K_v}{K_c}\right)^2}} \cdot \sqrt{\frac{\Delta p_0}{\rho}} \qquad (6.16)$$

sau dacă admitem că pentru întregul sistem hidraulic variaţia căderii de presiune cu sarcina este neglijabilă, în urma unor calcule simple, se obţine expresia caracteristicii statice a unui robinet de reglare, sub forma

$$\frac{Q}{Q_{100}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\Delta p_{r100}}{\Delta p_0}\left[\frac{1}{\left(\frac{K_v}{K_{v100}}\right)^2}-1\right]}}, \qquad (6.17)$$

unde: Δp_{r100} reprezintă căderea de presiune pe robinet la deschiderea nominală (h_{100});

Δp_0 — căderea de presiune în sistem (conductă, robinet de reglare şi internă, în sursă).

Relaţia (6.17) evidenţiază faptul că în funcţie de raportul $\frac{\Delta p_{r100}}{\Delta p_0}$ se obţine o familie de caracteristici statice neliniare. Pentru cazul în care întreaga cădere de presiune din sistem are loc pe robinet se obţine o caracteristică statică ideală, care coincide cu caracteristica intrinsecă. Cu cît raportul $\frac{\Delta p_{r100}}{\Delta p_0}$ scade, neliniaritatea caracteristicii statice devine mai pronunţată (fig. 6.7). Familiile de caracteristici statice pentru două tipuri uzuale de robinete de reglare (cu caracteristică intrinsecă liniară şi logaritmică) pentru diverse valori ale raportului căderilor de presiune $\frac{\Delta p_{r100}}{\Delta p_{s100}}$ sînt prezentate în figurile 6.7, *a* şi *b*.

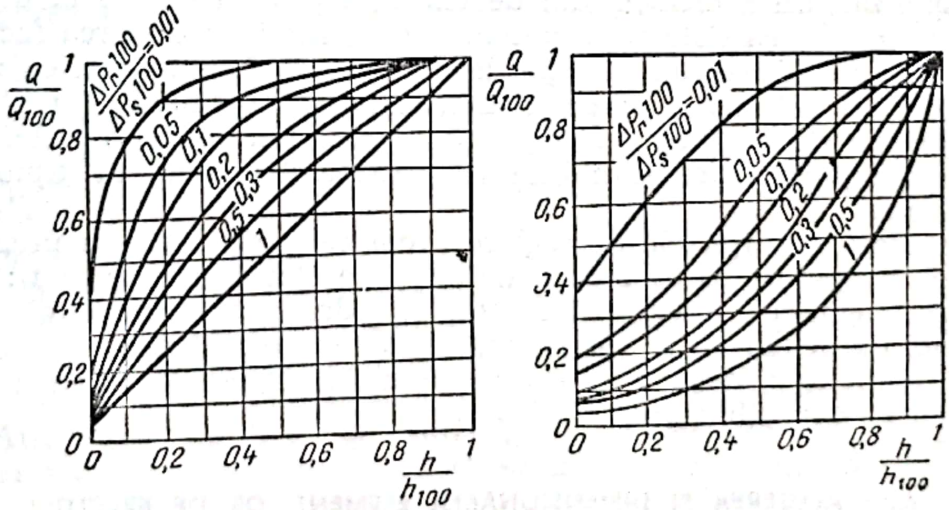


Fig. 6.7. Familii de caracteristici ale robinetelor de reglare pentru diverse valori ale raportului $\frac{\Delta p_{r100}}{\Delta p_{s100}}$:

a — caracteristici statice pentru robinete liniare; *b* — caracteristici statice pentru robinete logaritmice.

Scanned with OKEN Scanner

La alegerea unui robinet de reglare pentru un proces dat este necesară cunoaşterea caracteristicii statice a robinetului corespunzătoare raportului $\frac{\Delta p_{r100}}{\Delta p_0}$. Factorul de amplificare al robinetului de reglare este o funcţie de raportul căderilor de presiune pe robinet şi pe sistem. O alegere necorespunzătoare a caracteristicii de lucru a robinetului poate conduce la instabilitatea sistemului.

Pentru alegerea corespunzătoare a unui robinet de reglare se impune a lua în consideraţie efectul viscozităţii, al compresibilităţii, precum şi fenomenele acustice ce apar în regimul de funcţionare critic al robinetului şi fenomenele de cavitaţie.

În ceea ce priveşte caracteristica dinamică a robinetului de reglare, aceasta se defineşte ţinînd seama de tipul şi caracteristica elementului de acţionare.

De menţionat este faptul că dinamica unui element de execuţie este influenţată de parametrii fluidului, de dimensiunile şi tipul organului de reglare, precum şi de caracteristicile elementului de acţionare. Pentru zona liniară a caracteristicii statice, modelul matematic al elementului de execuţie poate fi aproximat printr-o funcţie de transfer $H_e(s)$ definită ca raportul mărimilor $U(s)$ şi $M(s)$, avînd forma

$$H_e(s)=\frac{K}{T_2^2 s^2+T_1 s+1} \tag{6.18}$$

sau

$$H_e(s)=\frac{K}{s(T_a s+1)(T_b s+1)}. \tag{6.19}$$

Coeficientul de transfer K este dat de produsul dintre factorul de amplificare al elementului de acţionare şi coeficientul de transfer al organului de reglare. Acest coeficient este o funcţie neliniară de deplasarea h a organului de reglare şi de aceea la proiectarea unui sistem de reglare trebuie definit domeniul de lucru al elementului de execuţie. O alegere necorespunzătoare a elementului de execuţie poate conduce la instabilitate în funcţionarea sistemului automat, dată fiind modificarea factorului de amplificare al acestuia funcţie de regimul de funcţionare, ca urmare a caracterului neliniar al caracteristicii statice a organului de reglare.

Constantele de timp au valori în general reduse pentru elementele de execuţie pneumatice şi hidraulice, acestea depinzînd de tipul organului de reglare.

În afară de organele de reglare a debitelor de fluid, în practică se întîlnesc diverse tipuri de organe de execuţie electrice, cum ar fi: amplificatoare magnetice, autotransformatoare, redresoare comandate cu tiristoare etc. Particularităţile acestor organe de execuţie, legate de tipul procesului tehnologic, determină metodologia de alegere şi dimensionare a organelor de execuţie corespunzătoare.

6.2.3. ALEGEREA ŞI DIMENSIONAREA ELEMENTELOR DE EXECUŢIE

O primă etapă în alegerea elementului de execuţie constă în alegerea şi dimensionarea organului de reglare funcţie de tipul procesului tehnologic, de caracteristica statică a acestuia, de caracteristicile flui-

Scanned with OKEN Scanner

dului introdus sau evacuat din instalaţia tehnologică, de traseul pe care se montează organul de execuţie şi de perturbaţiile ce acţionează asupra procesului.

La alegerea unui organ de reglare a debitului de fluid trebuie parcurse etapele:

a. Se calculează pierderile de presiune pe conductă corespunzătoare debitului maxim, nominal şi minim.

b. Ţinînd seama de pierderile de presiune ce apar pe robinet şi în sistem se aleg caracteristica statică de lucru a robinetului de reglare, precum şi tipul caracteristicii intrinseci a acestuia (liniară sau logaritmică).

c. Se determină presiunea sursei pentru debitul maxim Q_{max} şi se precizează caracteristica statică a sursei de presiune.

d. Se determină căderea de presiune minimă pe robinetul de reglare, ţinînd seama de pierderea minimă de presiune în sistem şi pe conductă.

e. Se aleg variantele constructive ale ventilului şi robinetului de reglare funcţie de caracteristicile fluidului şi de căderea de presiune pe robinet.

f. Se calculează K_v-ul robinetului de reglare corespunzător debitului maxim $K_{v\,max}$, debitului minim $K_{v\,min}$ şi se alege din catalog K_{vs} ţinînd seama de relaţiile:

$$K_{vs} \simeq (1{,}25 \ldots 1{,}4)\, K_{v\,max};$$

$$K_{v\,min} \geqslant 1{,}2\, K_{v0}.$$

g. Se verifică dacă este îndeplinită condiţia

$$\frac{K_{vs}}{K_{vmin}} < R_r.$$

h. Se calculează K_v pentru debitul nominal Q_n, stabilindu-se poziţia de funcţionare a robinetului de reglare în condiţii nominale.

După alegerea organului de reglare conform acestui algoritm se trece la alegerea elementului de acţionare, alegere care are în vedere tipul acţionării (pneumatică, hidraulică sau electrică) pe de o parte şi caracteristica dinamică a acestuia (proporţională sau integrală) pe de altă parte.

La alegerea tipului acţionării se au în vedere avantajele şi dezavantajele prezentate în paragraful 6.2.1., iar la alegerea caracteristicii proporţională sau integrală se au în vedere tipul procesului şi tipul regulatorului.

Principalele probleme ce trebuie rezolvate după alegerea tipului acţionării sînt legate de realizarea unei concordanţe între cursa robinetului şi cursa tijei elementului de acţionare şi dezvoltarea unei puteri (sau cuplu) suficiente pentru învingerea tuturor forţelor rezistente ce intervin în acţionarea organului de execuţie.

Atît pentru cursă cît şi pentru putere, în cataloagele firmelor producătoare de elemente de acţionare se dau valori standard care se pot alege.

În literatură [26, 43] se dau exemple de alegere şi dimensionare a elementelor de execuţie precum şi date din cataloage ale unor firme producătoare. La Întreprinderea de utilaj petrolier Tîrgovişte se produce o gamă largă de robinete de reglare cu acţionare pneumatică.

Scanned with OKEN Scanner

Alegerea unui element de execuţie se face în funcţie de tipul procesului tehnologic şi în concordanţă cu satisfacerea performanţelor generale ale sistemului automat.

6.3. CONSIDERAŢII PRIVIND ALEGEREA TRADUCTOARELOR ÎN SISTEMELE DE REGLARE AUTOMATĂ

Într-un sistem de reglare automată, traductorul transformă mărimea de la ieşirea procesului într-o mărime compatibilă cu intrarea regulatorului. Prin intermediul traductorului se culeg informaţii asupra evoluţiei procesului şi se transmit la intrarea regulatorului automat. Traductoarele pot măsura mărimea de la ieşire continuu sau discontinuu, generînd la ieşire o mărime analogică sau numerică.

După principiul de funcţionare, traductoarele se clasifică în *traductoare generatoare* şi *parametrice*, iar după natura mărimii măsurate se întîlnesc *traductoare de temperatură, traductoare de presiune, traductoare de nivel, traductoare de concentraţie, traductoare de debit* etc.

Alegerea tipului de traductor pentru un proces tehnologic dat reprezintă o etapă importantă în procesul de proiectare a unui sistem de reglare. Performanţele traductorului joacă un rol deosebit în realizarea performanţelor globale ale sistemului de reglare automată. În funcţie de natura procesului respectiv, a parametrului de măsurat, se alege tipul de traductor care asigură transferul de informaţie spre regulatorul automat cu performanţele cele mai bune. Principalele performanţe ce trebuie avute în vedere la alegerea unui traductor sînt: liniaritatea, sensibilitatea, precizia, fidelitatea, fineţea şi viteza de răspuns.

Liniaritatea se referă la caracteristica statică a traductorului şi presupune proporţionalitatea între mărimea de ieşire şi mărimea de intrare a traductorului în regim staţionar. Cu cît domeniul de liniaritate al caracteristicii statice este mai mare cu atît traductorul este mai bun.

Sensibilitatea este calitatea de a determina variaţii mari ale mărimii de ieşire la apariţia unor variaţii reduse ale mărimii de intrare şi se exprimă prin

$$S=\frac{\Delta y}{\Delta y_r};$$

Pentru o caracteristică statică liniară, $S=K=$const. Variaţia minimă a mărimii de măsurat care determină o variaţie a mărimii de ieşire cel puţin egală cu eroarea admisibilă a traductorului reprezintă *pragul de sensibilitate* al traductorului. Valoarea sensibilităţii se impune a fi ridicată, iar pragul de sensibilitate cît mai redus.

Precizia traductorului se indică prin clasa de precizie a acestuia, definită ca raport al erorii admisibile în regim staţionar şi domeniul de variaţie al mărimii de la ieşire ce poate fi măsurat. Cu cît această clasă de precizie este mai redusă cu atît precizia traductorului este mai bună.

Traductoarele pneumatice şi electronice realizate la I.E.A. şi IEPAM — Bîrlad sînt caracterizate printr-o clasă de precizie de ordinul 0,5, situîndu-le printre traductoarele cu bune performanţe realizate în lume.

Scanned with OKEN Scanner

Fidelitatea este aceea calitate a traductorului de a furniza informaţii utile numai asupra parametrului măsurat, efectul celorlalţi parametri ce intervin în proces neinfluenţînd mărimea de la ieşirea traductorului.

Fineţea este calitatea traductorului de a realiza funcţia de conversie a unei mărimi de o anumită natură fizică într-o mărime de altă natură fizică, cu un consum minim de energie.

Performanţele tranzitorii ale traductorului, definite prin *viteză de răspuns*, prin suprareglaj şi durată a procesului tranzitoriu, au o deosebită importanţă în realizarea unui sistem de reglare cu performanţe bune. Cu cît informaţia obţinută despre evoluţia procesului este mai promptă şi mai completă cu atît performanţele sistemului de reglare sînt mai bune.

În funcţie de tipul procesului, alegerea unui traductor se face luînd în considerare atît performanţele staţionare cît şi performanţele tranzitorii ale acestuia, corelate cu performanţele generale ale sistemului. Parametrul de măsurat determină tipul de traductor ce trebuie utilizat. Poziţia traductorului în cadrul procesului tehnologic joacă, de asemenea, un rol important în realizarea performanţelor impuse.

Modelul matematic al unui traductor în general conţine un coeficient de transfer K_T şi o constantă sau două de timp.

Pentru un anumit proces şi un anumit parametru de măsurat este necesară alegerea unui anumit traductor corespunzător cerinţelor de performanţă impuse. Astfel, tipul traductorului, ca şi tipul elementului de execuţie, este determinat de natura procesului supus reglării. Se poate considera că procesul tehnologic cu elementul de execuţie şi traductorul alcătuiesc o parte fixată a sistemului de reglare, o parte care odată aleasă nu există posibilitatea de a o ajusta.

Ţinînd seama de aceste considerente, structura sistemului de reglare are forma dată în figura 6.8.

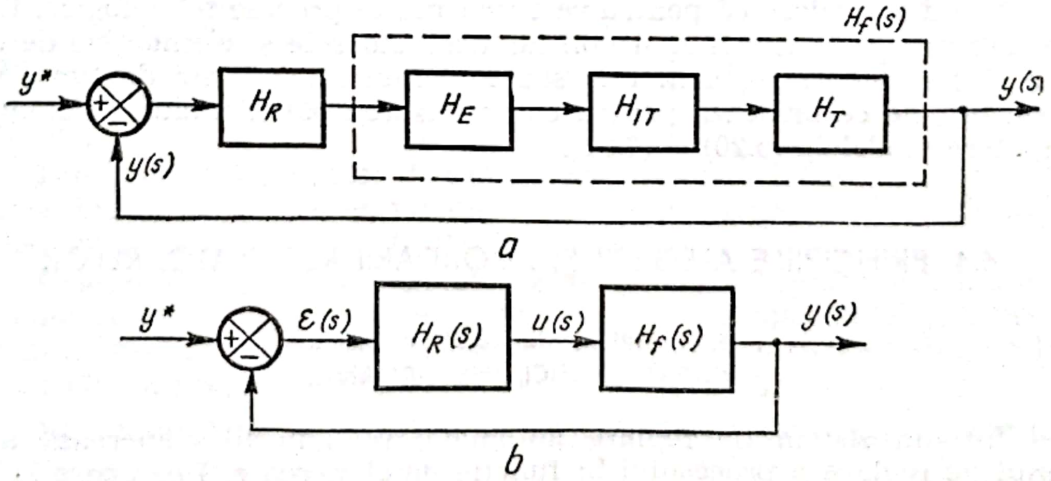


Fig. 6.8. Schema generală a unui sistem de reglare automată:
$H_R(s)$ — funcţia de transfer a regulatorului; $H_E(s)$ — funcţia de transfer a elementului de execuţie; $H_{rT}(s)$ — funcţia de transfer a instalaţiei tehnologice; H_T — funcţia de transfer a traductorului; $H_f(s)$ — funcţia de transfer a părţii fixate.

Scanned with OKEN Scanner

Prin $H_f(s)=H_E \cdot H_{IT} \cdot H_T$ s-a notat funcţia de transfer a părţii fixate a sistemului, iar prin $H_R(s)$ funcţia de transfer a regulatorului.

Ţinînd seama de modelul matematic al elementului de execuţie, al instalaţiei tehnologice şi al traductorului, funcţia de transfer a părţii fixe poate fi scrisă sub forma

$$H_f(s)=\frac{K_f}{(T_\Sigma s+1)\prod_1^n (T_i s+1)} \tag{6.20}$$

sau, în prezenţa timpului mort τ şi a unui pol în origine, sub forma

$$H_f(s)=\frac{K_f \cdot e^{-\tau s}}{s\prod_1^n (T_i s+1)(T_\Sigma s+1)}, \tag{6.21}$$

unde: K_f reprezintă coeficientul de transfer al părţii fixe;

T_i — constantele predominante (mari) în timp;

T_Σ — suma tuturor constantelor de timp parazite care sînt mult mai mici decît constantele predominante;

τ — timpul mort al procesului.

Valoarea constantelor de timp T_i determină tipul procesului tehnologic, care poate fi lent sau rapid (v. subcap. 5.6).

În general, funcţia de transfer a părţii fixate, în care se includ obiectul supus automatizării şi elementele auxiliare pentru obţinerea informaţiei despre evoluţia parametrului reglat (traductorul) şi pentru comanda surselor de energie ce intervin în proces (elementul de execuţie), poate avea forma

$$H_f(s)=\frac{b_m s^m+\cdots+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0} e^{-\tau s}$$

care poate evidenţia atît singularităţi de tip zerouri cît şi poli.

Avînd în vedere că pentru cele mai multe procese tehnologice, funcţiile de transfer conţin numai poli iar traductoarele şi elementele de execuţie sînt caracterizate prin una sau mai multe constante de timp, vom utiliza în cele ce urmează pentru caracterizarea părţii fixate a sistemelor de reglare modelele (6.20) şi (6.21).

6.4. PRINCIPIILE ALEGERII ŞI ACORDĂRII REGULATOARELOR

6.4.1. TIPURI DE REGULATOARE. CARACTERISTICI, PERFORMANŢE

Într-un sistem de reglare automată, regulatorul elaborează algoritmul de reglare a procesului în funcţie de abaterea $\varepsilon(t)$ ce apare în sistem. Regulatorul prelucrează informaţia primită de la proces comparativ cu programul impus şi stabileşte strategia de acţiune a elementului de execuţie în vederea anulării abaterii între programul impus sistemului şi valoarea realizată a parametrului reglat. Astfel, legea de dependenţă

Scanned with OKEN Scanner

dorită între mărimea de ieşire $y(t)$ şi mărimea de intrare $r(t)$ (referinţa), pe care trebuie să o realizeze sistemul de reglare automată, în principal este asigurată prin dependenţa realizată de regulatorul automat între mărimile $u(t)$ şi $\varepsilon(t)$.

Proiectarea şi realizarea corespunzătoare a regulatorului automat determină o comportare dorită a sistemului de reglare automată şi deci realizarea performanţelor impuse sistemului.

Flexibilitatea algoritmului de reglare, determinată pe de o parte de diversele legi de prelucrare a erorii (*P, PI, PD, PID, PDD*$_2$) iar pe de altă parte de posibilitatea modificării parametrilor (K_R, T_i, T_d) ce intervin în modelul matematic al regulatorului, oferă posibilităţi largi de realizare a performanţelor SRA pentru o parte fixată dată apriori.

Există mai multe criterii după care se clasifică regulatoarele, criterii determinate pe de o parte de tipul şi caracteristicile instalaţiei tehnologice iar pe de altă parte de caracteristicile de funcţionare ale regulatoarelor automate (*RA*).

Astfel, în funcţie de tipul instalaţiei tehnologice se întîlnesc regulatoare pentru procese invariante, a căror funcţionare este descrisă de asemenea prin modele cu parametri constanţi, şi regulatoare pentru procese cu caracteristici variabile în timp, denumite *regulatoare adaptive* şi *extremale*. După viteza de răspuns a instalaţiei tehnologice, regulatoarele se clasifică în regulatoare pentru procese lente şi regulatoare pentru procese rapide.

După caracteristicile de funcţionare ale *RA*, acestea se clasifică în *regulatoare cu acţiune continuă* şi *regulatoare cu acţiune discretă, liniare* şi *neliniare*. Regulatoarele liniare sînt caracterizate de o dependenţă liniară între mărimea de comandă u şi abaterea ε aplicată la intrarea acestora, iar regulatoarele neliniare sînt caracterizate printr-o relaţie $u=f(\varepsilon)$ neliniară, putînd fi de tip releu cu două sau trei poziţii, cu comutaţie impusă, extremală etc. Regulatoarele cu acţiune discretă pot fi cu impulsuri modulate şi numerice.

În funcţie de algoritmul de reglare elaborat, respectiv în funcţie de legea de reglare, regulatoarele se clasifică în regulatoare convenţionale de tip *P, PD, PI, PID, PDD*$_2$ şi regulatoare cu caracteristici speciale, cum ar fi *regulatoare adaptive, extremale, optimale, regulatoare cu estimarea stării* etc.

După agentul purtător de semnal se deosebesc *RA electronice, pneumatice, hidraulice* şi *mixte*, iar după caracteristicile semnalelor de intrare se deosebesc *regulatoare unificate* şi *specializate*.

Cele mai răspîndite regulatoare în practica reglării automate sînt regulatoarele cu acţiune continuă liniare de tip proporţional (*P*), proporţional-integral *(PI)*, proporţional-derivativ *(PD)*, proporţional-integral-derivativ *(PID)*, proporţional-derivativ-derivativ *(PDD*$_2$*)*.

Regulatorul proporţional (P). Acest regulator este caracterizat printr-o ecuaţie diferenţială de forma

$$u(t)=K_R\cdot\varepsilon(t) \tag{6.22}$$

în cazul ideal, unde K_R reprezintă factorul de amplificare al regulatorului şi este parametrul de acord al regulatorului.

Scanned with OKEN Scanner

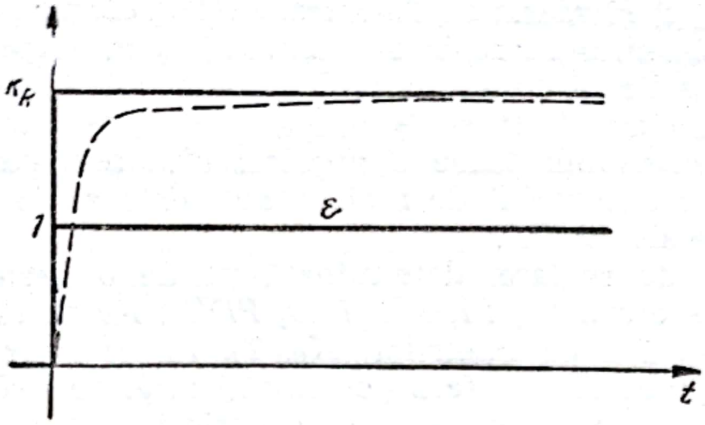


Fig. 6.9. Răspunsul indicial al unui regulator *P*.

Acest parametru de acord poate fi modificat în limite largi, în funcţie de aplicaţie şi în funcţie de performanţele impuse sistemului de reglare automată. Un regulator de tip *P* este caracterizat, de asemenea, prin *banda de proporţionalitate* definită sub forma $BP=\frac{100}{K_R}$. Pentru multe aplicaţii valoarea acestui parametru este cuprinsă între 1 şi 400%.

Răspunsul indicial ideal al acestui tip de regulator *P* este prezentat în figura 6.9.

În cazul real, în funcţionarea acestui regulator intervine o întîrziere de ordinul întîi sau de ordinul doi. Funcţia de transfer a unui regulator *P* ideal este o constantă egală cu factorul de amplificare, iar a unui regulator *P* real cu întîrziere de ordinul întîi este

$$H_R(s)=\frac{K_R}{\tau_1 s+1}; \tag{6.23}$$

Răspunsul indicial al regulatorului *P* real cu întîrziere de ordinul întîi este reprezentat de curba din figura 6.9. Regulatorul *P* introdus într-o buclă de reglare poate conduce la o funcţionare stabilă însă cu o eroare staţionară a cărei valoare variază invers cu factorul de amplificare al regulatorului, pentru un sistem ce nu conţine poli în origine, la o variaţie în treaptă a mărimii de intrare.

Pentru o structură de sistem (fig. 6.10) unde partea fixată o considerăm a fi caracterizată printr-o funcţie de transfer

$$H_f(s)=\frac{K_f}{T_f s+1},$$

utilizarea unui regulator proporţional asigură bune performanţe tranzitorii însă eroarea în regim staţionar este funcţie de valoarea factorului de amplificare K_R.

Funcţia de transfer a sistemului în stare deschisă este dată de relaţia

$$H_d(s)=K_R\cdot\frac{K_f}{K_f s+1}=\frac{K_f K_R}{T_f s+1} \tag{6.24}$$

iar funcţia de transfer a sistemului închis

$$H_0(s)=\frac{H_d(s)}{1+H_d(s)}=\frac{K_f K_R}{T_f s+1+K_f\cdot K_R}=\frac{K_f\cdot K_R}{1+K_f\cdot K_R}\cdot\frac{1}{\frac{T_f}{1+K_f\cdot K_R}s+1}=\frac{K_0}{T_0 s+1}, \tag{6.25}$$

Analiza funcţiei de transfer (6.25) evidenţiază faptul că factorul de amplificare al întregului sistem K_0 este mai redus ($K_0<K=K_f K_R$), iar constanta de timp T_0 este de asemenea mai mică decît în cazul în care pro-

Scanned with OKEN Scanner

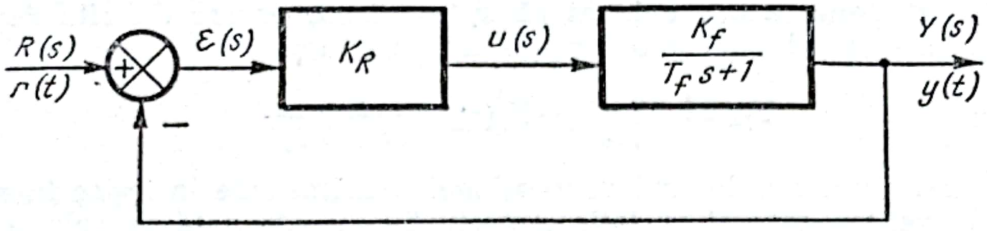


Fig. 6.10. Schema unui SRA cu regulator *P*.

cesul nu este reglat cu ajutorul unui regulator *P* ($T_0 < T_f$). Eroarea în regim staţionar pentru o intrare treaptă unitară este dată de relaţia

$$\varepsilon_{st} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+K_f \cdot K_R}. \tag{6.26}$$

Coeficientul de eroare de poziţie K_p în acest caz este

$$K_p = \lim_{s\to 0} \frac{K_f K_R}{Ts+1} = K_f \cdot K_R.$$

Relaţia (6.26) ilustrează faptul că precizia reglării este funcţie de valoarea factorului de amplificare K_R
Pentru $K_f=0{,}5$ şi $T_f=5$, rezultă:

$$\varepsilon_{st} = \frac{1}{1+0{,}5K_R};$$

$$K_0 = \frac{0{,}5K_R}{1+0{,}5K_R};$$

$$T_0 = \frac{5}{1+0{,}5K_R}.$$

Creşterea factorului de amplificare K_R determină o reducere a erorii staţionare (deci o creştere a preciziei) şi o reducere a constantei de timp a sistemului.

În general, datorită faptului că pentru procese care nu conţin elemente integratoare (în funcţia de transfer nu există poli în origine) prezenţa regulatorului *P* atrage funcţionarea sistemului cu abatere staţionară, la variaţia treptată a mărimii de referinţă nu se recomandă utilizarea acestui tip de regulator singur, decît în cazurile în care precizia se încadrează în limitele admisibile.

În raport cu perturbaţia $P(s)$, funcţia de transfer a sistemului pentru exemplul considerat este dată de relaţia

$$H_{0p}(s) = \frac{Y_f(s)}{P(s)} = \frac{\dfrac{0{,}5}{5s+1}}{1+\dfrac{0{,}5K_R}{5s+1}} = \frac{0{,}5}{5s+1+0{,}5K_R},$$

iar ieşirea sistemului în funcţie de perturbaţie este

$$Y_p(s) = \frac{0{,}5}{5s+1+0{,}5K_R} \cdot P(s).$$

Scanned with OKEN Scanner

În regim staţionar apare evident că sistemul are eroare diferită de zero admiţînd că perturbaţia are o variaţie în treaptă unitară

$$Y_{fst} = \lim_{s\to 0} [s \cdot Y_p(s)] = \frac{0{,}5}{1+0{,}5K_R}.$$

Fără a introduce regulatorul proporţional, mărimea de la ieşire în regim staţionar pentru aceeaşi variaţie a perturbaţiei este dată de relaţia

$$Y_{fst}=0{,}5.$$

Prin intervenţia regulatorului P efectul perturbaţiei este redus cu factorul $\frac{1}{1+0{,}5K_R}$.

Un regulator P poate fi ales atunci cînd procesul conţine un element integrator. În acest caz se asigură o eroare staţionară zero, deci o bună comportare a sistemului în regim staţionar. Pentru procese cu mai multe constante de timp fără elemente integratoare, alegerea unui regulator P poate atrage instabilitatea sistemului, impunîndu-se alegerea unor valori mici pentru factorul de amplificare însă scăderea factorului de amplificare determină o creştere a erorii în regim staţionar. În funcţie de tipul procesului, de cerinţele de performanţă impuse, se va alege valoarea cea mai bună pentru factorul de amplificare.

Regulatorul integral (I). Acest regulator este caracterizat prin relaţia

$$u(t)=\frac{1}{T_i}\int_0^t \varepsilon\, dt \qquad (6.27)$$

sau

$$\tau_1 \frac{du}{dt} + u = \frac{1}{T_i}\int_0^t \varepsilon\, dt, \qquad (6.28)$$

în cazul în care regulatorul are o întîrziere de ordinul întîi în funcţionarea sa.

T_i este constanta acţiunii integrale şi reprezintă parametrul de acord al regulatorului.

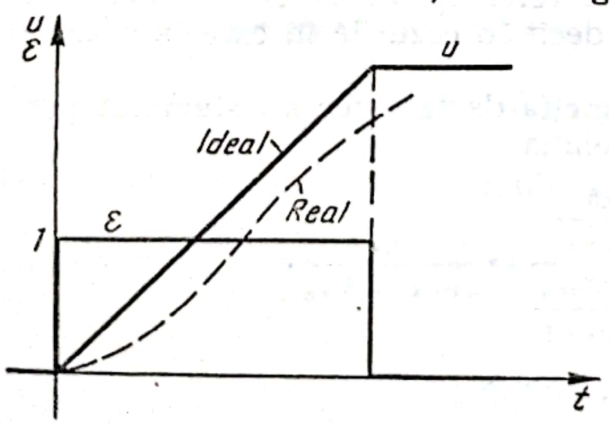


Fig. 6.11. Răspunsul indicial al unui regulator I ideal.

Răspunsul indicial al unui regulator I ideal (fig. 6.11) este o rampă cu panta $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{T_i}$. De remarcat faptul că regulatorul I are un caracter de memorie, întrucît o comandă u nenulă poate exista şi în cazul în care intrarea în regulator este zero.

Răspunsul indicial al unui regulator I cu întîrziere de ordinul întîi se poate obţine relativ

Scanned with OKEN Scanner

ușor dacă rezolvăm ecuația (6.28) pentru o variație a erorii sub formă de treaptă unitară

$$u(t)=\frac{t}{T_i}-\frac{\tau_1}{T_i}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right). \tag{6.29}$$

Diferența între cele două răspunsuri indiciale ideal $u_i(t)$ și real $u_r(t)$ este dată de relația

$$a(t)=u_i(t)-u_r(t)=\frac{t}{T_i}-\left[\frac{t}{T_i}-\frac{\tau_1}{T_i}(1-e^{-t/\tau_1})\right] \tag{6.30}$$

sau

$$a(t)=\frac{\tau_1}{T_i}\ (1-e^{-t/\tau_1}).$$

Abaterea răspunsului indicial real față de răspunsul indicial ideal este cu atît mai mare cu cît constanta de timp t_1 este mai mare.

Dacă timpul integral este mic, ținînd seama de răspunsul rampă al acestui regulator, la comenzi prea mari se poate ușor satura, iar funcția de reglare poate fi compromisă. Prezența polului în origine în funcția de transfer a acestui regulator asigură o bună comportare în regim staționar a sistemului de reglare ($\varepsilon_{st}=0$) la intrare treaptă unitară, însă gradul de stabilitate al sistemului poate să scadă. În general, regulatorul *I* nu se folosește în sistemele de reglare sub această formă ci în combinație cu regulatorul *P*.

Regulatorul proporțional-integrator (PI). Acest regulator este descris de următoarea relație aproximativă intrare-ieșire

$$u(t)=K_R\left[\varepsilon(t)+\frac{1}{T_i}\int_0^t\varepsilon(t)dt\right] \tag{6.31}$$

sau

$$H_R(s)=K_R\left(\frac{1}{T_i s}\right). \tag{6.32}$$

În cazul real, în funcția de transfer a regulatorului *PI* apare o întîrziere de ordinul întîi sau de ordinul doi

$$H_R(s)=\frac{K_R\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)}{\tau_1 s+1},$$

unde τ_1 reprezintă constanta de timp a regulatorului, care în raport cu T_i este mult mai mică.

La un asemenea algoritm se dispune de doi parametri ce pot fi modificați astfel încît să se asigure performanțele dorite pentru sistem. Efectul *I* determină anularea erorii în regim staționar și se recomandă a fi utilizat cînd intrarea sistemului variază lent după un program, iar componenta proporțională asigură viteza ridicată de răspuns.

Scanned with OKEN Scanner

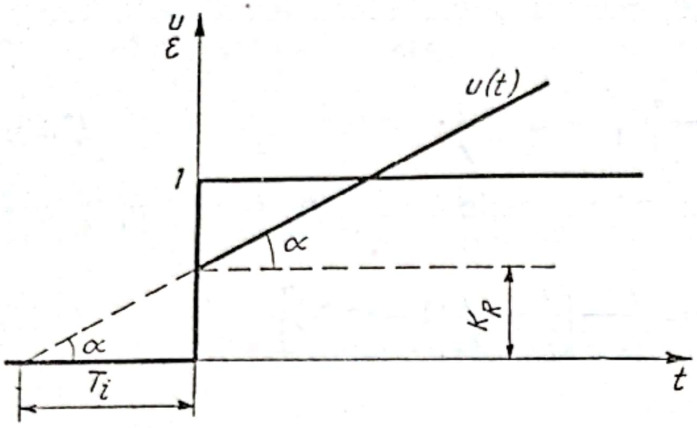


Fig. 6.12. Răspunsul indicial al unui regulator *PI* ideal.

Funcţia indicială a unui regulator *PI* ideal este reprezentată în figura 6.12. În acest caz constanta acţiunii integrale se determină ca în figura 6.12 ($T_i = K_R/\text{tg}\,\alpha$).

Pentru a ilustra modul de acţiune a unui regulator *PI* asupra unui proces de ordinul întîi considerăm sistemul din figura 6.13.

Funcţia de transfer a sistemului, $H_0(s)$, este dată de relaţia

$$H_0(s) = \frac{H_R(s)\cdot H_f(s)}{1+H_R(s)\,H_f(s)} = \frac{K_R\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)\frac{K_f}{T_f s+1}}{1+K_R\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)\frac{K_f}{T_f s+1}} = \frac{K_f K_R\,(1+T_i s)}{T_i s\,(T_f s+1)+K_f K_R\,(T_i s+1)} \quad (6.33)$$

sau

$$H_0(s) = \frac{K_f K_R\,(1+T_i s)}{T_i T_f s^2+T_i\,(1+K_f K_R)\,s+K_f K_R} = \frac{K_f K_R}{T_i T_f s^2+T_i\,(1+K_f K_R)\,s+K_f K_R}\cdot(1+T_i s) \quad (6.34)$$

Modelul obţinut evidenţiază faptul că sistemul are o întîrziere de ordinul doi şi conţine, de asemenea, un element de anticipaţie de ordinul întîi (un zero simplu).

Dacă facem analogia cu un sistem echivalent de ordinul doi caracterizat prin ω_n şi ζ, putem scrie funcţia de transfer a sistemului şi sub forma

$$H_0(s) = \frac{\omega_n^2}{s^5+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\cdot T_i\left(\frac{1}{T_i}+s\right), \quad (6.35)$$

unde:

$$\omega_n^2 = \frac{K_f K_R}{T_i T_f}; \qquad \zeta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_i T_f}{K_f K_R}}\,\frac{(1+K_f K_R)}{T_f}.$$

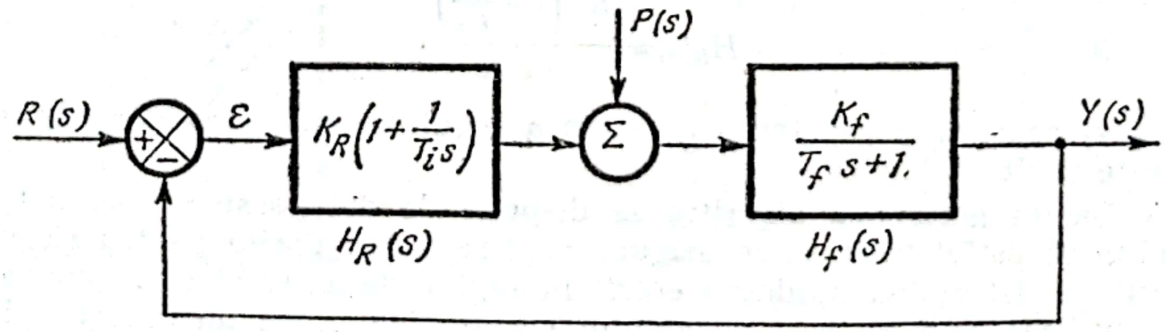


Fig. 6.13. Schema unui SRA cu regulator *PI*.

Scanned with OKEN Scanner

Răspunsul acestui sistem este compus dintr-un răspuns echivalent al unui sistem de ordinul doi şi un răspuns determinat de prezenţa zeroului $z=-\frac{1}{T_i}$ la numărătorul funcţiei de transfer.

Pentru intrare treaptă unitară răspunsul sistemului este dat de relaţia

$$Y(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}+\frac{T_i\cdot\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n^2 s+\omega_n^2}. \tag{6.36}$$

Prezenţa zeroului în funcţia de transfer a sistemului influenţează valoarea suprareglajului şi durata procesului tranzitoriu. Aplicînd transformata Laplace inversă relaţiei (6.36) şi notînd cu $y_2(t)$ răspunsul sistemului echivalent de ordinul doi, se obţine

$$y(t)=y_2(t)+T_i\frac{dy_2(t)}{dt}. \tag{6.37}$$

Această relaţie evidenţiază o creştere a oscilaţiilor procesului tranzitoriu întrucît la valorile ordonatelor $y_2(t)$ se adaugă mărimi proporţionale cu derivata $\frac{dy_2(t)}{dt}$, coeficientul de proporţionalitate fiind chiar constanta acţiunii integrale.

Durata procesului tranzitoriu ca urmare a acţiunii derivative, deci a prezenţei unui zero al funcţiei de transfer a sistemului, se reduce [10].

Pentru a ilustra influenţa prezenţei unui zero z_r în funcţia de transfer a unui sistem de ordinul doi asupra suprareglajului şi timpului de creştere normalizat ($\omega_n t_c$), în figura 6.14 se prezintă dependenţa acestor performanţe în raport cu z_r pentru diverse valori ale lui ζ [17].

Aceste grafice ilustrează faptul că efectul lui z_r asupra lui σ şi asupra lui t_c poate fi neglijat dacă $\zeta > 0{,}5$ şi $z_r > 5\,\xi\omega_n$.

Eroarea în regim staţionar pentru intrare treaptă unitară este zero ($H_0(0)=1$), iar pentru intrare rampă unitară este $\varepsilon_{st}=\frac{T_i}{K_f K_R}$, fiind funcţie atît de valoarea lui K_R cît şi de valoarea lui T_i.

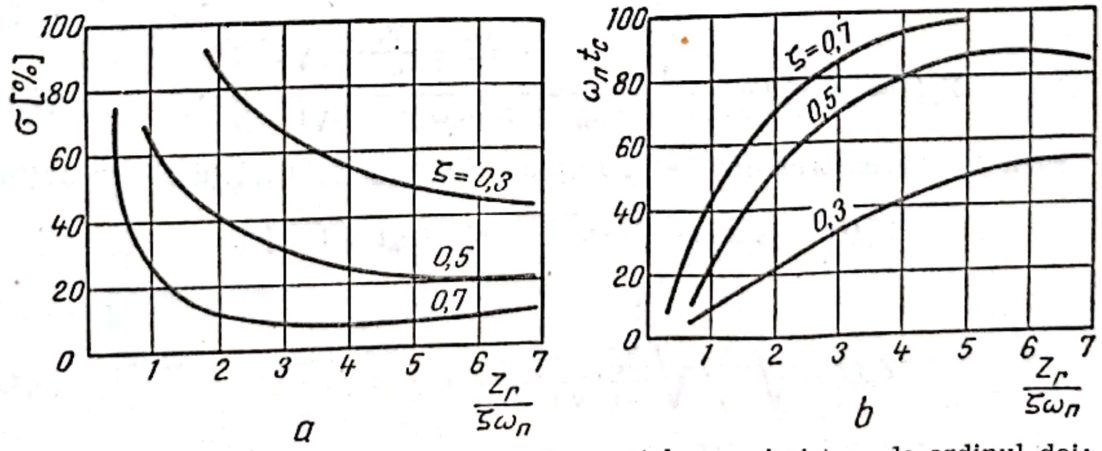


Fig. 6.14. Efectul unui zero asupra performanţelor unui sistem de ordinul doi:
a — influenţa asupra suprareglajului; *b* — influenţa asupra timpului de creştere.

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, ținînd seama că pentru intrare rampă unitară coeficientul de eroare de viteză $K_v = \lim_{s\to 0} sH_d(s) = \lim_{s\to 0} [sH_R(s)H_f(s)] =$

$$= \lim_{s\leftarrow 0}\left[s \cdot \frac{K_R}{T_i s}\cdot(1+T_i s)\cdot\frac{K_f}{T_f s+1}\right] = \frac{K_R K_f}{T_i},$$

eroarea în regim staționar este

$$\varepsilon_{st} = \frac{1}{K_v} = \frac{T_i}{K_R K_f}.$$

Funcția de transfer în raport cu perturbația (v. fig. 6.13) este dată de relația

$$H_{0p}(s) = \frac{\frac{K_f}{T_f s+1}}{1+K_R\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)\cdot\frac{K_f}{T_f s+1}} = \frac{K_f K_i s}{T_i T_f s^2 + T_i(1+K_f K_R)s + K_f K_R} = \frac{Y_p(s)}{P(s)} \qquad (6.38)$$

(unde $y_p(t)$ este răspunsul la perturbația $p(t)$)

sau

$$H_{0p}(s) = \frac{\frac{K_f}{T_f}s}{s^2 + \frac{1+K_f K_R}{T_f}s + \frac{K_f K_R}{T_i T_f}}.$$

Pentru o perturbație care variază în treaptă unitară se obține

$$Y_p(s) = P(s)\cdot H_{0p}(s) = \frac{K_f/T_f}{s^2+2\zeta\omega_n^2+\omega_n^2}, \qquad (6.39)$$

în care:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_f K_R}{T_i T_f}}; \qquad \zeta = \frac{1+K_f K_R}{2T_f\sqrt{\frac{K_f K_R}{T_i T_f}}} = \frac{\sqrt{T_i}(K_f K_R+1)}{2\sqrt{K_R K_f T_f}} \qquad (6.40)$$

sau

$$Y_p(s) = \omega_n^2\frac{T_i}{K_R}\cdot\frac{1}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} = \frac{\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cdot\frac{T_i}{K_R}\cdot\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{(s+\zeta\omega_n)^2+(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})^2}. \qquad (6.41)$$

Prin aplicarea transformatei Laplace inversă relației (6.41) se obține

$$Y_p(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cdot\frac{T_i}{K_R}\cdot e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2})$$

sau

$$Y_p(t) = \sqrt{\frac{K_f}{T_f}}\cdot\sqrt{\frac{T_i}{K_R}}\cdot\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2}). \qquad (6.42)$$

Răspunsul la perturbație treaptă unitară este puternic influențat de parametrii de acord ai regulatorului K_R și T_i, atît prin intermediul lui ζ și

Scanned with OKEN Scanner

ω_n, care sînt funcţie de parametrii de acord, cît mai ales prin raportul $\frac{T_i}{K_R}$.

Eroarea în regim staţionar luînd în considerare efectul perturbaţiei este zero

$$\lim_{t\to\infty} Y_p(t)=y_{p\,st}(t)=0$$

şi

$$\varepsilon_{st}=r(t)-Y_{p\,st}(t)=0$$

întrucît în acest caz intrarea (referinţa) sistemului s-a considerat egală cu zero.

Alegerea lui T_i şi K_R se face ţinînd seama de realizarea unui răspuns dorit la perturbaţii şi la intrare, impunîndu-se anumite valori pentru ζ şi ω_n.

La alegerea unui regulator *PI* pentru un proces dat, se vor avea în vedere frecvenţa perturbaţiilor şi modul de variaţie al mărimii de intrare. Pentru schimbări rapide ale intrării şi frecvenţe mari ale perturbaţiilor nu se recomandă regulatorul *PI*.

Regulatorul proporţional-derivativ (PD). Adăugarea componentei derivative reduce suprareglajul cînd apar perturbaţii bruşte sau în perioada de pornire a procesului. Ecuaţia de funcţionare a unui regulator *PD* este

$$u(t)=K_R\left(\varepsilon+T_d\frac{d\varepsilon}{dt}\right), \tag{6.43}$$

în care T_d poartă denumirea de *constanta acţiunii derivative* şi reprezintă parametrul de acord al regulatorului alături de K_R. Astfel comanda este proporţională în acest caz nu numai cu abaterea ε, ci şi cu derivata acestei abateri.

Prezenţa componentei derivative alături de componenta *P* introduce un efect de anticipaţie ce atrage o îmbunătăţire a stabilităţii sistemului.

Răspunsul indicial al unui regulator *PD* ideal este reprezentat în figura 6.15, *a* iar răspunsul unui regulator *PD* real este reprezentat în figura 6.15, *b*.

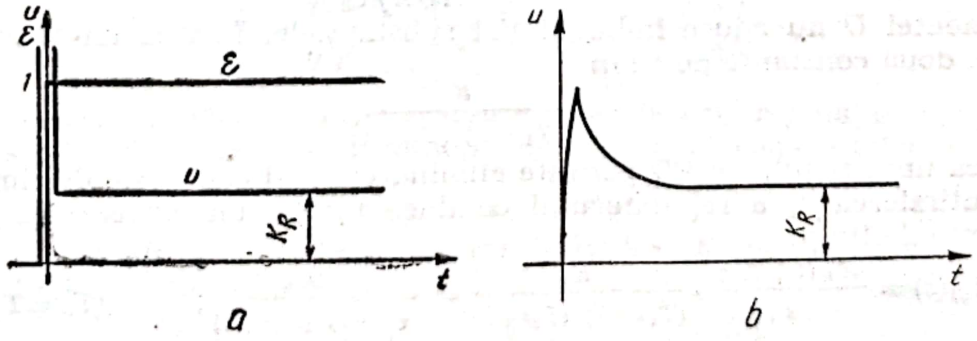


Fig. 6.15. Răspunsul indicial al unui regulator *PD*:
a — ideal; *b* — real.

Scanned with OKEN Scanner

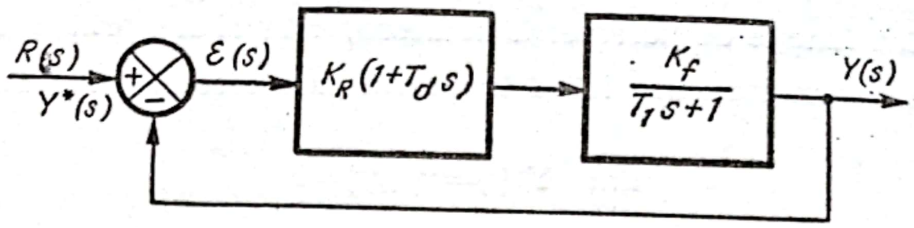


Fig. 6.16. Schema unui SRA cu regulator *PD*.

Adăugarea efectului *D* măreşte timpul tranzitoriu al perioadei de pornire, dar reduce depăşirea valorii prescrise pentru parametrul reglat. În cazul unor procese supuse unor perturbaţii cu frecvenţă foarte mare, componenta derivativă nu se recomandă. De asemenea, componenta derivativă are o acţiune nefavorabilă în cazul proceselor cu timp mort.

Pentru un proces de ordinul întîi alegerea unui regulator *PD* cu o constantă T_d egală cu constanta de timp a procesului conduce în final la o reglare proporţională (fig. 6.16)

$$H_d(s)=K_R(1+T_d s)\cdot\frac{K_f}{T_f s+1}=K_f K_R, \tag{6.44}$$

dacă se alege $T_d=T_f$.

În cazul real funcţia de transfer a regulatorului *PD* are forma

$$H_R(s)=\frac{K_R(1+T_d s)}{\tau_1 s+1}, \tag{6.45}$$

unde τ_1 reprezintă o întîrziere inerentă în funcţionarea acestui regulator.

Pentru această situaţie funcţia de transfer a sistemului deschis este dată de relaţia

$$H_d(s)=\frac{K_R(1+T_d s)}{\tau_1 s+1}\cdot\frac{K_f}{T_f s+1}=\frac{K_f K_R}{\tau_1 s+1}; \qquad (T_d=T_f),$$

iar funcţia de transfer a sistemului închis $H_0(s)$ este

$$H_0(s)=\frac{K_f K_R}{\tau_1 s+1+K_f K_R}. \tag{6.46}$$

Din această relaţie rezultă că eroarea în regim staţionar pentru o intrare treaptă unitară este diferită de zero, iar viteza de răspuns a sistemului este determinată de raportul $\frac{1}{1+K_f K_R}$. În acest caz adăugarea componentei *D* nu aduce îmbunătăţiri substanţiale. Pentru un proces ce conţine două constante de timp

$$H_f(s)=\frac{K_f}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)},$$

alegerea unui regulator *PD* permite eliminarea unei constante de timp T_1, însă întîrzierea τ_1 a regulatorului conduce tot la un sistem cu două constante de timp:

$$H_{01}(s)=\frac{K_R(1+T_d s)}{\tau_1 s+1}\cdot\frac{K_f}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}=\frac{K_f K_R}{(\tau_1 s+1)(T_2 s+1)}; \qquad (T_d=T_1),$$

$$H_{01}(s)=\frac{K_f K_R}{\tau_1 T_2 s^2+(\tau_1+T_2)s+K_f K_R+1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Comparînd acest rezultat cu situaţia în care se alege un regulator proporţional, cînd funcţia de transfer a sistemului este dată de relaţia

$$H_{02}(s)=\frac{K_f K_R}{T_1T_2s^2+(T_1+T_2)\,s+K_fK_R+1},$$

rezultă că factorul total de amplificare al sistemului în stare închisă în ambele cazuri este acelaşi

$$K_0=\frac{K_f K_R}{1+K_fK_R}\equiv H_0(0), \tag{6.47}$$

însă factorul de amortizare şi pulsaţia naturală a sistemului sînt diferite. Într-adevăr, echivalînd cele două funcţii de transfer cu modele de ordinul doi avînd parametrii ω_n şi ζ, rezultă:

$$H_{01}(s)=K_0\cdot\frac{1}{\frac{T_1T_2}{1+K_fK_R}s^2+\frac{T_1+T_2}{1+K_fK_R}s+1}=K_0\frac{\omega_{n1}^2}{s^2+2\zeta_1\omega_{n1}s+\omega_{n1}^2}; \tag{6.48}$$

$$H_{02}(s)=K_0\cdot\frac{1}{\frac{\tau_1T_2}{1+K_fK_R}s^2+\frac{\tau_1+T_2}{1+K_fK_R}s+1}=K_0\frac{\omega_{n2}^2}{s^2+2\zeta_2\omega_{n2}s+\omega_{n2}^2}; \tag{6.49}$$

$$\omega_{n_1}=\sqrt{\frac{1+K_fK_R}{T_1T_2}};\qquad \omega_{n_2}=\sqrt{\frac{1+K_fK_R}{\tau_1T_2}};$$

$$\zeta_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_1T_2}{1+K_fK_R}}\cdot\frac{T_1+T_2}{T_1T_2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{T_1+T_2}{\sqrt{(1+K_fK_R)\cdot T_1T_2}};$$

$$\zeta_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\tau_1T_2}{1+K_fK_R}}\cdot\frac{\tau_1+T_2}{\tau_1T_2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\tau_1+T_2}{\sqrt{\tau_1T_2\,(1+K_fK_R)}}.$$

Eroarea în regim staţionar a sistemului în aceste condiţii nu este modificată, însă regimul tranzitoriu al sistemului se modifică. Din comparaţia parametrilor caracteristici ai sistemului cu regulator *P* şi cu regulator *PD* rezultă, ţinînd seama că $\tau_1\ll T_1$, $\omega_{n_1}<\omega_{n_2}$, că durata procesului tranzitoriu cu regulator *PD* se reduce, admiţînd că variaţia factorului K_R este mai redusă.

În ceea ce priveşte factorul de amortizare ζ al sistemului, raportul celor două valori este

$$\frac{\zeta_1}{\zeta_2}=\frac{T_1+T_2}{\sqrt{T_1T_2}}\cdot\frac{\sqrt{\tau_1T_2}}{\tau_1+T_2}=\sqrt{\frac{\tau_1}{T_1}}\cdot\frac{T_1+T_2}{\tau_1+T_2}.$$

De remarcat faptul că amortizarea sistemului cu regulator *PD* creşte, deci scade suprareglarea în funcţie de raportul constantelor de timp $\frac{\tau_1}{T_1}$ şi $\frac{T_1}{T_2}$.

Regulator proporţional-integral-derivativ (PID). Algoritmul de reglare *PID* este descris prin relaţia

$$u(t)=K_R\left[\varepsilon(t)+\frac{1}{T_i}\int_0^t\varepsilon\,dt+T_d\frac{d\varepsilon}{dt}\right] \tag{6.50}$$

Scanned with OKEN Scanner

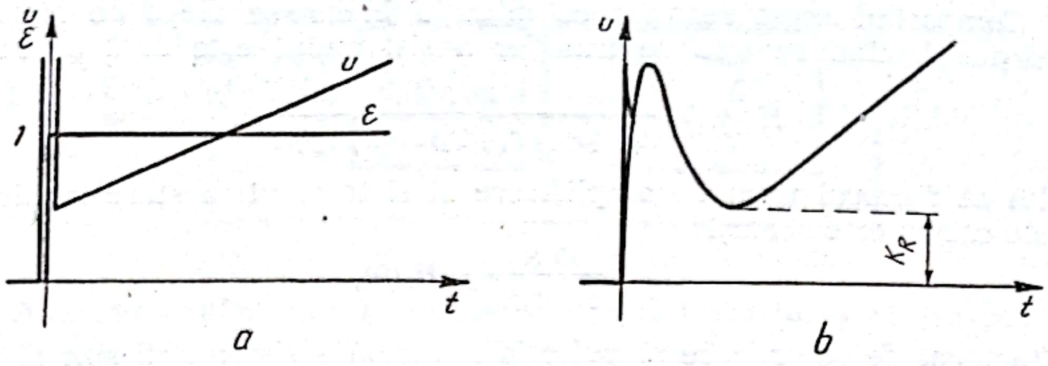


Fig. 6.17. Răspunsul indicial al unui regulator *PID*:
a — ideal; *b* — real.

sau

$$H_R(s)=\frac{U(s)}{\varepsilon(s)}=K_R\left(1+\frac{1}{T_i s}+T_d s\right). \tag{6.51}$$

Dacă în funcţia de transfer se include şi întîrzierea proprie τ_1 a regulatorului, expresia acesteia este

$$H_R(s)=\frac{KR(T_i s+T_i T_d s^2+1)}{T_i s(\tau_1 s+1)}. \tag{6.52}$$

Răspunsul indicial al regulatorului *PID* ideal este reprezentat în figura 6.17, *a*, iar pentru un regulator *PID* real, în figura 6.17, *b*.

După cum rezultă din (6.50), algoritmul *PID* se obţine ca o combinaţie liniară a celor trei moduri de acţiune: *P*, *I* şi *D*. Astfel se regăsesc în acest algoritm avantajele şi dezavantajele fiecărei componente.

În cazul unor structuri de regulatoare *PID* la care există interdependenţă între parametrii de acord, funcţia de transfer a regulatorului capătă alt aspect decît (6.51).

Pentru o structură serie *PD-PI* se obţine

$$H_R(s)=K_R\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)(1+T_d s)=K_R\left(1+\frac{1}{T_i s}+T_d s+\frac{T_d}{T_i}\right). \tag{6.53}$$

Factorul de interacţiune în acest caz este $q=1$.

În general algoritmul *PID* real cu întîrzierea τ_1 şi factorul de interinfluenţă q este definit prin funcţia de transfer

$$K_R(s)=\frac{K_R\left(1+\frac{1}{T_i s}+T_d s+q\frac{T_d}{T_i}\right)}{\tau_1 s+1}. \tag{6.54}$$

Pentru regulatorul cu factor de interinfluenţă q, se obţine următoarea expresie pentru funcţia de transfer ideală ($\tau_1=0$)

$$H_R(s)=K_R\left(1+q\frac{T_d}{T_i}\right)\left[1+\frac{1}{T_i\left(1+q\frac{T_d}{T_i}\right)}\frac{1}{s}+\frac{T_d s}{1+q\frac{T_d}{T_i}}\right] \tag{6.55}$$

sau

$$H_R(s)=K'\left(1+\frac{1}{T'_i s}+T'_d s\right), \tag{6.56}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde parametrii de acord sînt definiţi prin relaţiile:

$$K' = K_R\left(1 + q\frac{T_d}{T_i}\right);$$

$$T_i' = T_i\left(1 + q\frac{T_d}{T_i}\right) = T_i + qT_d; \qquad (6.57)$$

$$T_d' = \frac{T_d}{1 + q\frac{T_d}{T_i}} = \frac{1}{\frac{1}{T_d} + q\frac{1}{T_i}}.$$

Din relaţiile (6.57) apare evident ce efecte are interdependenţa între parametrii de acord asupra valorilor acestor parametri.

Ţinînd cont de efectul interinfluenţei asupra procesului de acordare a regulatorului firmele producătoare au adoptat diverse soluţii constructive pentru reducerea sau eliminarea interinfluenţei între parametrii de acord ai regulatorului [10].

Algoritmul *PID* se recomandă, în general, pentru procese cu două constante de timp predominante, alegînd astfel parametrii de acord ai regulatorului încît aceste constante de timp să fie reduse. Astfel, pentru un proces ce are funcţia de transfer

$$H_f(s) = \frac{K_f}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

se recomandă un regulator *PID* avînd funcţia de transfer

$$H_R(s) = \frac{K_R(\theta_1 s + 1)(\theta_2 s + 1)}{\theta s(\tau_1 s + 1)}.$$

În acest caz, dacă se aleg $\theta_1 = T_1$ şi $\theta_2 = T_2$, funcţia de transfer a sistemului deschis este

$$H_d(s) = H_R(s) \cdot H_f(s) = \frac{K_R(\theta_1 s + 1)(\theta_2 s + 1)}{\theta s(\tau_1 s + 1)} \cdot \frac{K_f}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} = \frac{K_R K_f}{\theta s(\tau_1 s + 1)} =$$

$$= \frac{K}{s(\tau_1 s + 1)}, \qquad \left(K = \frac{K_R K_f}{\theta}\right),$$

iar funcţia de transfer a sistemului închis este

$$H_0(s) = \frac{K}{s(\tau_1 s + 1) + K}.$$

Rezultă o eroare în regim staţionar egală cu zero, o viteză de răspuns superioară şi o amortizare dorită prin alegerea factorului K. Adăugarea componenţei D la un regulator *PI* impune o atenţie mărită la acordare pentru a obţine performanţe îmbunătăţite.

În cazul proceselor cu timp mort introducerea componentei D nu aduce o îmbunătăţire sensibilă a performanţelor.

Regulatoare neliniare. Regulatoarele bipoziţionale au o caracteristică de transfer de tipul celei prezentate în figura 6.18, iar relaţiile analitice ce descriu funcţionarea acestor regulatoare sînt:

$$u = M \operatorname{sign} \varepsilon \qquad (6.58)$$

Scanned with OKEN Scanner

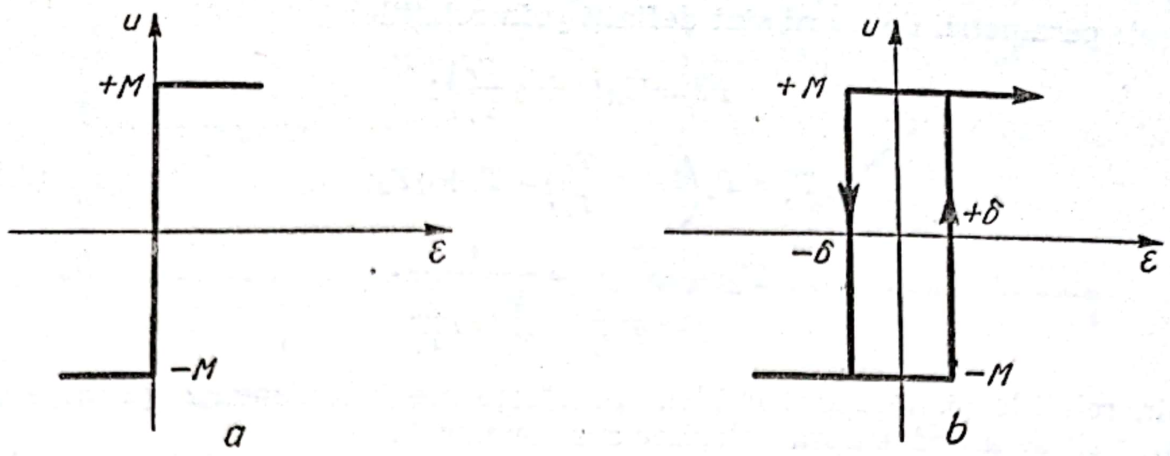


Fig. 6.18. Caracteristicile regulatoarelor neliniare bipoziţionale:
a — ideal; *b* — cu histerezis.

pentru regulatorul bipoziţional ideal (fig. 6.18, *a*);

$$u=-M \quad \text{pentru } \varepsilon<-\delta; \qquad u=+M \quad \text{pentru } \varepsilon>+\delta, \tag{6.59}$$

pentru un regulator bipoziţional real (fig. 6.18, *b*).

Pentru intervalul $(-\delta, +\delta)$ mărimea u este $+M$ sau $-M$, după cum mărimea ε s-a introdus în intervalul $(-\delta, +\delta)$ venind de la valori mai mari decît $+\delta$ sau venind de la valori mai mici decît $-\delta$. Asemenea regulatoare se folosesc în sistemele de reglare unde nu se cer performanţe ridicate şi se recomandă în general pentru procese cu timp mort τ şi o constantă de timp T al căror raport $\tau/T \leqslant 0{,}2$.

Regulatoarele tripoziţionale (fig. 6.19) sînt descrise de următoarele relaţii:

$$\begin{aligned} u&=-M \quad \text{pentru} \quad \varepsilon<-\Delta; \\ u&=\ \ 0 \quad \text{pentru} \quad -\Delta<\varepsilon<+\Delta; \\ u&=+M \quad \text{pentru} \quad \varepsilon>+\Delta. \end{aligned} \tag{6.60}$$

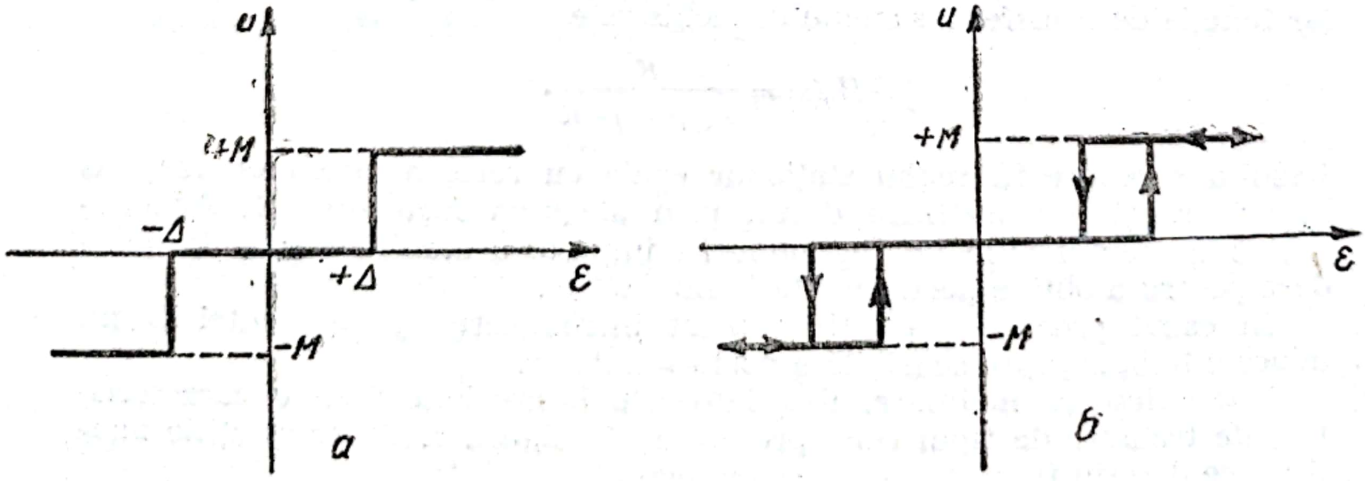


Fig. 6.19. Caracteristicile regulatoarelor neliniare tripoziţionale:
a — ideal; *b* — cu zonă de insensibilitate şi histerezis.

Așa cum rezultă din figura 6.19, regulatorul are trei poziții distincte putînd comanda elementele de execuție integrale. În unele cazuri, structura regulatoarelor neliniare bipoziționale și tripoziționale este completată cu circuite de corecție locală, obținîndu-se legi de reglare *PI*, *PD* sau *PID* (v. sucap. 10.6).

6.4.2. CRITERII DE ALEGERE A TIPULUI DE REGULATOR

Alegerea tipului de regulator pentru un proces dat este determinată în primul rînd de caracteristicile procesului tehnologic și de performanțele impuse sistemului de reglare. Pentru procese lente se impune utilizarea regulatoarelor continue liniare sau a regulatoarelor bipoziționale și tripoziționale, pe cînd pentru procese rapide sînt recomandate regulatoare ai căror parametri de acord au game de variație mai reduse.

Prezența timpului mort în funcționarea unui proces tehnologic impune o serie de precauții la alegerea tipului de regulator. Astfel componenta *D*, în general, se recomandă pentru asemenea procese numai dacă procesul conține mai multe constante predominante ce pot fi reduse prin intermediul unui algoritm *PID*. Pentru un proces caracterizat printr-o constantă de timp și un timp mort se recomandă un algoritm *PI* sau un algoritm *P*. Pentru un raport $\tau/T<0{,}2$ se recomandă un regulator bipozițional dacă performanțele impuse nu sînt foarte severe. Pentru valori mai mari ale raportului τ/T se recomandă algoritmii *P*, *PI*. Regulatorul *P* se recomandă în acest caz numai dacă eroarea staționară este admisibilă ca valoare.

Variațiile de sarcină ale procesului (perturbațiile) joacă, de asemenea, un rol important în alegerea tipului de regulator. Astfel, pentru procese cu o constantă de timp medie și un timp mort redus, la o amplitudine medie a perturbației și o frecvență redusă a acestora, se recomandă un regulator bipozițional sau un regulator *P*. Pentru o frecvență mai mare a perturbațiilor, avînd diverse amplitudini, se recomandă un algoritm *PI*. Pentru un proces cu mai multe constante de timp și timp mort redus la o amplitudine mare a perturbațiilor și o frecvență mare a acestora se recomandă un algoritm *PID*.

De asemenea, pentru procese cu două sau mai multe constante de timp dominante nu se recomandă un regulator *P*, ci un regulator *PI* sau *PID*, care anulează eroarea staționară și asigură o viteză de răspuns mai ridicată. În funcție de parametrul reglat sînt recomandate diverse tipuri de regulatoare avînd în vedere dinamica procesului (τ, T) și caracterul perturbațiilor.

Astfel, pentru reglări de nivel pot fi utilizate atît regulatoare *P* cît și regulatoare *PI*, aceasta în funcție de precizia urmărită și de tipul perturbațiilor. Dacă perturbațiile în cazul reglării de nivel sînt determinate atît de variația debitului de intrare cît și de variația debitului de ieșire, iar abaterea staționară se cere a fi zero, se recomandă un regulator *PI*.

Pentru reglări de presiune se recomandă utilizarea unor regulatoare *PI* ai căror parametri de acord sînt diferiți pentru gaze și lichide,

Scanned with OKEN Scanner

avînd în vedere că pentru lichide constanta de timp este mai redusă decît pentru gaze.

În cazul unor reglări de debite și amestecuri de fluid, dat fiind că asemenea procese sînt caracterizate printr-o constantă de timp mică și o amplificare mare, sînt recomandate regulatoarele *PI*. Prezența zgomotelor determinate de variațiile debitului face inoportună utilizarea componentei derivative la reglarea debitelor.

La reglări de temperatură unde raportul τ/T este mare sînt recomandate regulatoarele *PI* sau *PID*.

Tabelul 6.1

Algorimi de reglare recomandați pentru diverse tipuri de funcții de transfer $H_f(s)$ ale părții fixate

Legea de reglare	*P*	*PI*	*PD*	*PID*
0	1	2	3	4
$\frac{K_f}{Ts+1}$	DA	DA, dacă se impun cerințe asupra erorii staționare	DA dacă T_f este precis determinat	NU
$\frac{K_f}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$	DA, cu performanțe reduse	DA, cu restricții asupra amplificării	Se utilizează rar	DA, cu restricții asupra amplificării
$\frac{K_f}{\prod_1^n (Tis+1)}$	rar utilizat, performanțe scăzute	DA	Se utilizează rar	DA
$\frac{K_f e^{-\tau s}}{T_f s+1}$	DA cînd $\frac{\tau}{T_f}<0{,}1$ iar ε_{st} este în limitele admisibile	DA	Foarte rar	Neconvenabil cînd timpul mort este produs de timpul de transport și există zgomot
$K_f e^{-\tau s}$	NU	NU	NU	NU
$\frac{K_f e^{-\tau s}}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$	NU	DA	NU	Rar, în funcție de tipul timpului mort și de efectul componentei *D*

Scanned with OKEN Scanner

În general adăugarea componentei I la componenta P a unui regulator, deşi asigură eroare staţionară nulă, poate atrage instabilitatea sistemului, impunîndu-se astfel reducerea factorului de amplificare K_R. Pentru sisteme cu referinţă constantă şi perturbaţii de amplitudine şi durată redusă nu se justifică utilizarea regulatorului PI.

Introducerea efectului I este justificată cînd intrarea în sistem se modifică des sau dacă sistemul de reglare are mărimea de intrare variabilă lent după un program şi dacă perturbaţiile ce intervin în proces sînt lente.

Adăugarea efectului D măreşte reducerea suprareglajului ce apare în cazul utilizării componentelor P şi I atunci cînd intervin perturbaţii bruşte, în perioada de pornire a procesului sau pentru procesele discontinue. Prezenţa componentei derivative atrage creşterea factorului de amortizare, îmbunătăţindu-se desfăşurarea procesului tranzitoriu la apariţia unei perturbaţii. Pentru procesele continue, adăugarea efectului D măreşte timpul de desfăşurare al regimului tranzitoriu, dar reduce suprareglajul. În cazul unor procese supuse la perturbaţii cu o frecvenţă mare, prezenţa componentei derivative poate fi dăunătoare.

Natura parametrului reglat, amplitudinea şi frecvenţa perturbaţiilor ce acţionează asupra procesului, valoarea timpului mort τ, numărul şi valoarea constantelor de timp ce caracterizează procesul supus reglării reprezintă factorii esenţiali ce trebuie avuţi în vedere la alegerea algoritmului de reglare.

La alegerea legii de reglare trebuie avut în vedere, de asemenea, şi costul sistemului de reglare.

În tabelul 6.1 se prezintă sistematizat modul de alegere a algoritmului de reglare pentru diverse tipuri de procese, iar în tabelul 6.2 se prezintă unele recomandări privind algoritmul de reglare pentru diverşi parametri.

Odată stabilită legea de reglare pentru un proces dat se impune luarea în considerare a tipului de regulator din punctul de vedere al agentului purtător de semnal. Din punctul de vedere al legilor de reglare P, I sau D, sistemele pneumatice şi electronice sînt echivalente. Alegerea unui regulator pneumatic sau electronic este determinată de tipul procesului, de tipul parametrilor reglaţi, de tipul elementelor de execuţie şi de tipul traductoarelor.

Siguranţa în medii cu pericol de explozie şi incendii poate constitui un argument în favoarea regulatoarelor pneumatice, însă regulatoarele electronice prevăzute cu siguranţă intrinsecă pot fi utilizate în asemenea medii.

Pentru procese la care sînt utilizate traductoare pneumatice şi elemente de execuţie pneumatice, un regulator pneumatic este indicat, fiind utilizat în acest caz un singur agent purtător de informaţie.

Considerentele economice constituie, de asemenea, un element important în adoptarea soluţiei pneumatice sau electronice.

În cazul în care se cere automatizarea complexă a unui proces tehnologic cu ajutorul unui calculator de proces, reglarea convenţională cu regulatoare electronice prezintă avantaje în comparaţie cu reglarea pneumatică, dată fiind complexitatea instalaţiilor de cuplare a aparaturii pneumatice la calculatoare.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 6.2

Alegerea algoritmului de reglare în funcţie de natura parametrului reglat

Tipul regulatorului / Parametrul reglat	*P*	*PI*	*PID*	Bipoziţional
Temperatură	DA, dacă $\frac{\tau}{T} < 0{,}1$	DA	DA	DA în funcţie de raportul $\frac{\tau}{T}$
Presiune	DA, dacă nu există timpi morţi prea mari	DA	În cazuri speciale	—
Debit	NU	DA	NU	—
Nivel	DA, dacă nu există timpi morţi prea mari	DA	—	DA
Turaţie	DA, dacă timpii morţi sînt foarte mici	DA	DA, mai rar	NU
Tensiune	DA	DA	DA, mai rar	NU

6.4.3. ALEGEREA ŞI ACORDAREA REGULATOARELOR PENTRU PROCESE RAPIDE

Aşa cum s-a arătat în capitolul 5, un proces rapid este caracterizat prin constante de timp mici şi timp mort neglijabil.

Alegerea tipului de regulator şi determinarea valorilor optime ale parametrilor de acord pentru un proces dat presupune satisfacerea unor performanţe impuse sistemului de reglare automată supus variaţiilor intrării şi mărimilor perturbatoare.

Acordarea optimă constă în alegerea valorilor parametrilor de acord care asigură o comportare optimă a sistemului în conformitate cu un criteriu de performanţă adoptat.

Printre criteriile utilizate pentru determinarea valorilor parametrilor de acord cu asigurarea unei comportări optime în raport atît cu intrarea cît şi cu perturbaţiile aditive ale sistemului sînt *criteriile modulului* şi *simetriei*.

Scanned with OKEN Scanner

6.4.3.1. Criteriul modulului

Pentru un sistem liniar monovariabil supus unei perturbații aditive $P(s)$ (fig. 6.20), în cazul unei comportări ideale, mărimea de ieșire y ar trebui să urmărească fără nici o întîrziere variațiile mărimii de intrare. Astfel se impune realizarea egalității

$$y(t)=y^*(t)=r(t), \tag{6.61}$$

atît în regim staționar cît și în regim tranzitoriu, egalitate care asigură invarianța ieșirii sistemului la variația intrării și perturbării P.

Răspunsul sistemului este alcătuit din cele două componente corespunzătoare intrării $Y_R(s)$ și perturbării $Y_p(s)$

$$Y(s)=Y_R(s)+Y_p(s) \tag{6.62}$$

sau

$$Y(s)=H_0(s)\cdot R(s)+H_{0p}(s)\cdot P(s), \tag{6.63}$$

unde s-au notat (v. paragr. 3.1.3.) cu:

$$H_{0p}(s)=\frac{Y_p(s)}{P(s)} \quad \text{și} \quad H_0(s)=\frac{Y_R(s)}{R(s)}$$

funcțiile de transfer ale sistemului închis în raport cu perturbația și intrarea, considerînd pe rînd $R(s)=0$, respectiv $P(s)=0$. Pentru o comportare ideală a sistemului supus unei intrări treaptă unitară sau alt tip de semnal și a unei perturbații $P(s)\neq 0$, trebuie îndeplinite condițiile:

$$H_0(s)=1; \qquad H_{0p}(s)=0. \tag{6.64}$$

În cazul satisfacerii acestor condiții, din (6.63) rezultă că sistemul se comportă ideal $Y(s)=R(s)$.

Relațiile (6.64) stau la baza criteriului modulului. Întrucît condiția $Y(s)=R(s)$ nu poate fi realizată în practică nu se asigură o comportare ideală a sistemului. Îndeplinirea acestor condiții presupune ca eroarea $\varepsilon(s)=R(s)-Y(s)$ să fie tot timpul zero, însă în acest caz sistemul de reglare nu poate intra în acțiune pentru a determina mărimea de ieșire să urmărească variațiile mărimii de intrare. Cu cît parametrii sistemului vor tinde să asigure condiții mai apropiate de (6.64) cu atît comportarea siste-

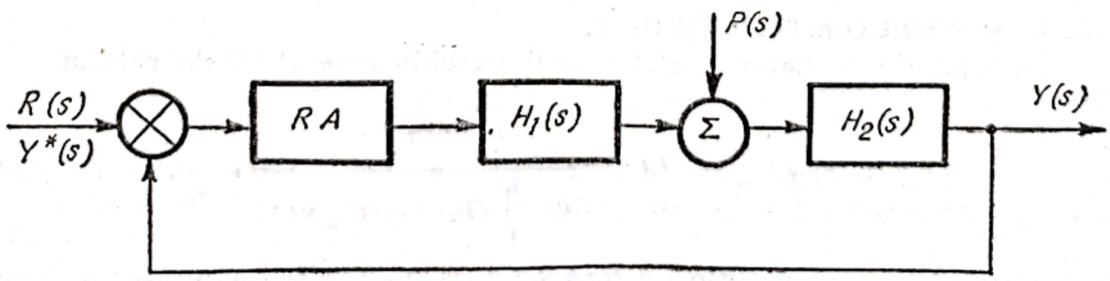


Fig. 6.20. Schema unui SRA supus perturbației aditive $P(s)$.

mului se va apropia de cea ideală descrisă de (6.61). În domeniul frecvenţelor, condiţiile 6.64) se scriu sub forma:

$$M(\omega)=|H_0(j\omega)|=1;$$
$$M_p(\omega)=|H_{0p}(j\omega)|=0; \qquad (6.65)$$
$$\arg H_0(j\omega)=0.$$

Aceste condiţii trebuie satisfăcute pentru toată gama posibilă de variaţie a pulsaţiei. Din aceste condiţii impuse modulelor derivă şi denumirea de „criteriul modulului". În sistemele reale nu este posibilă îndeplinirea exactă a acestor condiţii asupra modulelor $M(\omega)$ şi $M_p(\omega)$, însă se urmăreşte determinarea unor parametri ai regulatorului care să satisfacă aceste condiţii cît mai exact [59].

Pentru procese rapide, cum sînt acţionările electrice şi hidraulice avînd modele matematice identificate precis, se recomandă utilizarea *variantei Kessler a criteriului modulului*. Această variantă a criteriului modulului permite stabilirea unor relaţii de acordare optimă care asigură simultan o comportare bună atît în raport cu semnalele de intrare cît şi în raport cu perturbaţiile, fără a trata separat asigurarea anumitor performanţe.

Funcţia de transfer a părţii fixate în cazul proceselor rapide se poate scrie:

$$H_f(s)=\frac{K_f}{(T_\Sigma s+1)\cdot\prod_{k=1}^{n}(T_k s+1)} \qquad (6.66)$$

sau

$$H_f(s)=\frac{K_f}{s(T_\Sigma s+1)\prod_{1}^{m}(T_k s+1)}, \qquad (6.67)$$

unde T_Σ, T_k şi K_f au semnificaţia prezentată în subcapitolul 6.3.

Pentru procese descrise prin funcţia de transfer (6.66), conform variantei Kessler a criteriului modulului se recomandă un regulator a cărui funcţie de transfer are expresia

$$H_R(s)=\frac{\prod_{1}^{m}(\theta_k s+1)}{\theta s}, \qquad (6.68)$$

unde θ_k şi θ sînt constante de timp.

Funcţia de transfer a sistemului deschis este dată de relaţia

$$H_d(s)=H_R(s)\cdot H_f(s)=\frac{\prod_{1}^{m}(\theta_k s+1)\cdot K_f}{\theta s\cdot\prod_{1}^{n}(T_k s+1)\cdot(T_\Sigma s+1)}; \qquad (6.69)$$

Pentru un sistem cu reacţie unitară (rigidă), la o intrare treaptă unitară se asigură o eroare staţionară zero, datorită prezenţei polului în origine

Scanned with OKEN Scanner

în funcţia de transfer a sistemului deschis. În acest caz se îndeplineşte şi condiţia de modul $M(0)=1$. Pentru a obţine performanţe optime prin utilizarea variantei Kessler se cere satisfacerea următoarelor condiţii:

$$\begin{aligned} m&=n; \\ \theta_k&=T_k; \\ \theta&=2K_fT_\Sigma\,. \end{aligned} \tag{6.70}$$

Îndeplinirea acestor relaţii de acordare optimă conduce la următoarea funcţie de transfer pentru sistemul deschis:

$$H_d(s)=\frac{1}{2T_\Sigma\, s(T_\Sigma s+1)}\,. \tag{6.71}$$

Funcţia de transfer a sistemului închis, ţinînd seama de (6.71), este dată de relaţia

$$H_0(s)=\frac{H_d(s)}{1+H_d(s)}=\frac{1}{1+2T_\Sigma^2s^2+2T_\Sigma s}=\frac{\frac{1}{2T_\Sigma^2}}{s^2+\frac{1}{T_\Sigma}s+\frac{1}{2T_\Sigma^2}}\equiv$$

$$\equiv\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\,. \tag{6.72}$$

Pulsaţia ω_n şi factorul de amortizare ζ, proprii acestui sistem de ordinul doi, sînt:

$$\omega_n=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot T_\Sigma} \tag{6.73}$$

$$\zeta=\frac{\frac{1}{T_\Sigma}}{2\cdot\omega_n}=\frac{\frac{1}{T_\Sigma}}{2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}\cdot T_\Sigma}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=0{,}7.$$

De remarcat faptul că în urma acordării regulatoarelor conform variantei Kessler constantele dominante ale procesului T_k sînt eliminate, iar parametrii caracteristicii ai sistemului ζ şi ω_n sînt determinaţi numai de suma constantelor parazite T_Σ. Dacă funcţia $H_f(s)$ are aspectul (6.67), atunci funcţia $H_R(s)$ trebuie să aibă forma

$$H_R(s)=\frac{\prod_1^m(\theta_k s+1)}{\theta}, \tag{6.74}$$

rămînînd valabile relaţiile (6.70) şi rezultînd aceleaşi funcţii de transfer pentru sistemul deschis şi sistemul închis, deci obţinîndu-se aceleaşi performanţe.

Cunoscînd ζ şi ω_n pentru sistemul închis, se pot determina imediat performanţele optime prin acordarea regulatorului conform variantei

Scanned with OKEN Scanner

Kessler. Pentru $\zeta=0,7$, din (3.24) și din curba reprezentată în figura 3.6 se obține

$$\sigma=0,043=4,3\%, \tag{6.75}$$

iar din (3.26) rezultă

$$t_t=\frac{4,78}{\zeta\omega_n}=\frac{4,78}{\frac{1}{\sqrt{2\cdot T_\Sigma}}}=6,73\ T_\Sigma. \tag{6.76}$$

Factorul de amplificare al sistemului de ordinul doi calculat în funcție de ζ și ω_n are expresia

$$K=\frac{\omega_n}{2\zeta}\frac{1}{\frac{\sqrt{2}\cdot T_\Sigma}{2\cdot 0,7}}=\frac{1}{2T_\Sigma}, \tag{6.77}$$

iar eroarea staționară pentru o mărime de intrare de tip rampă unitară este

$$\varepsilon_{st}=\frac{1}{K}=2\cdot T_\Sigma. \tag{6.78}$$

Din (6.75), (6.76) și (6.77) se constată că acordarea optimă cu ajutorul variantei Kessler a criteriului modulului asigură performanțe foarte bune. Această variantă permite determinarea atît a tipului algoritmului de reglare în funcție de expresia funcției de transfer a părții fixate a sistemului cît și a parametrilor optimi de acord ai regulatorului conform cu relațiile (6.70).

Exemplul 6.1

Se consideră un sistem de reglare la care partea fixată este descrisă de următoarea funcție de transfer

$$H_f(s)=\frac{10}{(8s+1)\,(3s+1)\,(0,1s+1)}$$

și se cere a determina tipul de regulator și parametrii optimi de acordare care să conducă la următoarele performanțe: $\varepsilon_{st}=0$, $\sigma\leqslant 5\%$ și $t_t\leqslant 1,3$ s.

Conform variantei Kessler se recomandă un regulator a cărui funcție de transfer este

$$H_R(s)=\frac{(8s+1)\,(3s+1)}{2s}.$$

În acest caz $\theta_1=8$ s, $\theta_2=3$ s și $\theta=2\,K_fT_\Sigma=2\cdot 10\cdot 0,1=2$ s.
Performanțele care se obțin sînt determinate de valorile lui ζ și ω_n, proprii sistemului de ordinul doi obținut:

$$H_0(s)=\frac{1}{1+2T_\Sigma^2 s^2+2T_\Sigma s}=\frac{1}{2\cdot 0,01s^2+2\cdot 0,1s+1};$$

$$\zeta=0,7;$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\omega_t = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot T_\Sigma} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 7{,}1 \ s^{-1};$$

$$K = \frac{1}{2T_\Sigma} = \frac{1}{2\cdot 0{,}1} = \frac{10}{2} = 5.$$

Performanţele sistemului sînt:

$$\sigma = 4{,}3\% < \sigma_{impus};$$

$$t_t = 6{,}74\ T_\Sigma = 0{,}673\ s << t_{t\ impus};$$

$$\varepsilon_{st} = 0 \text{ pentru intrare treaptă;}$$

$$\varepsilon_{st} = 2\cdot T_\Sigma = 2\cdot 0{,}1 = 0{,}2 \text{ s pentru intrare rampă unitară.}$$

Varianta Kessler a criteriului modulului este aplicabilă cu succes proceselor fără timp mort, la care mărimea de referinţă nu are variaţii rampă şi care conţin cel mult două constante de timp predominante în funcţia de transfer, dacă se folosesc algoritmii de reglare convenţionali. În cazul unor procese ce conţin mai multe constante de timp predominante, varianta Kessler este aplicată dacă este posibilă reglarea în cascadă (v. subcap. 7.1).

6.4.3.2. Criteriul simetriei

Prin folosirea acestui criteriu se urmăreşte obţinerea unei erori staţionare nulă la o variaţie în rampă a mărimii de intrare, deci obţinerea unui pol de ordinul doi în origine în expresia funcţiei de transfer a sistemului deschis. Acest criteriu se foloseşte, de regulă, în cadrul sistemelor automate cu semnale de intrare variabile liniar cu timpul şi nu pentru sisteme cu semnale de intrare de tip treaptă, la care performanţele tranzitorii se înrăutăţesc.

Pornind de la caracteristica de frecvenţă a părţii fixate dată sub forma

$$H_f(j\omega) = \frac{K_f}{(T_\Sigma\, j\omega + 1)\prod_1^n (T_k j\omega + 1)}$$

şi ţinînd seama că performanţele tranzitorii sînt determinate de aspectul caracteristicilor de frecvenţă în zona pulsaţiilor de tăiere [13], se poate face pentru acest domeniu al pulsaţiilor următoarea aproximaţie

$$H_f(j\omega) = \frac{K_f}{(T_\Sigma\, j\omega + 1)\cdot\prod_1^n T_k j\omega}, \quad (j\omega T_k + 1 \cong j\omega T_k). \tag{6.79}$$

Revenind la funcţia de transfer se obţine

$$H_f(s) = \frac{K_f}{(T_\Sigma s + 1)\prod_1^n T_k s}. \tag{6.80}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru funcţia de transfer $H_R(s)$ a regulatorului, criteriul simetriei păstrează forma (6.68) cu $m=n$, rezultînd pentru sistemul deschis funcţia de transfer

$$H_d(s)=H_R(s)\cdot H_f(s)=\frac{K_f\cdot\prod_1^n(\theta_k s+1)}{\theta s(T_\Sigma s+1)\prod_1^n T_k s}. \tag{6.81}$$

Dacă în relaţia (6.81) se înmulţeşte şi se împarte la numitor cu $\prod_1^n\theta_k s$, se obţine

$$H_d(s)=\frac{K_f\cdot\prod_1^n(\theta_k s+1)}{\prod_1^n(\theta_k s)\cdot\theta s(T_\Sigma s+1):\frac{\prod_1^n T_k s}{\prod_1^n\theta_k s}}=\frac{\prod_1^n(\theta_k s+1)}{\prod_1^n\theta_k s\,\frac{\theta}{K_f}\,\frac{\prod_1^n T_k}{\prod_1^n\theta_k}\,s(T_\Sigma s+1)}. \tag{6.82}$$

O comportare optimă a sistemului se asigură dacă se îndeplinesc următoarele condiţii:

— toate constantele de timp de la numărătorul funcţiei de transfer a regulatorului trebuie să fie egale $\theta_1=\theta_2=\ldots=\theta_n=\theta_c$;

— constanta de timp θ_c trebuie să aibă valoarea

$$\theta_c=4nT_\Sigma, \tag{6.83}$$

iar θ se determină cu ajutorul relaţiei

$$\frac{\theta}{K_f}\cdot\frac{\prod_1^n T_k}{\prod_1^n\theta_k}=2T_\Sigma. \tag{6.84}$$

Cu aceste condiţii îndeplinite şi după efectuarea unor calcule simplificatoare [59], funcţia de transfer a sistemului deschis capătă forma

$$H_d(s)=\frac{4T_\Sigma s+1}{8T_\Sigma^3 s^2(T_\Sigma s+1)}, \tag{6.85}$$

iar funcţia de transfer a sistemului închis prevăzut cu reacţie principală directă este

$$H_0(s)=\frac{H_d(s)}{1+H_d(s)}=\frac{4T_\Sigma s+1}{8T_\Sigma^3 s^3+8T_\Sigma^2 s^2+4T_\Sigma s+1}=\frac{4T_\Sigma s+1}{(4T_\Sigma^2 s^2+2T_\Sigma s+1)(2T_\Sigma s+1)}. \tag{6.86}$$

Din relaţia (6.86) rezultă că influenţa coeficientului K_f şi a constantelor de timp T_k din funcţia de transfer a sistemului a fost eliminată prin utilizarea criteriului simetriei.

Scanned with OKEN Scanner

În relația (6.86) pot fi puse în evidență pozițiile polilor și zerourilor funcției de transfer

$$H_0(s)=\frac{\frac{1}{2T_\Sigma^2}\cdot\left(s+\frac{1}{4T_\Sigma}\right)}{\left(s^2+\frac{1}{2T_\Sigma}s+\frac{1}{4T_\Sigma^2}\right)\left(s+\frac{1}{2T_\Sigma}\right)}=\frac{\frac{\omega_n p_3}{z}(s+z)}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)(s+p_3)}, \tag{6.87}$$

prin identificare obținîndu-se:

$$\omega_n=\frac{1}{2T_\Sigma}; \tag{6.88}$$

$$\zeta=\frac{\frac{1}{2T_\Sigma}}{2\omega_n}=1/2=0{,}5; \tag{6.89}$$

$$p_3=\frac{1}{2T_\Sigma}; \tag{6.90}$$

$$z=\frac{1}{4T_\Sigma}. \tag{6.91}$$

Astfel în sistem, pe lîngă cei doi poli complecși a căror poziție în planul complex este determinată de valorile parametrilor ζ și ω_n, apar un zero și un pol suplimentar. Influența prezenței unui zero suplimentar în funcția de transfer a unui sistem de ordinul doi asupra timpului de creștere și a suprareglajului este prezentată în figura 6.14. În mod similar se poate determina analitic influența unui pol suplimentar asupra performanțelor tranzitorii ale unui sistem de ordinul doi.

În figura 6.21 se prezintă dependența lui σ și $\omega_n t_c$ de valoarea lui ζ și poziția polului suplimentar în raport cu partea reală a polilor complecși.

Efectul polului suplimentar asupra lui σ și t_c poate fi neglijat dacă $\zeta>0{,}5$ și $p_3>5\zeta\omega_n$. În general, prezența unui pol suplimentar poate înrăutăți sau îmbunătăți caracterul oscilant al regimului tranzitoriu, în funcție de poziția relativă a polului suplimentar în raport cu ceilalți poli. Poziția relativă a polilor și zeroului din funcția de transfer (6.87) este simetrică față de origine (fig. 6.21, *b*).

Cu această distribuție poli-zerouri [10] se obțin, pentru o intrare treaptă, $\sigma=43\%$ și $t_t=11\,T_\Sigma$, performanțe nesatisfăcătoare. Pentru intrare rampă, performanțele sistemului sînt mult îmbunătățite față de performanțele obținute la intrare treaptă, criteriul simetriei fiind recomandat pentru asemenea semnale. Eroarea în regim staționar în acest caz este zero ($\alpha=2$).

Funcția de transfer a regulatorului se poate determina ținînd seama de relațiile (6.83) și (6.84)

$$H_R(s)=\frac{(1+s\theta_c)^n}{0\cdot s}=\frac{(1+s\cdot 4nT_\Sigma)^n}{2K_f T_\Sigma\frac{(4nT_\Sigma)^n}{\prod_1^n T_k}\cdot s}; \tag{6.92}$$

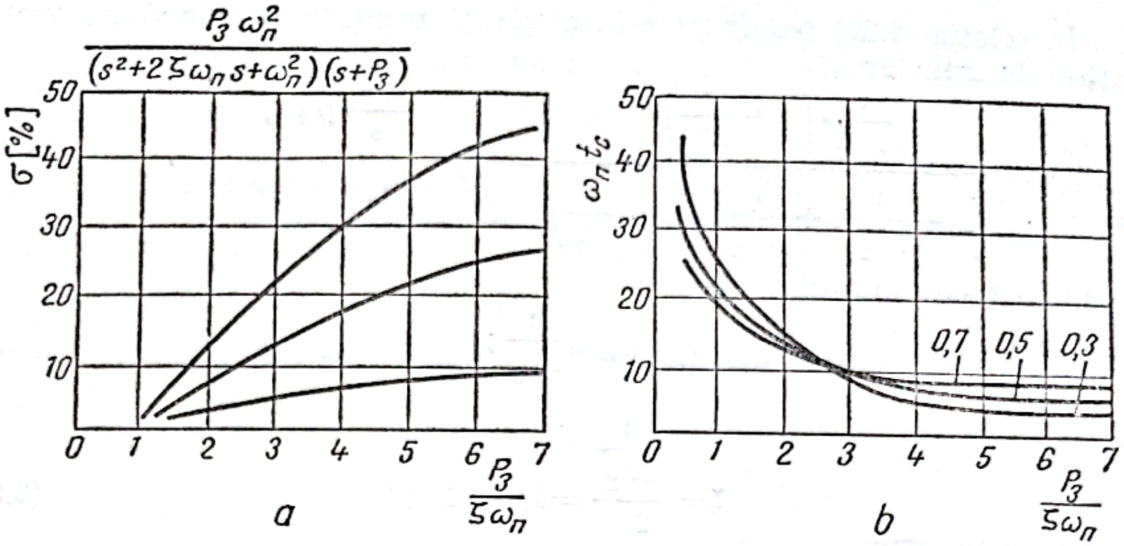


Fig. 6.21. Influenţa unui pol asupra performanţelor unui sistem de ordinul doi: *a* — asupra suprareglajului; *b* — asupra timpului de creştere.

Pentru procesul a cărei funcţie de transfer este

$$H_f(s)=\frac{5}{8s\,(0{,}1s+1)},\ \text{(avînd } K_f=5,\ T_1=8\text{ s},\ T_\Sigma=0{,}15),$$

conform criteriului simetriei rezultă următoarea expresie a funcţiei de transfer a regulatorului

$$H_R(s)=\frac{1+4T_\Sigma s}{2K_f T_\Sigma\cdot\frac{4T_\Sigma}{T_1}\cdot s}=\frac{1+0{,}4s}{\frac{0{,}4}{8}s}=\frac{8\,(1+0{,}4s)}{0{,}4s};$$

În acest caz $n=1$, procesul fiind caracterizat printr-o singură constantă de timp. Astfel, pentru a obţine o comportare optimă a sistemului se impune utilizarea unui regulator *PI*.

6.4.4. ALEGEREA ŞI ACORDAREA REGULATOARELOR PENTRU PROCESE LENTE

Un proces lent este caracterizat prin constante de timp mari $T>10$ s sau prin constante de timp mari şi timp mort. Pentru procesele fără timp mort sau cu timp mort neglijabil, criteriul de alegere şi acordare a regulatoarelor pentru procese rapide pot fi extinse. Astfel, criteriul modulului poate fi utilizat pentru delimitarea domeniilor de performanţe asigurate. Această variantă a criteriului modulului cu delimitarea domeniilor de performanţe asigurate prevede în prima etapă stabilirea unor domenii de variaţie a parametrilor regulatorului în care sînt satisfăcute performanţele impuse prin datele iniţiale, de regulă referitoare la răspunsul la anumite semnale de intrare, rezultînd deci o proiectare minimală.

În a doua etapă, în cadrul domeniului stabilit sînt alese acele valori ale parametrilor regulatorului care asigură cea mai bună comportare în raport cu perturbaţiile.

Scanned with OKEN Scanner

Varianta criteriului modulului cu delimitarea domeniilor de performanţă este aplicabilă cu bune rezultate pentru regulatoare cu doi parametri de acord *PI*, *PD*, putînd fi extinsă şi la regulatoarele *PID* în cazul în care sînt cunoscute relaţiile între T_i şi T_d.

Pentru a ilustra modul de aplicare a acestei variante a criteriului modulului considerăm un regulator *PI* şi un proces de ordinul întîi (fig. 6.22):

$$H_R(s)=K_R\left(1+\frac{1}{T_i s}\right); \tag{6.93}$$

$$H_f(s)=\frac{K_f}{T_f s+1}, \tag{6.94}$$

ai căror parametri de acord optimi $K_{R\ opt}$ şi $T_{i\ opt}$ trebuie determinaţi cînd se cunoaşte K_f, T_f şi se impun următoarele performanţe:

$$\sigma \leqslant \sigma_{impus}; \tag{6.95}$$

$$t_t \leqslant t_{t\ impus}; \tag{6.96}$$

$\varepsilon_{st}=0$ pentru $r(t)$ treaptă unitară;

$\varepsilon_{st} \leqslant \varepsilon_{st\ impus}$ pentru $r(t)$ rampă unitară.

Regulatorul *PI*, datorită prezenţei polului în origine în funcţia de transfer, asigură o eroare staţionară nulă pentru o intrare treaptă unitară şi o compensare a constantei de timp a părţii fixate datorită binomului de gradul întîi situat la numărătorul funcţiei de transfer a regulatorului.

Funcţia de transfer a sistemului deschis este

$$H_d(s)=\frac{K_R\cdot K_f}{T_i}\cdot\frac{(1+T_i s)}{s(T_f s+1)}, \tag{6.97}$$

iar factorul total de amplificare al sistemului deschis este dat de relaţia

$$K_d=\frac{K_R\cdot K_f}{T_i}, \tag{6.98}$$

Funcţia de transfer a sistemului închis $H_0(s)$ are expresia

$$H_0(s)=\frac{K_R K_f (T_i s+1)}{T_i s(T_f s+1)+K_R K_f (T_i s+1)}=\frac{\frac{K_R K_f}{T_i}\left(s+\frac{1}{T_i}\right)}{s^2+\frac{1+K_R K_f}{T_f}s+\frac{K_R K_f}{T_i T_f}}, \tag{6.99}$$

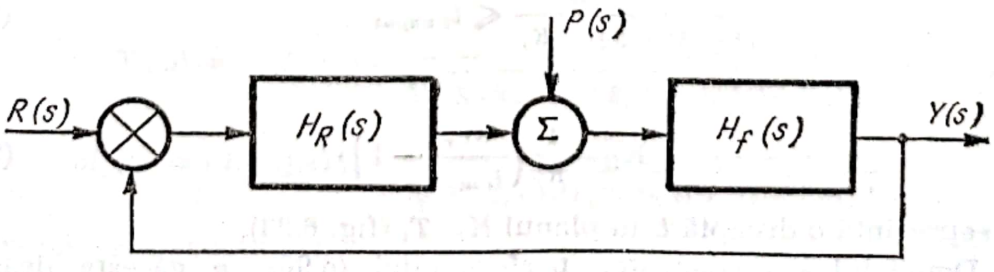


Fig. 6.22. Schema unui SRA cu regulator *PI*.

Scanned with OKEN Scanner

iar parametrii caracteristici ai sistemului sînt:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_R K_f}{T_i T_f}};$$

$$z = \frac{1}{T_i}; \tag{6.100}$$

$$\zeta = \frac{1 + K_R \cdot K_f}{T_f \cdot 2\omega n} = \frac{\sqrt{T_i}(1 + K_R \cdot K_f)}{2\sqrt{K_R \cdot K_f \cdot T_f}}.$$

Pentru a determina domeniile de variaţie ale parametrilor K_R şi T_i, în care performanţele impuse sistemului sînt satisfăcute în planul parametrilor K_R şi T_i, trebuie delimitate domeniile corespunzătoare acestor performanţe.

Pentru realizarea unei valori limită a erorii staţionare pentru intrare rampă, trebuie asigurată o anumită valoare a lui K_d

$$\frac{K_R \cdot K_f}{T_i} \geqslant K_{d\ impus}, \tag{6.101}$$

unde K_d se determină din relaţia $\varepsilon_{st} = \frac{1}{K_v}$, $(K_d \equiv K_v)$

$$\frac{K_R}{T_i} \geqslant \frac{K_{d\ impus}}{K_f}. \tag{6.102}$$

Domeniul corespunzător condiţiei (6.102) se găseşte deasupra dreptei a definită de relaţia

$$\frac{K_R}{T_i} = \frac{K_{d\ impus}}{K_f}, \tag{6.103}$$

deci în regiunea haşurată (fig. 6.23).

Folosind relaţia acoperitoare pentru calculul timpului tranzitoriu, rezultă

$$t_t = \frac{4}{\zeta \cdot \omega_n} = \frac{4}{\frac{\sqrt{T_i}(1 + K_R K_f)}{2\sqrt{K_R K_f T_f}} \cdot \sqrt{\frac{K_R K_f}{T_i T_f}}} = \frac{8T_f}{1 + K_R K_f}, \tag{6.104}$$

deci relaţia de calcul pentru timpul tranzitoriu este de forma

$$\frac{8T_f}{1 + K_R K_f} \leqslant t_{t\ impus} \tag{6.105}$$

sau

$$K_R = \frac{1}{K_f}\left(\frac{8T_f}{t_{t\ impus}} - 1\right), \tag{6.106}$$

care reprezintă o dreaptă b în planul K_R, T_i (fig. 6.23).

Domeniul corespunzător performanţei (6.96) se găseşte deasupra dreptei, în regiunea haşurată.

Scanned with OKEN Scanner

Într-o manieră similară se determină curba care delimitează domeniul pentru suprareglajul sistemului [10], ţinînd seama de prezenţa zeroului $\left(z=-\frac{1}{T_i}\right)$ în funcţia de transfer a sistemului. Curba c din figura 6.23 corespunde valorii impuse a suprareglajului, fiind haşurată regiunea de sub curbă.

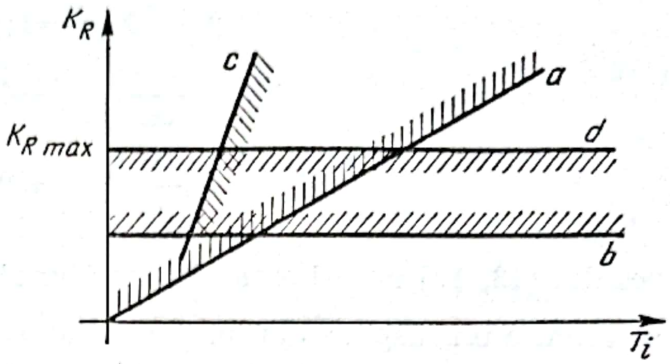


Fig. 6.23. Domeniile de variaţie a parametrilor de acord ai unui regulator *PI* pentru satisfacerea performanţelor impuse.

Pentru a lua în considerare efectul unor constante de timp parazite inerente în funcţia de transfer a părţii fixate precum şi neliniarităţile care apar în funcţionarea părţii fixate asupra stabilităţii sistemului şi asupra calităţii răspunsului tranzitoriu, se folosesc metode experimentale de determinare a unor valori admisibile pentru parametrii regulatorului.

Astfel, dacă pentru un proces este folosit un regulator *PID* se fixează $T_i=\infty$ (sau la valoarea maximă existentă), $T_d=0$, modificîndu-se treptat K_R pînă ce în sistem apar oscilaţii de amplitudine constantă, deci pînă se atinge limita de stabilitate, valoarea corespunzătoare factorului K_R fiind $K_{R\,lim}$. Valoarea maximă a lui K_R, care să ţină seama de efectul neliniarităţilor şi al constantelor de timp parazite, se alege

$$K_{R\,max}=(0{,}6\ldots 0{,}75)\,K_{R\,lim}. \tag{6.107}$$

Acestei condiţii îi corespunde dreapta d din figura 6.23, care delimitează superior domeniul în care sînt satisfăcute performanţele impuse sistemului la o intrare treaptă unitară (ε_{st}, σ, t_t). Astfel, în figura 6.23 apare un domeniu haşurat în cadrul căruia sînt satisfăcute performanţele sistemului. Se impune determinarea lui $K_{R\,opt}$ şi $T_{i\,opt}$ conform criteriului modulului, care să asigure o comportare optimă a sistemului atît în raport cu intrarea cît şi în raport cu perturbaţiile. Din (6.33) şi (6.38) se obţine:

$$H_0(j\omega)=\frac{K_RK_f(j\omega T_i+1)}{K_RK_f-\omega^2T_iT_f+j\omega T_i(1+K_RK_f)}; \tag{6.108}$$

$$H_{op}(j\omega)=\frac{j\omega T_iK_f}{K_RK_f-\omega^2T_iT_f+j\omega T_i(1+K_RK_f)}. \tag{6.109}$$

Calculînd modulele corespunzătoare lui $H_0(j\omega)$ şi $H_{op}(j\omega)$, rezultă:

$$M(\omega)=|H_0(j\omega)|=\frac{K_RK_f\sqrt{\omega^2T_i^2+1}}{\sqrt{(K_RK_f-\omega^2T_iT_f)^2+\omega^2T_i^2(1+K_RK_f)^2}}; \tag{6.110}$$

$$M_p(\omega)=|H_{0p}(j\omega)|=\frac{\omega K_fT_i}{\sqrt{(K_RK_f-\omega^2T_iT_f)^2+\omega^2T_i^2(1+K_RK_f)^2}}. \tag{6.111}$$

Din rezolvarea ecuaţiilor:

$$M_p(0)=0;$$

Scanned with OKEN Scanner

$$M(0)=1; \qquad (6.112)$$

$$\left.\frac{dM}{d\omega}\right|_{\omega=0}=0;$$

$$\left.\frac{dM_p}{d\omega}\right|_{\omega=0}=0,$$

rezultă [13, 10] necesitatea obținerii unui raport maxim $\left(\frac{K_R}{T_i}=\max\right)$ care să asigure un răspuns optim.

Determinarea valorii optime $K_{R\,opt}$ și $T_{i\,opt}$ constă astfel în alegerea acelei perechi de valori K_R, T_i care asigură toate performanțele impuse și totodată satisface condiția $\frac{K_R}{T_i}=\max$, de comportare optimă în raport cu perturbațiile.

Mărimea raportului $\frac{K_R}{T_i}$ asigură o mărime a lui K_d și deci o reducere a erorii staționare. Creșterea acestui raport poate conduce la o înrăutățire a răspunsului tranzitoriu, înrăutățire agravată de prezența neliniarităților și a constantelor de timp parazite. Limitarea lui K_d este impusă pe de o parte de necesitatea limitării lui K_R iar pe de altă parte de necesitatea obținerii unei valori minime pentru ζ, care să asigure σ_{impus}.

Reducerea lui T_i poate atrage o creștere a lui K_d însă valoarea lui ζ poate să se reducă inadmisibil, fiind puternic afectată calitatea regimului tranzitoriu.

Valoarea mare a factorului de amplificare K_d determină o viteză de răspuns ridicată în porțiunea inițială a răspunsului, însă depășirea sensibilă a valorii staționare determină un pronunțat caracter oscilant al răspunsului sistemului.

Asigurarea unei comportări optime în raport cu perturbațiile și cu variația intrării presupune delimitarea domeniilor de performanțe satisfăcute pentru răspunsul la variații date ale mărimii de intrare, cu acordarea optimă în cadrul domeniului delimitat — în funcție de comportarea la perturbări.

Alegerea și acordarea regulatoarelor pentru procese cu timp mort reprezintă una dintre problemele cele mai dificile în practica reglării automate. Aceasta datorită atît dificultăților de determinare cu precizie a timpului mort ce caracterizează procesul cît și influenței nefavorabile a timpului mort asupra comportării tranzitorii a unui sistem de reglare automată.

Procesele cu timp mort pot fi descrise, așa cum s-a arătat în capitolul 2, prin relații de forma:

$$K_f(s)=\frac{K_f e^{-\tau s}}{T_f s+1}; \qquad (6.113)$$

$$H_f(s)=\frac{K_f e^{-\tau s}}{(T_{f_1}s+1)(T_{f_2}s+1)}, \qquad (6.114)$$

Scanned with OKEN Scanner

sau în cazul general prin următorul model matematic

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{f}\,[\mathbf{x}(t), \mathbf{x}_\tau(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{u}_\tau(t)], \tag{6.115}$$

unde:

$$\mathbf{x}_\tau(t)=\mathbf{x}(t-\tau);$$

$$\mathbf{u}_\tau(t)=\mathbf{u}(t-\tau).$$

Întîrzierea pură τ, sau timpul mort, poate fi o constantă sau o funcţie de timp $\tau=g(t)$, sau o funcţie de stare a sistemului $\tau=h\,[\mathbf{x}(t)]$.

Vom considera în cele ce urmează numai procese descrise prin modele de forma (6.113) şi (6.114), unde timpul mort are o valoare constantă şi cunoscută, iar ceilalţi parametri ai procesului K_f şi T_f sînt identificaţi cu bună precizie.

Particularităţile proceselor ce conţin timp mort legate de defazajul introdus de timpul mort fac dificilă problema alegerii şi acordării regulatoarelor. La aceste sisteme datorită prezenţei lui τ nu sînt stabilite relaţii între performanţele tranzitorii şi repartiţia poli-zerouri. Aceste sisteme nu sînt sisteme cu minim de fază, definirea comportării lor nu se poate efectua numai printr-o caracteristică de frecvenţă $A(\omega)$ sau $\varphi(\omega)$, fiind necesare ambele caracteristici.

Prezenţa timpului mort în cadrul sistemului automat, introdus de procesul supus automatizării, are consecinţe nefavorabile asupra stabilităţii sistemului. Aceste efecte sînt uşor de evidenţiat dacă se are în vedere faptul că argumentul vectorului $H_d(j\omega)$ al sistemului în stare deschisă variază liniar cu τ. Dat fiind că timpul mort τ introduce un defazaj $\varphi_d=-\omega\tau$, defazaj care determină fie apropierea sensibilă a caracteristicii $H_d(j\omega)$ de punctul critic $(-1, j_0)$, fie ocolirea acestui punct, gradul de stabilitate al sistemului se poate reduce, sau sistemul poate deveni instabil (v. subcap. 3.3).

Pentru aceste procese sînt utilizate frecvent criteriile integrale de alegere şi acordare a regulatoarelor precum şi criteriul modulului care se poate extinde cu bune rezultate. Totuşi pentru aceste procese cele mai eficiente metode de acordare a regulatoarelor sînt metodele de acordare practică.

Pentru un proces cu timp mort (fig. 6.24) utilizarea unui regulator P conform celor expuse în continuare determină apariţia unui decalaj de fază ce conduce la un răspuns oscilant a cărui perioadă de oscilaţie este $T=2\,\tau$.

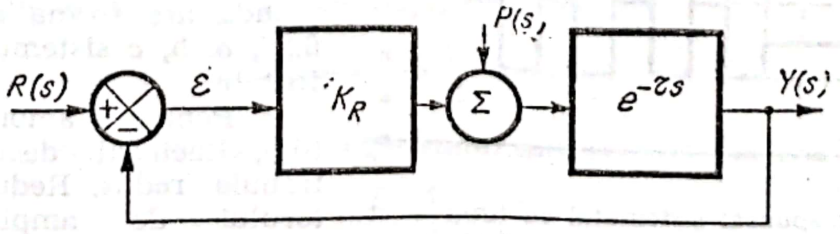


Fig. 6.24. Schema unui SRA cu regulator P şi proces cu timp mort.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru un semnal sinusoidal aplicat la intrarea regulatorului, la ieşirea sistemului se obţine tot un semnal-sinusoidal însă defazat cu unghiul φ_d

$$\varphi_d=\frac{2\pi}{T}(t-\tau)-\frac{2\pi}{T}t=-\frac{2\pi}{T}\tau. \qquad (6.116)$$

Datorită faptului că regulatorul P nu introduce nici o întîrziere, deci nici un defazaj, întregul defazaj de —180° (corespunzător limitei de stabilitate, la care apare răspunsul oscilant neamortizat) între intrarea şi ieşirea sistemului este determinat de timpul mort

$$\varphi_d=-\frac{2\pi\tau}{T}=-180° \qquad (6.117)$$

iar perioada oscilaţiilor din sistem este dată de relaţia

$$T=2\tau. \qquad (6.118)$$

Astfel în cazul unei reglări proporţionale a unui proces cu un timp mort de 1 minut vor rezulta oscilaţii proprii cu perioada de 2 minute. Pentru a întreţine aceste oscilaţii, amplificarea K_R trebuie să fie egală cu unitatea iar banda de proporţionalitate $BP=\frac{100}{K_R}$ trebuie să fie egală cu 100%.

Dacă admitem o variaţie în treaptă a perturbaţiei, figura 6.25, *a*, forma de variaţie a mărimii de ieşire şi de comandă este pentru cazul în care $K_R=1$, o succesiune de impulsuri, aşa cum este reprezentată în figurile 6.25, *b* şi 6.25, *c*.

Într-adevăr, apariţia perturbaţiei determină o modificare Δy_p a mărimii de ieşire după un timp τ iar mărimea de comandă va fi $u=-K_R\Delta y_p=-\Delta y_p$. Regulatorul produce în acest caz o nouă modificare a mărimii de comandă u cu valoarea $-K_R(-\Delta y_p)=\Delta y_p$ iar mărimea de la ieşire se modifică după trecerea timpului mort din nou cu Δy_p. Procesul oscilant continuă iar perioada oscilaţiilor este $T=2\tau$.

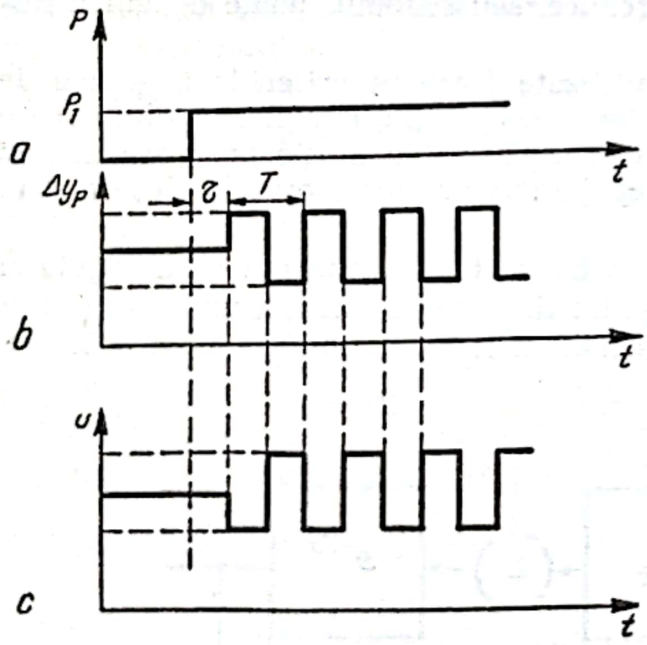


Fig. 6.25. Răspunsul sistemului cu timp mort la o variaţie în treaptă a perturbaţiei:
a — variaţia perturbaţiei; *b* — variaţia ieşirii sistemului; *c* — variaţia comenzii.

Dacă amplificarea regulatorului este $K_R=2$ pentru aceeaşi variaţie a perturbaţiei mărimea de ieşire şi de comandă are forma din figurile 6.26, *a*, *b*, *c* sistemul devenind instabil.

Pentru a amortiza oscilaţiile, factorul de amplificare trebuie redus. Reducerea factorului de amplificare la 0,5 respectiv creşterea bandei de proporţionalitate la 200%,

Scanned with OKEN Scanner

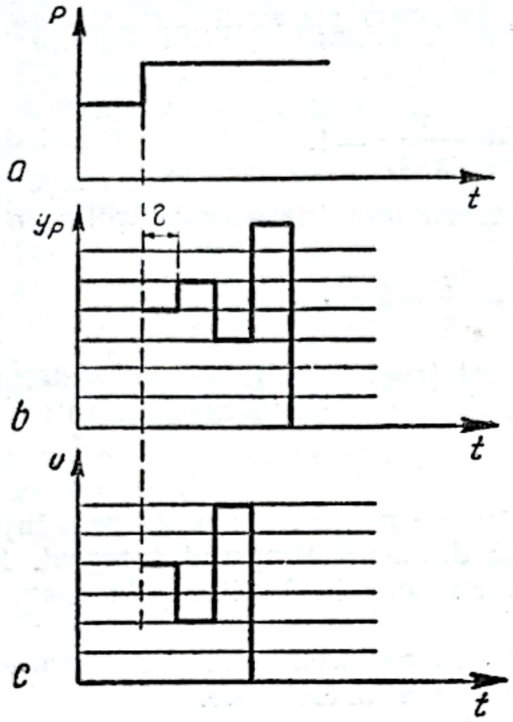


Fig. 6.26. Răspunsul sistemului cu timp mort şi regulator P cu factor de amplificare $k_R=2$:

a — variaţia perturbaţiei; *b* — variaţia mărimii de ieşire; *c* — variaţia mărimii de comandă.

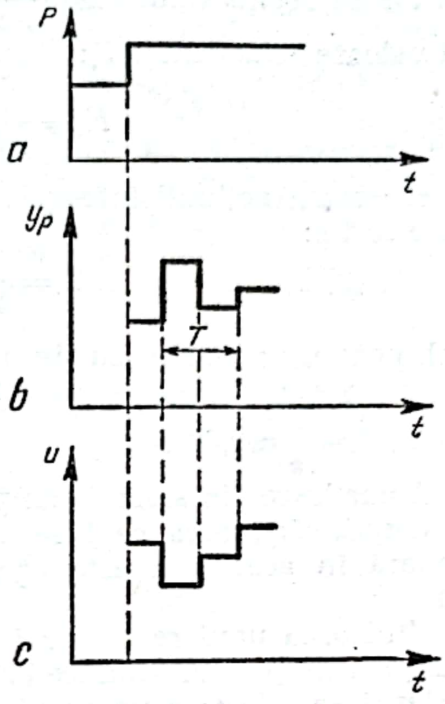


Fig. 6.27. Răspunsul sistemului cu amortizare în sfert de amplitudine:

a — variaţia perturbaţiei; *b* — variaţia mărimii de ieşire; *c* — variaţia mărimii de comandă.

determină o „amortizare în sfert de amplitudine" (se reduce amplitudinea fiecărei alternanţe succesive cu o jumătate, figura 6.27). Forma de variaţie a mărimii perturbatoare, a mărimii de ieşire şi a mărimii de comandă este prezentată în figurile 6.27, *a*, *b*, *c*.

În ceea ce priveşte eroarea în regim staţionar, valoarea acesteia variază invers cu factorul de amplificare K_R (elementul cu timp mort nu introduce nici o amplificare).

Este evident că cu cît amplificarea este mai mare, cu atît se obţine o mai bună comportare în regim staţionar, însă amplitudinea oscilaţiilor creşte. În general un regulator proporţional pentru un proces ce conţine numai timp mort nu se recomandă, sistemul fiind instabil.

Utilizarea unui regulator I pentru reglarea unui proces cu timp mort determină apariţia unui defazaj între semnalul sinusoidal de la intrarea sistemului şi ieşirea acestuia, definit prin:

$$\varphi_d = -\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi\tau}{T} = -\pi \qquad (6.119)$$

iar perioada oscilaţiilor la limita de stabilitate rezultă din (6.119):

$$T = 4\tau. \qquad (6.120)$$

Pentru a menţine oscilaţiile, amplificarea buclei trebuie să fie egală cu unitatea. Amplificarea regulatorului integral definită ca raportul ampli-

Scanned with OKEN Scanner

tudinilor în regim sinusoidal $\frac{1}{\omega Ti}$, în acest caz egală cu unitatea, determină valoarea constantei T_i:

$$K_I = \frac{1}{\omega Ti} = \frac{T}{2\pi \cdot T_i} = 1. \tag{6.121}$$

Deci constanta acțiunii integrale pentru menținerea oscilațiilor în sistem trebuie să fie:

$$T_i = \frac{T}{2\pi} = \frac{4\tau}{2\pi} = 2\frac{\tau}{\pi}. \tag{6.122}$$

Astfel, pentru un proces cu timp mort (τ=1 min) răspunsul sistemului va oscila cu o perioadă de 4 minute, dacă constanta acțiunii integrale are valoarea $T_i = \frac{2}{\pi} \simeq 0{,}65$ min.

Amortizarea în sfert de amplitudine poate fi obținută prin înjumătățirea amplificării ceea ce înseamnă dublarea timpului integral. Eroarea staționară în acest caz este egală cu zero însă viteza de răspuns s-a redus.

Utilizarea unui regulator *I* pentru reglarea unui proces caracterizat numai prin timp mort conduce la rezultate foarte bune.

Dacă se folosește un regulator *P* pentru un proces cu timp mort și element de execuție integral (figura 6.28) se poate asigura o viteză de răspuns dorită și eroare staționară nulă printr-o alegere corespunzătoare a lui K_R:

$$H_d(s) = \frac{K_R K_f}{s} \cdot e^{-\tau s}; \tag{6.123}$$

$$H_0(s) = \frac{\frac{K_R \cdot K_f}{s} \cdot e^{-\tau s}}{1 + \frac{K_R \cdot K_f}{s} \cdot e^{-\tau s}}. \tag{6.124}$$

Simulînd acest sistem cu ajutorul programului SIMSID se obțin pentru intrare treaptă unitară, pentru diverse combinații K_R, diferite răspunsuri, figura 6.29. Pentru o valoare dată a lui τ se poate determina K_R optim care să asigure un suprareglaj minim și o viteză de răspuns dorită.

În tabelul 6.3 sînt prezentate valorile lui σ și t_t pentru diferite valori ale produsului $K_R\tau$, care pentru sistem reprezintă un parametru caracteristic. Astfel, creșterea lui K_R sau scăderea lui τ conduce la aceleași

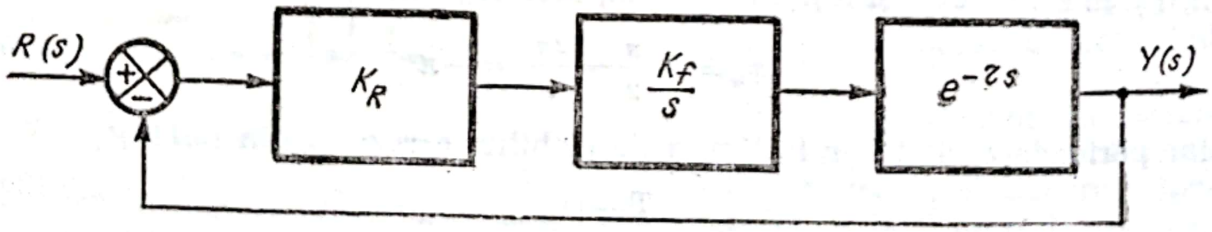


Fig. 6.28. Schema unui SRA pentru un proces cu timp mort, element de execuție integral și regulator proporțional.

Scanned with OKEN Scanner

efecte asupra comportării generale a sistemului. Cînd τ crește, K_R trebuie să scadă pentru a menține performanțele sistemului.

Folosind datele din tabelul 6.3 se poate determina, pentru un proces dat, tipul de regulator și parametrii de acord ai acestuia reducînd orice structură de sistem la o structură standard (fig. 6.28), cu valori ale parametrului $K^*=K_RK_f\tau$ optime. Astfel pentru un proces descris prin

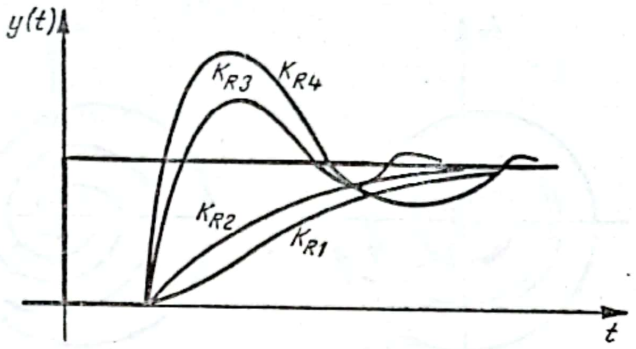


Fig. 6.29. Răspunsul unui sistem cu timp mort pentru diverse valori ale factorului de amplificare K_R ($K_{R1}<K_{R2}<K_{R3}<K_{R4}$).

$$H_f(s)=\frac{K_f\cdot e^{-\tau s}}{(T_1s+1)\ (T_2s+1)} \tag{6.125}$$

se recomandă un regulator *PID* cu funcția de transfer

$$H_R(s)=K_R\frac{(\theta_1s+1)\ (\theta_2s+1)}{s}. \tag{6.126}$$

Dacă se aleg $\theta_1=T_1$ și $\theta_2=T_2$ rezultă pentru sistem $H_d(s)$ și $H_0(s)$ identice cu (6.123) și (6.124). Problema acordării optime a regulatorului revine la a determina $K_R=\frac{K^*_{opt}}{K_f}$ unde K^*_{opt} se ia din tabelul 6.3.

De reținut faptul că în cazul unor constante de timp foarte mari nu pot fi utilizate regulatoarele unificate cu domenii limitate de variație a constantelor T_i și T_d.

Pentru un proces cu o constantă de timp dominantă T_f și un timp mort τ, alegerea unui regulator *P* conduce la o funcție de transfer a sistemului deschis de forma

$$H_d(s)=K_R\frac{K_f\cdot e^{-\tau s}}{T_fs+1}=\frac{K_RK_f\cdot e^{-\tau s}}{T_fs+1}=$$
$$=\frac{K_d\cdot e^{-\tau s}}{T_fs+1}. \tag{6.127}$$

În acest caz intervin doi parametri $\left(K_d \text{ și } \frac{\tau}{T}\right)$ a căror valoare influențează comportarea sistemului. Astfel creșterea factorului de amplificare determină o reducere a gradului de stabilitate, figura 6.30, *a*. Creșterea lui τ sau scăderea lui T_f, deci creșterea raportului $\frac{\tau}{T_f}=a$, determină de asemenea o reducere a gradului de stabilitate al sistemului, figura 6.30, *b*.

Tabelul 6.3

Variația performanțelor sistemului în funcție de produsul $K_R\tau$

$K_R\cdot\tau$	t_t [s]	σ[%]
0,15	300,00	0,
0,3	137,0	0,
0,39	80,0	0,055
0,405	76,0	0,25
0,42	73,5	0,60
0,45	69,0	1,7
0,51	92,0	4,94
0,72	120,0	26,8
0,82	138,0	34,0
0,9	140,0	40,2
1,05	190,0	49,7

Scanned with OKEN Scanner

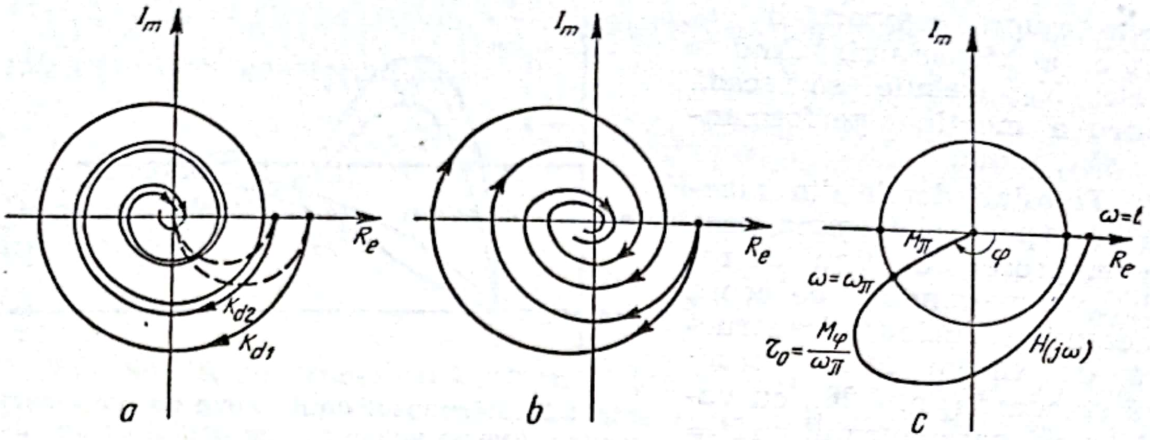


Fig. 6.30. Forme ale locului de transfer pentru sisteme cu timp mort:
a — influenţa factorului de amplificare; *b* — influenţa timpului mort; *c* — determinarea limitei de stabilitate pentru sisteme cu timp mort.

Pentru valori ale lui $\tau > \tau_0$, unde τ_0 reprezintă timpul mort pentru care sistemul este la limita de stabilitate (fig. 6.30, *b*), sistemul automat devine instabil.

Dacă funcţia de transfer a sistemului deschis în cazul general poate fi scrisă sub forma

$$H_d(s)=H(s)e^{-\tau s}$$

atunci, în domeniul frecvenţelor, limita de stabilitate se asigură dacă sînt satisfăcute relaţiile:

$$|H_d(j\omega_\pi)|=|H(j\omega_\pi)|=1;$$

$$\varphi(\omega_\pi)=\arg H_d(j\omega_\pi)=\arg H(j\omega_\pi)-\omega_\pi\tau_0=-\pi(2m+1). \qquad (6.128)$$

Valoarea minimă a lui τ_0 pentru care se asigură limita de stabilitate a sistemului este dată de relaţia

$$\tau_0=\frac{\pi+\varphi}{\omega_\pi}+\frac{2m\pi}{\omega_\pi}, \qquad (6.129)$$

Determinarea lui ω_π, şi corespunzător a argumentului $\varphi=\arg H(j\omega_\pi)$, permite a obţine valoarea minimă a timpului mort τ_0 pentru care sistemul este stabil. În figura 6.30, *c*, se evidenţiază posibilitatea de calcul grafic a timpului τ_0. Intersecţia locului de transfer cu cercul de rază unitară permite a determina pe ω_π şi corespunzător marginea de fază M_φ. De observat faptul că în condiţiile în care locul de transfer se găseşte în interiorul cercului de rază unitară, sistemul este stabil pentru orice valoare a lui τ.

Pentru cazul în care $H(s)=\frac{K_1}{T_1 s+1}$, din condiţia de a se asigura limita de stabilitate rezultă τ_0:

$$\tau_0=\frac{\pi-\varphi}{\omega_\pi}=\frac{\pi-\operatorname{arctg}\,\omega_\pi T_1}{\omega_\pi}.$$

Valoarea lui ω_π se poate calcula cu ajutorul relației

$$K_1^2 = 1 + \omega_\pi^2 T_1^2.$$

Astfel, timpul mort τ_0 care conduce sistemul la limita de stabilitate se calculează cu formula:

$$\tau_0 = \frac{\pi - \varphi}{\sqrt{\frac{K_1^2 - 1}{T_1^2}}}$$

sau

$$\frac{\tau_0}{T_1} = \frac{\pi - \varphi}{\sqrt{K_1^2 - 1}} \text{ pentru } K_1 > 1.$$

Pentru $\tau < \tau_0$ sistemul este stabil, iar pentru $\tau > \tau_0$ sistemul este instabil.

Alegerea și acordarea regulatorului pentru un proces cu timp mort se va face luînd în considerație în primul rînd problema asigurării gradului de stabilitate dorit al sistemului.

6.4.5. CRITERII EXPERIMENTALE DE ACORDARE A REGULATOARELOR

Dificultățile legate de identificarea cu precizie a proceselor lente, comportarea neliniară a unor asemenea procese precum și caracterul aleatoriu al anumitor perturbații ce intervin în funcționarea proceselor fac ca metodele analitice de acordare a regulatoarelor să aibă un caracter limitat. De cele mai multe ori, după o acordare pe baza unui criteriu dat, se impune verificarea performanțelor și reajustarea parametrilor de acord. De asemenea, în funcție de frecvența și amplitudinea perturbațiilor se impune corectarea parametrilor de acord.

Metodele practice de acordare au la bază experiența acumulată în alegerea și acordarea regulatoarelor. Astfel pentru un sistem dat, în funcțiune, cu mărimea de referință și cu mărimile perturbatoare menținute constante, prin modificarea parametrilor de acord pînă se ajunge la limita de stabilitate se determină amplitudinea și frecvența oscilațiilor întreținute. Folosind aceste mărimi caracteristice ce caracterizează *limita de stabilitate* a sistemului, se determină valorile parametrilor de acord ai regulatorului.

Metoda Ziegler-Nichols se aplică la acordarea regulatoarelor pentru procese lente la care perturbațiile sînt determinate de sarcină și au o durată mare.

Pentru un regulator *PID* se fixează acordul pentru T_i la valoarea maximă ($T_i = \infty$) și pentru T_d la valoarea minimă ($T_d = 0$) și se modifică K_R pînă ce mărimea de ieșire a sistemului y intră într-un regim de oscilații neamortizate, deci sistemul ajunge la limita de stabilitate. Valoarea factorului de amplificare corespunzătoare acestui regim de funcționare K_{R0} și perioada oscilațiilor neamortizate T_0 sînt utilizate pentru determinarea parametrilor de acordare optimă. Pornind de la asigurarea unui raport 1/4 între amplitudinea celei de a doua semioscilații pozitive și amplitudinea primei oscilații pozitive („amortizare în sfert de ampli-

Scanned with OKEN Scanner

tudine") criteriul Ziegler-Nichols recomandă următoarele valori de acordare optimă, în funcţie de K_{R0} şi T_0.

a. Pentru regulatoare *P*

$$K_{R\,opt}=0{,}5\,K_{R0}. \tag{6.130}$$

b. Pentru regulatoare *PI*:

$$K_{R\,opt}=0{,}45\,K_{R0}; \tag{6.131}$$

$$T_{i\,opt}=0{,}8\,T_0. \tag{6.132}$$

Se remarcă o reducere a factorului de amplificare (6.131) faţă de regulatorul *P* justificată ca urmare a necesităţii compensării efectelor nefavorabile ale componentei *I* asupra procesului tranzitoriu.

c. Pentru regulatoare *PID:*

$$\begin{aligned} K_{R\,opt}&=0{,}75\,K_{R0};\\ T_{i\,opt}&=0{,}6\,T_0;\\ T_{d\,opt}&=0{,}1\,T_0, \end{aligned} \tag{6.133}$$

pentru factor de interinfluenţă $q=0$.

Se remarcă creşterea lui K_R şi reducerea lui T_i care determină creşterea factorului total de amplificare care este permisă datorită îmbunătăţirii performanţelor tranzitorii datorită prezenţei componentei *D*.

Pentru factor de interinfluenţă $q=1$ se recomandă:

$$K_{R\,opt}=0{,}6\,K_{R0}; \tag{6.134}$$

$$T_{i\,opt}=0{,}5\,T_0; \tag{6.135}$$

$$T_{d\,opt}=0{,}12\,T_0. \tag{6.136}$$

În acest caz, factorul total de amplificare $\frac{K_{R\,opt}}{T_{i\,opt}}$ se reduce foarte puţin faţă de cazul în care $q=0$.

Metoda Offereins permite determinarea parametrilor optimi de acord pornind de la K_{R0} şi T_0 determinate ca în cazul precedent. Pentru un regulator *PI* se recomandă pentru a se obţine un răspuns optim la aplicarea unei perturbări:

$$K_{R\,opt}=0{,}5\,K_{R0}; \tag{6.137}$$

$$T_{i\,opt}=3\;T_{i0}, \tag{6.138}$$

unde T_{i0} reprezintă valoarea limită a lui T_i pentru care se depăşeşte limita de stabilitate menţinînd $K_{R\,opt}$. Astfel se măreşte factorul $\frac{K_{R\,opt}}{T_i}$ pînă la depăşirea limitei de stabilitate şi se reţine valoarea lui T_{i0}.

În ceea ce priveşte componenta *D*, metoda prevede verificarea prealabilă a eficienţei acestei componente asupra performanţelor sistemului. Această verificare se face punînd acordul pentru T_i la valoarea maximă şi pentru T_d la valoarea minimă iar valoarea lui K_R se modifică pînă aproape de K_{R0}. Dacă mărirea lui T_d are ca efect o creştere a gradului de stabilitate îmbunătăţind performanţele tranzitorii şi depărtînd sistemul

Scanned with OKEN Scanner

de limita de stabilitate, atunci influența componentei D este pozitivă. Pentru determinarea valorii optime a constantei T_d se menține K_R în jurul valorii K_{R0} și se mărește T_d pînă cînd calitatea regimului tranzitoriu și deci gradul de stabilitate nu se mai îmbunătățesc. Valoarea lui T_d la care se atinge acest efect este adoptată ca valoare optimă.

Alte metode practice de determinare a parametrilor optimi de acord au la bază raportul $\frac{\tau}{T_f}$ caracteristic pentru un proces cu timpul mort τ și o constantă de timp T_f:

$$H_f(s)=\frac{K_f \cdot e^{-\tau s}}{T_f s+1}$$

1. *Relațiile Ziegler-Nichols*

a. Pentru regulator *P*:

$$K_{R\,opt}=\frac{1}{K_f}\cdot\frac{T_f}{\tau} \tag{6.139}$$

b. Pentru regulator *PI*:

$$K_{R\,opt}=\frac{0{,}9}{K_f}\cdot\frac{T_F}{\tau} \tag{6.140}$$

$$T_{i\,opt}=3{,}3\ \tau. \tag{6.141}$$

c. Pentru regulator *PID* cu $q=0$:

$$K_{R\,opt}=\frac{1{,}5}{K_f}\cdot\frac{T_f}{\tau}$$

$$T_{i\,opt}=2{,}5\ \tau \tag{6.142}$$

$$T_{d\,opt}=0{,}5\ \tau$$

și pentru regulator *PID* cu $q=1$:

$$K_{R\,opt}=\frac{1{,}2}{K_f}\cdot\frac{T_f}{\tau}$$

$$T_{i\,opt}=2\ \tau \tag{6.143}$$

$$T_{d\,opt}=0{,}5\tau.$$

2. *Relațiile W. Oppelt*

a. Pentru regulatoare *P*:

$$K_{R\,opt}=\frac{1}{K_f}\cdot\frac{T_f}{\tau}. \tag{6.144}$$

b. Pentru regulatoare *PI*:

$$K_{R\,opt}=\frac{0{,}8}{K_f}\cdot\frac{T_f}{\tau}$$

$$T_{i\,opt}=3\ \tau. \tag{6.145}$$

Scanned with OKEN Scanner

c. Pentru regulatoare *PID*:

$$K_{R\,opt}=\frac{1,2}{K_f}\cdot\frac{T_f}{\tau}$$

$$T_{i\,opt}=2\,\tau \qquad (6.146)$$

$$T_{d\,opt}=0,42\;\tau.$$

Relaţiile (6.146) sînt foarte apropiate de relaţiile (6.142).

3. *Relaţiile Kopelovici.* Pe baza unor cercetări experimentale au fost stabilite relaţii pentru calculul parametrilor optimi de acord asigurînd un răspuns tranzitoriu aprioric cu durata minimă şi un răspuns cu suprareglaj maxim $\sigma=20\%$. În tabelul 6.4 sînt prezentate aceste relaţii de calcul.

Tabelul 6.4

Valorile parametrilor de acord după Kopelovici

Tipul regulatorului	Răspuns aperiodic cu durată minimă	Răspuns oscilant cu $\sigma=20\%$
I	$T_{i\,opt}=4,5\,K_fT_f$	$T_{i\,opt}=1,7\,K_f\,T_f$
P	$K_{0\,opt}=\frac{0,3}{K_f}\,\frac{T_f}{\tau}$	$K_{R\,opt}=\frac{0,7}{K_f}\,\frac{T_f}{\tau}$
PI	$K_{R\,opt}=\frac{0,6}{K_f}\,\frac{T_f}{\tau}$ $T_{i\,opt}=0,8+0,5T_f$	$K_{R\,opt}=\frac{0,7}{K_f}\,\frac{T_f}{\tau}$ $T_{1\,opt}=\tau+0,3\,T_f$
PID	$K_{R\,opt}=\frac{0,95}{K_f}\,\frac{T_f}{\tau}$ $T_{i\,opt}=2,4\,\tau$ $T_{d\,opt}=0,4\,\tau$	$K_{R\,opt}=\frac{1,2}{K_f}\,\frac{T_f}{\tau}$ $T_{i\,opt}=2\tau$ $T_{d\,opt}=0,4$

4. *Relaţiile Chien, Hrones, Reswick.* Pe baza unor încercări pe modele sînt prezentate în tabelele 6.5 şi 6.6 relaţiile de calcul ale parametrilor optimi de acord pentru o comportare optimă la variaţii treaptă a intrării şi la variaţia perturbaţii. S-au luat în discuţie răspunsuri tranzitorii aperiodice cu durată minimă şi răspuns cu $\sigma=20\%$ şi durată minimă atît la variaţii ale mărimii de intrare (tab. 6.5) cît şi pentru comportare optimă la perturbaţii (tab. 6.6). Reprezentarea grafică în scară logaritmică a relaţiilor ce permit determinarea parametrilor de acord a unui regulator *PID* pentru un proces ce conţine timp mort şi o constantă de timp $\left(\frac{\tau}{T}=a\right)$ ilustrează dependenţa parametrilor de acord de acest raport $\frac{\tau}{T}$. De remarcat importanţa deosebită a acestui raport asupra performanţelor sistemului cu timp mort.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 6.5

Valorile optime ale parametrilor de acord la variaţia intrării

Tipul regulatorului	Răspuns aperiodic şi durată a răspunsului minimă	Răspuns oscilant amortizat cu σ =20% şi durată minimă
P	$K_{R\,opt}=\frac{0,3}{K_f}\cdot\frac{T_f}{\tau}$	$K_{R\,opt}=\frac{0,7}{K_f}\cdot\frac{T_f}{\tau}$
PI	$K_{R\,opt}=\frac{0,35}{K_f}\cdot\frac{T_f}{\tau}$ $T_{i\,opt}=1,2\,\tau$	$K_{R\,opt}=\frac{0,6}{K_f}\cdot\frac{T_f}{\tau}$ $T_{i\,opt}=\tau$
PID	$K_{R\,opt}=\frac{0,6}{K_f}\cdot\frac{T_f}{\tau}$ $T_{i\,opt}=\tau$ $T_{d\,opt}=0,5\,\tau$	$K_{R\,opt}=\frac{0,95}{K_f}\cdot\frac{T_f}{\tau}$ $T_{i\,opt}=1,35\,\tau$ $T_{d\,opt}=0,47\,\tau$

Tabelul 6.6

Valorile optime ale parametrilor de acord la variaţia perturbaţiilor

Tipul regulatorului	Răspuns aperiodic şi durată a răspunsului minimă	Răspuns oscilant amortizat cu σ =20% şi durată minimă
P	$K_{R\,opt}=\frac{0,3}{K_f}\cdot\frac{T_f}{\tau}$	$K_{R\,opt}=\frac{0,7}{K_f}\cdot\frac{T_f}{\tau}$
PI	$K_{R\,opt}=\frac{0,6}{K_f}\cdot\frac{T_f}{\tau}$ $T_{i\,opt}=4\,\tau$	$K_{R\,opt}=\frac{0,7}{K_f}\cdot\frac{T_f}{\tau}$ $T_{i\,opt}=2,3$
PID	$K_{R\,opt}=\frac{0,95}{K_f}\cdot\frac{T_f}{\tau}$ $T_{i\,opt}=2,4\,\tau$ $T_{d\,opt}=0,42\,\tau$	$K_{R\,opt}=\frac{1,2}{K_f}\cdot\frac{T_f}{\tau}$ $T_{i\,opt}=2\,\tau$ $T_{d\,opt}=0,42\,\tau$

În figura 6.31 se evidenţiază dependenţa factorului total de amplificare a căii directe a sistemului $K_d=K_R\cdot K_f$ funcţie de raportul a, după diverşi autori.

Dependenţa timpului de integrare şi de derivare de raportul a este reprezentată în figura 6.32. Se remarcă o bună concordanţă între diversele criterii de acordare a regulatoarelor.

Scanned with OKEN Scanner

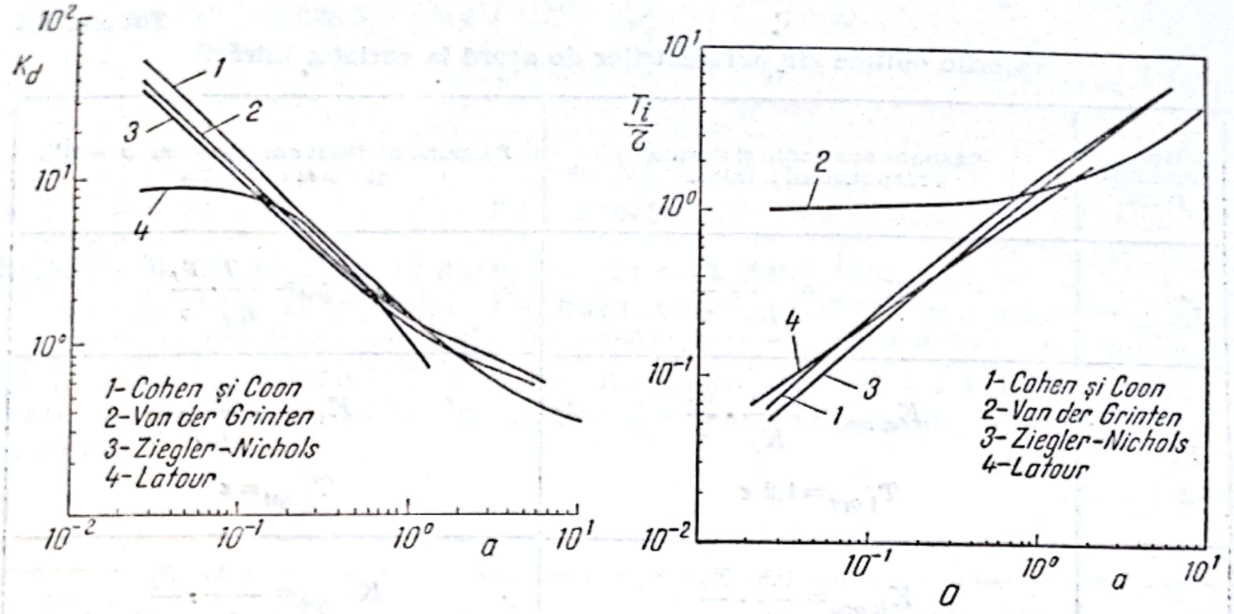


Fig. 6.31. Dependența factorului de amplificare al sistemului de raportul $\frac{\tau}{T_f}$.

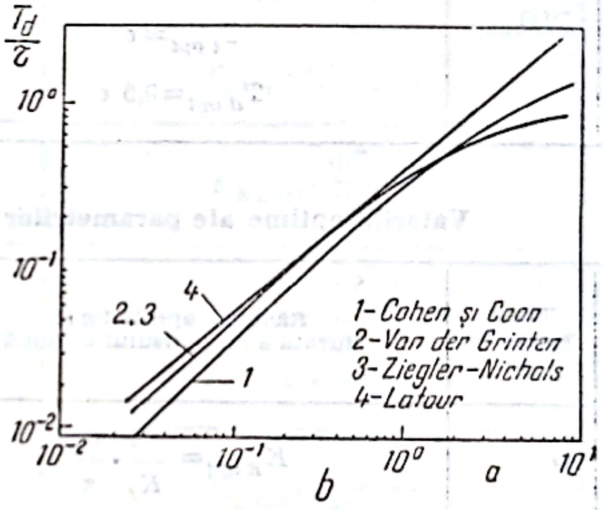


Fig. 6.32. Comparația soluțiilor diverselor criterii de acordare:
a — dependența constantei de integrare T de raportul $a = \tau/T$; *b* — dependența constantei de derivare T_d de raportul $a = \tau/T$.

Adoptarea unor relații de acordare depinde de condițiile concrete în care funcționează sistemul de reglare automată. Astfel pentru sisteme la care mărimea de intrare suferă variații relativ frecvente (procese cu desfășurare discontinuă, prezența unui calculator la nivelul ierarhic superior, încadrarea regulatorului într-o buclă interioară la reglarea în cascadă sau, într-o schemă de reglare de raport) se adoptă relațiile din tabelul 6.5.

Diversitatea criteriilor practice de acordare a regulatoarelor evidențiază faptul că problema acordării regulatoarelor pentru procese lente este o problemă spinoasă care depinde de gradul de cunoaștere a procesului și de experiența acumulată în alegerea și acordarea regulatoarelor.

Caracterul neliniar al proceselor, identificarea imprecisă a proceselor lente, nu permit stabilirea unor relații generale pentru calculul parametrilor de acord.

Metodele practice de acordare prin încercări pot fi utilizate cu bune rezultate în alegerea și acordarea regulatoarelor pentru procese lente.

Scanned with OKEN Scanner

Criteriile integrale de tipul celor prezentate în subcapitolul 6.1 pot fi utilizate cu bune rezultate pentru determinarea parametrilor optimi de acord ai regulatoarelor.

Eroarea $\varepsilon(t)$ ce intervine în integralele ce definesc criteriile de performanţă (6.1) ... (6.4) este funcţie de parametrii de acord ai regulatoarelor. Minimizarea acestor integrale în raport cu parametrii de acord K_R, T_i şi T_d ai regulatorului permite determinarea valorilor optime ai acestor parametri. Pentru o structură de sistem cu reacţie unitară (fig. 6.8) eroarea se calculează cu relaţia

$$E(s)=\frac{1}{1+H_d(s)}R(s)=\frac{1}{1+H_R(s)H_f(s)}R(s), \tag{6.147}$$

iar $\varepsilon(t)$ se calculează cu ajutorul relaţiei

$$\varepsilon(t)=\mathcal{L}^{-1}[E(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{R(s)}{1+H_R(s)H_f(s)}\right]. \tag{6.148}$$

Introducînd expresia erorii sub integrală şi folosind unul din criteriile de performanţă definite în (6.1) ... (6.4) se obţine o funcţie de mai multe variabile ce trebuie extremizată:

$$IP=f[K_R, T_i, T_d, K_f, T_f, \tau, s]. \tag{6.149}$$

Extremizarea acestei funcţii în raport cu K_R, T_i, T_d permite determinarea valorilor optime ale parametrilor de acord ai regulatorului. Prin rezolvarea unor ecuaţii de forma:

$$\frac{\partial f}{\partial K_R}=0; \qquad \frac{\partial f}{\partial T_i}=0; \qquad \frac{\partial f}{\partial T_d}=0, \tag{6.150}$$

se determină: $K_{R\,opt}$, $T_{i\,opt}$, $T_{d\,opt}$.

Pentru minimizarea funcţiei (6.149) pot fi utilizate diverse metode de optimizare parametrică [52].

Utilizarea limbajului SIMSID pentru acordarea regulatoarelor permite, cu un volum redus de calcul, determinarea valorilor optime ale parametrilor care asigură performanţele dorite (un răspuns dorit al sistemului).

În figura 6.33 se prezintă schema generală privind determinarea parametrilor K_R, T_i, T_d care asigură un răspuns dorit al sistemului.

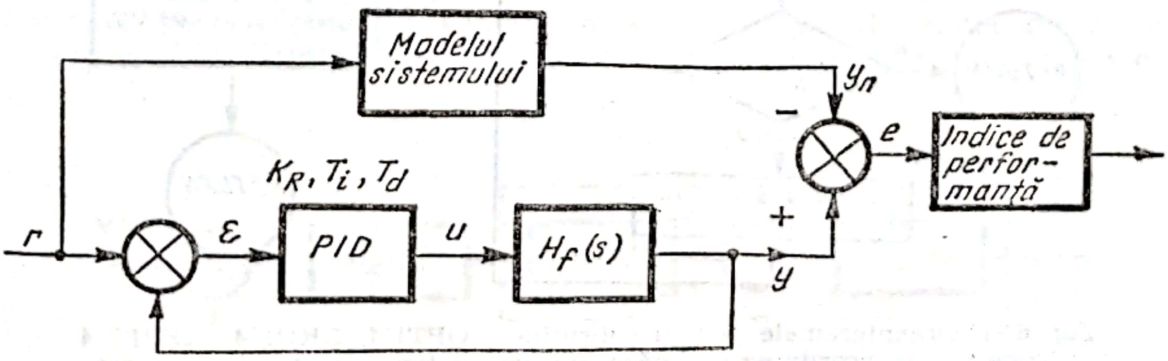


Fig. 6.33. Schema-bloc pentru abordarea optimă a unui regulator *PID* prin simulare numerică.

Scanned with OKEN Scanner

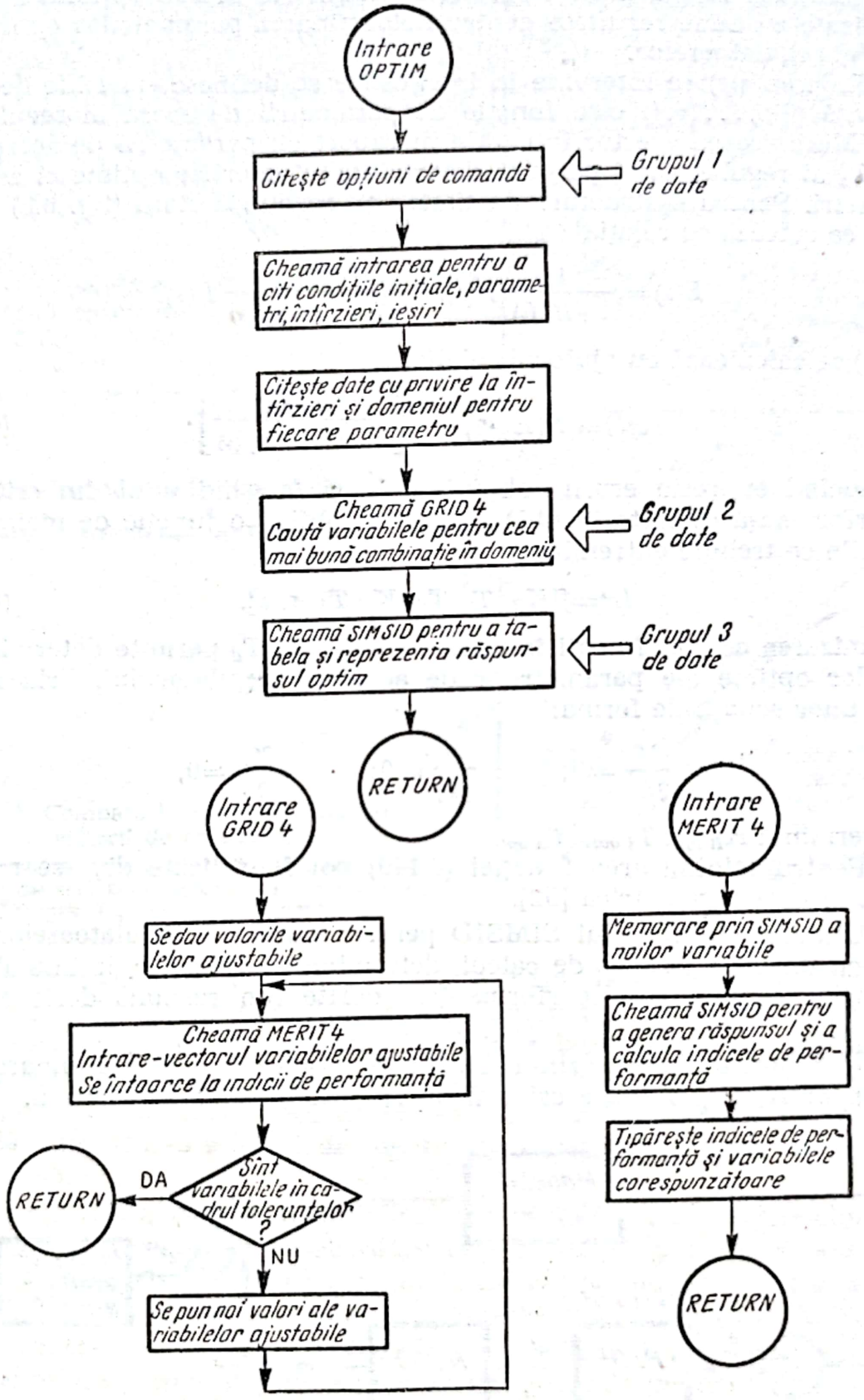


Fig. 6.34. Organigramele pentru subrutinele OPTIM, GRID 4, MERIT 4 utilizate pentru acordarea optimă a unui regulator prin simulare cu programul SIMSID.

Scanned with OKEN Scanner

Utilizînd subrutina OPTIM, subrutina MERIT şi subrutina GRID se caută acei parametri ai regulatorului care conduc la minimizarea integralei erorii medii pătratice.

În figura 6.34 sînt prezentate organigramele pentru cele trei subrutine care, apelate în cadrul limbajului SIMSID [24], permit a determina parametrii optimi ai unui sistem.

Subrutina OPTIM cheamă subrutina GRID 4 care caută cea mai bună combinaţie a parametrilor de acord iar subrutina MERIT cheamă SIMSID pentru a calcula indicele de performanţă şi a determina valorile optime ale parametrilor.

Problemele legate de alegerea şi acordarea regulatoarelor neliniare sînt prezentate în capitolul 10, iar alegerea şi acordarea regulatoarelor numerice este prezentată în capitolul 9.

6.5. PROIECTAREA SISTEMELOR DE REGLARE AUTOMATĂ PORNIND DE LA FUNCŢIA DE TRANSFER $H_0(s)$

Proiectarea analitică a unui sistem de reglare automată presupune determinarea legii de reglare şi a parametrilor de acord pentru un proces dat, supus unor perturbaţii aditive, asigurîndu-se cerinţele de performanţă impuse. O asemenea proiectare în care se determină tipul şi parametrii regulatorului astfel încît să fie satisfăcute anumite performanţe impuse funcţionării SRA — reprezintă o proiectare minimală.

Pentru o structură de sistem de reglare automată cu reacţie unitară (legătură inversă directă), figura 6.35, funcţia de transfer a sistemului în stare deschisă este dată de relaţia

$$H_d(s)=H_R(s)\cdot H_1(s)\cdot H_2(s)=H_R(s)\cdot H_F(s) \tag{6.151}$$

iar funcţia de transfer a întregului sistem în stare închisă este

$$H_0(s)=\frac{H_R(s)\cdot H_F(s)}{1+H_R(s)\cdot H_F(s)}. \tag{6.152}$$

Între performanţele staţionare şi tranzitorii ale sistemului de reglare automată şi expresia funcţiilor de transfer (6.151) şi (6.152) este o strînsă corespondenţă. Repartiţia polilor şi zerourilor funcţiei de transfer asigură anumite performanţe în funcţionarea SRA. Ţinînd seama de această corespondenţă între performanţele sistemului (ε_{st}, $\sigma\%$, t_t, t_c, t_i, ψ etc.)

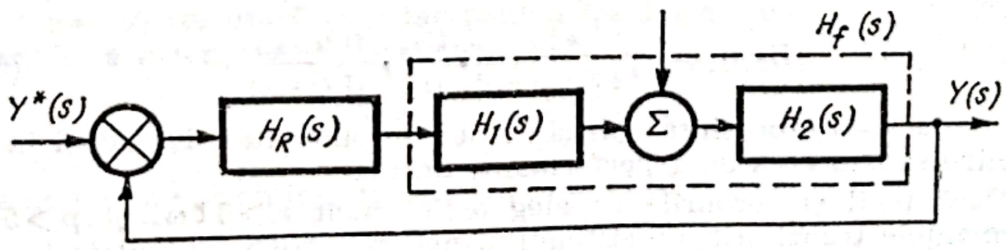


Fig. 6.35. Structura generală a unui SRA cu reacţie unitară.

Scanned with OKEN Scanner

și funcția de transfer se poate construi un model al sistemului care să asigure satisfacerea performanțelor sistemului.

Astfel, dacă vom nota cu $[H_0(s)]_m$ funcția de transfer care asigură anumite performanțe pentru sistemul automat, cunoscînd apriori expresia funcției de transfer a părții fixate a sistemului, rezultă din (6.152) funcția de transfer a regulatorului sau algoritmul de reglare

$$H_R(s)=\frac{1}{H_F(s)}\cdot\frac{[H_0(s)]_m}{1-[H_0(s)]_m}. \tag{6.153}$$

Pentru ca relația (6.153) să fie operativă, o primă etapă ce trebuie parcursă la proiectarea analitică este de a transpune cerințele de performanță ale sistemului într-un anumit model matematic $[H_0(s)]_m$. Ținînd seama de tipul intrării (treaptă sau rampă) și de cerințele de performanță impuse sistemului sub forma:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{st} &\leqslant \varepsilon_{st\ impus};\\
\sigma\%_0 &\leqslant \sigma\%_{0\ impus};\\
t_t &\leqslant t_{t\ impus};\\
t_c &\leqslant t_{c\ impus};\\
\psi &\leqslant \psi_{\ impus},
\end{aligned} \tag{6.154}$$

în domeniul timp și sub forma:

$$\begin{aligned}
\omega_B &\leqslant \omega_{B\ impus};\\
M_v &\leqslant M_{v\ impus};\\
M_c &\geqslant M_{c\ impus};\\
M_\varphi &\geqslant M_{\varphi\ impus},
\end{aligned} \tag{6.155}$$

în domeniul frecvențelor, se poate construi un model care să satisfacă cel mai bine aceste cerințe de performanță. Este cunoscută (v. cap. 3) relația între performanțe și poziția polilor pentru un sistem de ordinul doi. Valoarea parametrilor ζ și ω_n determină performanțele tranzitorii ale sistemului iar K_0, factorul de amplificare al sistemului, determină comportarea în regim staționar.

În condițiile în care cerințele de performanță impuse nu pot fi satisfăcute cu ajutorul unui model de ordinul doi se vor adăuga modelului de ordinul doi poli și zerouri astfel încît performanțele sistemului să fie satisfăcute cît mai bine. Astfel se obține un model al sistemului sub forma

$$[H_0(s)]_m=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\cdot\frac{\Pi p_i}{\Pi z_i}\cdot\frac{\Pi(s+z_i)}{\Pi(s+p_i)}, \tag{6.156}$$

unde $-p_i$ și $-z_i$ reprezintă poli și zerouri suplimentari introduși în model pentru satisfacerea unor performanțe dorite.

Dacă polii și zerourile se aleg astfel încît $z_i>5\,\zeta\omega_n$ și $p_i>5\,\zeta\omega_n$, performanțele tranzitorii ale sistemului pentru $\zeta>0{,}5$ nu sînt influențate de prezența acestora în funcția de transfer $[H_0(s)]_m$. Gradul de complexitate

Scanned with OKEN Scanner

al funcției $[H_0(s)]_m$ și $H_F(s)$ determină gradul de complexitate al legii de reglare, impunîndu-se verificarea realizabilității algoritmului de reglare. Pornind de la condiția de realizabilitate a algoritmului de reglare și anume diferența între numărul polilor p și numărul zerourilor z al funcției de transfer $H_R(s)$ să fie pozitivă

$$(p-z)_{H_R(s)} > 0 \tag{6.157}$$

și dacă ținem seama că pentru procese tehnologice uzuale este îndeplinită relația

$$(p-z)_{H_F(s)} > 0 \tag{6.158}$$

rezultă condiția necesară și suficientă ce trebuie îndeplinită de excesul poli-zerouri al funcției de transfer $H_0(s)$ pentru ca algoritmul de reglare să fie fizic realizabil, și anume

$$(p-z)_{H_d(s)} = (p-z)_{H_0(s)} \geqslant (p-z)_{H_F(s)}. \tag{6.159}$$

Condiția (6.159) permite a stabili numărul minim de poli și zerouri suplimentari introduși în modelul de ordinul doi astfel încît să fie satisfăcută și condiția de realizabilitate fizică a algoritmului de reglare.

Este evident că cel mai simplu de obținut funcția de transfer $[H_0(s)]_m$ este cazul cînd modelul matematic ce asigură performanțele impuse este de ordinul doi.

Exemplul 6.2

Pentru un proces caracterizat prin funcția de transfer

$$H_F(s) = \frac{10}{s(s+5)}$$

se cere a se determina algoritmul de reglare care asigură următoarele performanțe: $\sigma\% < 10\%$, $\varepsilon_{st} = 0$ pentru intrare treaptă unitară și $t_t \leqslant 3$ s.

Prima etapă a proiectării constă în determinarea funcției $H_0(s)$ din performanțele impuse cu considerarea funcției de transfer $H_F(s)$.

Excesul de poli-zerouri pentru $H_0(s)$ rezultă a fi egal cu 2 întrucît pentru $H_F(s)$ acest exces este de asemenea 2. Astfel, din acest punct de vedere putem utiliza un sistem de ordinul doi pentru a rezolva problema de proiectare.

A doua etapă este a determina ζ și ω_n care satisfac performanțele impuse întrucît

$$H_0(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}.$$

Pentru $\sigma = 8\%$ rezultă $\zeta = 0{,}6$ iar pentru $t_t = 3$ s alegem $\omega_n = 4{,}16$. Funcția de transfer a sistemului în acest caz capătă forma

$$H_0(s) = \frac{17{,}3}{s^2 + 5s + 17{,}3}.$$

Legea de reglare se obține cu ajutorul relației (6.153) sau:

$$H_R(s) = \frac{H_d(s)}{H_F(s)} = \frac{1}{H_F(s)} \cdot \frac{H_0(s)}{1 - H_0(s)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cunoscînd $H_0(s)$ se poate obține funcția $H_d(s)$ a sistemului deschis

$$H_d(s)=\frac{H_0(s)}{1-H_0(s)}=\frac{\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}}{1-\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}}=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}=\frac{17{,}3}{s(s+5)}.$$

Folosind această ultimă relație rezultă legea de reglare:

$$H_R(s)=\frac{s(s+5)}{10}\cdot\frac{17{,}3}{s(s+5)}=1{,}73$$

care în acest caz este de tip proporțional.

Etapele proiectării analitice a unui sistem de reglare automată folosind funcția de transfer $H_0(s)$ și $H_d(s)$ sînt următoarele:

a. Dîndu-se $H_F(s)$ se determină excesul poli-zerouri al acestei funcții de transfer.

b. Se construiește modelul $H_0(s)$ care să satisfacă performanțele cerute.

c. Se adaugă modelului de ordinul doi zerouri și poli astfel încît să fie satisfăcute toate performanțele staționare și tranzitorii impuse sistemului de reglare automată.

d. Se verifică condiția de realizabilitate fizică a algoritmului de reglare $(p-z)_{H_0(s)}\geqslant(p-z)_{H_F(s)}$.

e. Se obține funcția de transfer a sistemului în stare deschisă cu ajutorul relației:

$$H_d(s)=\frac{H_0(s)}{1-H_0(s)}.$$

f. Se determină legea de reglare cu ajutorul relației:

$$H_R(s)=\frac{H_d(s)}{H_F(s)}=\frac{1}{H_F(s)}\cdot\frac{H_0(s)}{1-H_0(s)}.$$

g. Se calculează performanțele obținute pe baza modelului proiectat.

Pentru obținerea anumitor performanțe în raport cu perturbațiile, proiectarea poate urma aceleași etape ca și în cazul impunerii unor performanțe pentru răspunsul la anumite semnale de intrare.

Astfel pentru anumite performanțe impuse pot fi plasați polii funcției de transfer $H_{0p}(s)$ iar algoritmul de reglare se determină ținînd seama de expresia generală a funcției de transfer definită în raport cu perturbația.

Pentru structura de sistem din figura 6.36 unde perturbația poate fi aplicată în diverse puncte ale părții fixate, funcția de transfer $H_{0p}(s)$ (în cazul aplicării perturbației la primul sumator) este dată de relația

$$H_{0p}(s)=\frac{H_2(s)\cdot H_p(s)}{1+H_1(s)\,H_2(s)\,H_R(s)} \qquad (6.160)$$

sau (în al doilea caz)

$$H_{0p}(s)=\frac{H_p(s)}{1+H_1(s)\,H_2(s)\,H_R(s)}=\frac{H_p(s)}{1+H_F(s)\,H_R(s)}; \qquad (6.161)$$

Scanned with OKEN Scanner

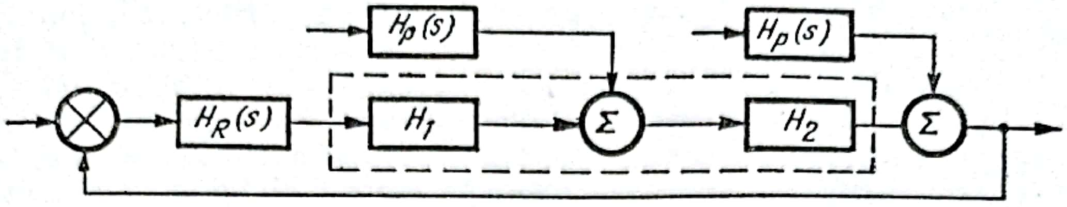


Fig. 6.36. Structura unui SRA supus perturbaţiilor atît la intrarea procesului, cît şi la ieşirea procesului.

Dacă notăm prin $[H_{0p}(s)]_m$ funcţia de transfer care asigură performanţele dorite în raport cu perturbaţia, atunci din (6.161) se determină legea de reglare

$$H_R(s) = \frac{1}{H_F(s)} \left[\frac{[H_p(s)]}{[H_{op}(s)]_m} - 1 \right]. \qquad (6.162)$$

În relaţia (6.162), funcţiile de transfer $H_F(s)$ şi $H_p(s)$ sînt cunoscute din datele iniţiale ale temei de proiectare iar $[H_{0p}(s)]_m$ se obţine în prima fază a proiectării prin transpunerea performanţelor într-o funcţie de transfer.

Pentru cazul în care se urmăreşte satisfacerea unor performanţe atît în raport cu diferite mărimi de intrare, cît şi în raport cu diferite mărimi perturbatoare, se va alege algoritmul de reglare care asigură cel mai bine satisfacerea performanţelor atît în raport cu intrarea cît şi în raport cu perturbaţia.

Determinarea analitică a algoritmului de reglare se poate face de asemenea pornind de la cerinţele de performanţă în domeniul frecvenţelor [59] precum şi utilizînd metodele clasice de sinteză a sistemelor de reglare automată [13, 31, 3].

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 7

SISTEME DE REGLARE AUTOMATĂ CU STRUCTURĂ SPECIALĂ

7.1. SISTEME DE REGLARE ÎN CASCADĂ

Reglarea în cascadă este utilizată atît în cazul proceselor rapide cît şi în cazul proceselor lente, cu timp mort. Prezenţa unui număr mare de constante de timp în funcţia de transfer a procesului face dificilă utilizarea unor algoritmi de reglare tipizaţi (*PI, PD, PID*) impunîndu-se pentru compensarea acestor constante de timp, algoritmi de reglare care să conţină mai multe binoame de gradul întîi. Date fiind dificultăţile de realizare a unor asemenea regulatoare şi ţinînd seama de efectul negativ pe care-l au componentele derivative asupra răspunsului sistemului (amplificarea zgomotelor) se recomandă *reglarea în cascadă.*

Pentru procesele tehnologice la care se pot evidenţia mărimi intermediare măsurabile iar funcţia de transfer a procesului poate fi scrisă ca un produs de funcţii de transfer ce nu conţin mai mult de două constante de timp, se recomandă reglarea în cascadă, figura 7.1. Astfel în această schemă pe lîngă regulatorul RA_1 destinat reglării mărimii de ieşire $y(t)$ se introduc în schemă regulatoare suplimentare, cîte unul pentru fiecare mărime intermediară, fiind asigurată o reglare — şi implicit o limitare — simultană a mai multor mărimi din cadrul sistemului, împreună cu mărimea de ieşire.

În figura 7.1, regulatorul RA_2 este destinat reglării mărimii intermediare $y_1(t)$. Alegerea mărimilor intermediare trebuie făcută avînd în vedere accesibilitatea lor, posibilitatea de măsurare cu mijloace tehnice simple precum şi viteza de răspuns la perturbaţii a acestor mărimi. Astfel, se impune ca aceste mărimi intermediare să răspundă la perturbaţii mai repede decît mărimea de la ieşire. Respectarea acestor condiţii asigură o creştere a vitezei de răspuns a sistemului şi o compensare a efectului perturbaţiilor ce intervin asupra procesului, asigurîndu-se un grad de invarianţă al mărimii de ieşire (în raport cu perturbaţiile) mult mai mare decît în cazul unei reglări convenţionale cu un singur regulator. Reglarea în cascadă datorită prezenţei mai multor reacţii negative mai are şi avan-

Scanned with OKEN Scanner

tajul unei sensibilități mai reduse la variația anumitor parametri ai procesului, sub acțiunea unor perturbații parametrice.

Dificultățile în obținerea unor performanțe cît mai bune cu ajutorul reglării în cascadă sînt legate de alegerea și acordarea regulatoarelor, avînd în vedere că regulatoarele buclelor interioare au referința fixată intern de către un alt regulator. În general pentru bucla interioară se recomandă un regulator *P* sau *PI*, foarte rar regulator *PID*. Se recomandă ca bucla interioară să aibă o viteză de răspuns mai mare decît bucla principală de aceea un regulator *P* este frecvent utilizat deși prezintă dezavantajul unei reglări cu eroare staționară. Componenta *I* este adăugată în special la reglări de debite. Pentru bucla exterioară se recomandă un regulator *PI*, rar se folosește un regulator *PID*.

O schemă de reglare în cascadă este prezentată în figura 7.2, unde se cere reglarea temperaturii unui reactor. Ca mărime intermediară în acest caz se consideră temperatura mediului în jurul reactorului θ_2 iar mărimea principală este temperatura în interiorul reactorului, θ_1.

Referința regulatorului RA_1 este fixată din exterior la valoarea θ_{01} iar referința regulatorului RA_2 este fixată de regulatorul RA_1 la valoarea θ_{02}. Regulatorul RA_2 acționează prin intermediul elementului de execuție asupra debitului de abur introdus în cămașa reactorului. Modificarea debitului de alimentare a reactorului sau temperatura fluidului de alimentare constituie perturbația $P_1(s)$ ce intervine direct asupra mărimii θ_1, iar modificarea caracteristicilor aburului reprezintă perturbația $P_2(s)$ ce intervine asupra primei părți a procesului, respectiv asupra mărimii intermediare θ_2.

Schema funcțională a sistemului de reglare în cascadă a temperaturii în reactor este prezentată în figura 7.3. Bucla interioară conține constante de timp mici și asigură compensarea rapidă a perturbațiilor $P_2(s)$, pe cînd bucla principală conține constante mari de timp. Pentru acest proces se recomandă un regulator *PI* pentru bucla principală și unul *P* sau *PI* pentru bucla interioară.

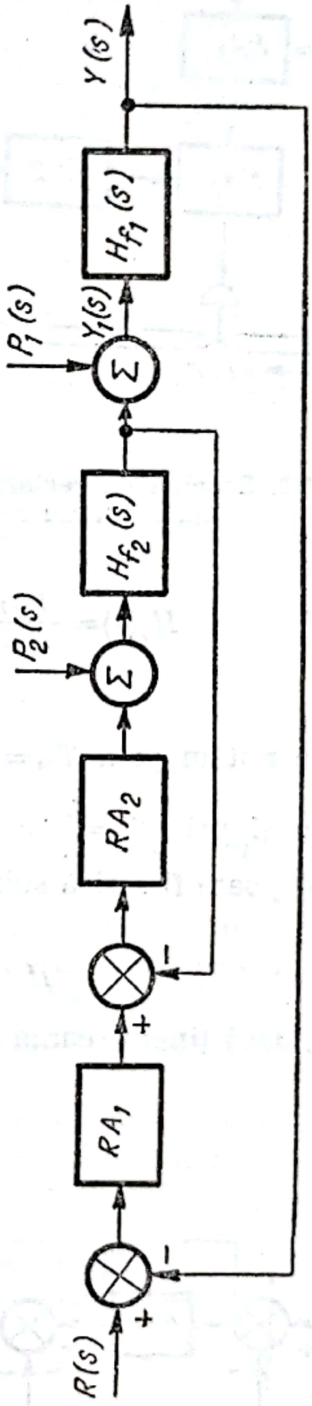


Fig. 7.1. Schema generală a unui sistem automat de reglare în cascadă.

Scanned with OKEN Scanner

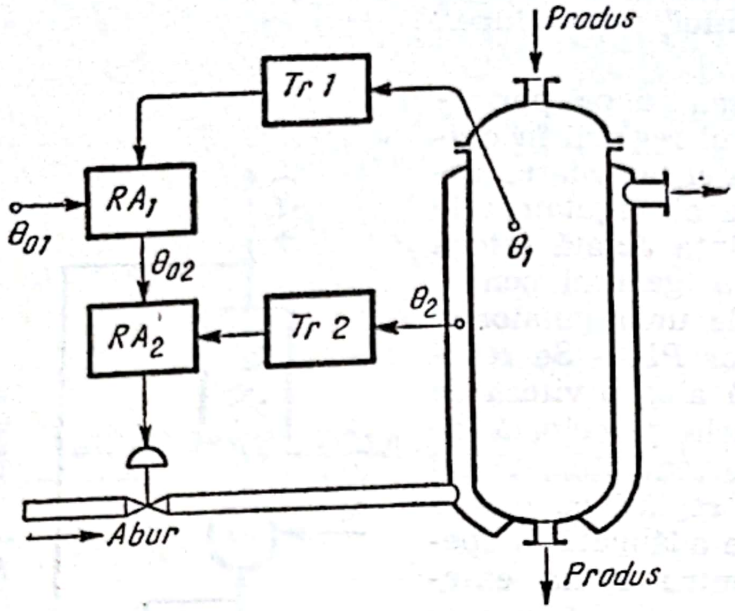


Fig. 7.2. Schema de reglare în cascadă a temperaturii într-un reactor chimic.

Un alt exemplu de sistem de reglare în cascadă este reprezentat în figura 7.4.

Motorul electric de curent continuu, ca obiect supus automatizării, este descris prin următoarea funcție de transfer

$$H(s)=\frac{\Omega(s)}{U(s)}=\frac{I(s)}{U(s)}\cdot\frac{\Omega(s)}{I(s)}=H_1(s)\cdot H_2(s). \quad (7.1)$$

Funcțiile de transfer $H_1(s)$ și $H_2(s)$ se obțin ținînd seama de schema funcțională a motorului (v. fig. 2.11)

$$H_1(s)=\frac{I(s)}{U(s)}=\frac{\dfrac{1}{R+Ls}}{1+\dfrac{1}{R+Ls}\cdot\dfrac{K_mK_e}{Js}}=\frac{\dfrac{J}{K_mK_e}s}{\dfrac{JR}{K_mK_e}s\left(1+\dfrac{L}{R}s\right)+1}.$$

Dacă notăm prin $T_m=\dfrac{JR}{K_mK_e}$ constanta de timp electromecanică a motorului și prin $T=\dfrac{L}{R}$ constanta de timp a indusului, funcția de transfer $H_1(s)$ poate fi scrisă sub forma

$$H_1(s)=\frac{\dfrac{T_m}{R}s}{T_ms(1+Ts)+1}=\frac{\dfrac{T_m}{R}s}{T_mTs^2+T_ms+1}$$

sau, dacă ținem seama că $T_m\gg T$

$$H_1(s)\simeq\frac{\dfrac{T_m}{R}s}{(T_ms+1)(Ts+1)}. \quad (7.2)$$

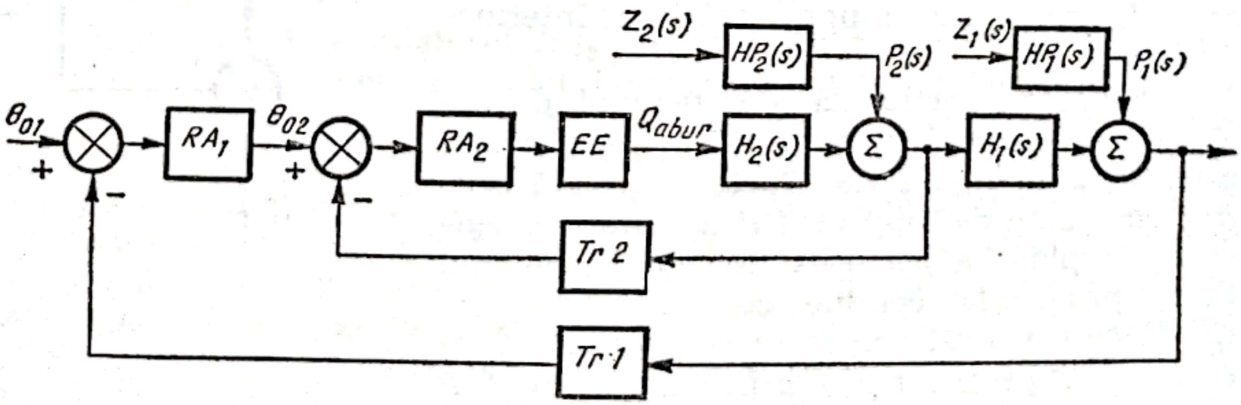


Fig. 7.3. Schema funcțională de reglare în cascadă a temperaturii în reactor.

Scanned with OKEN Scanner

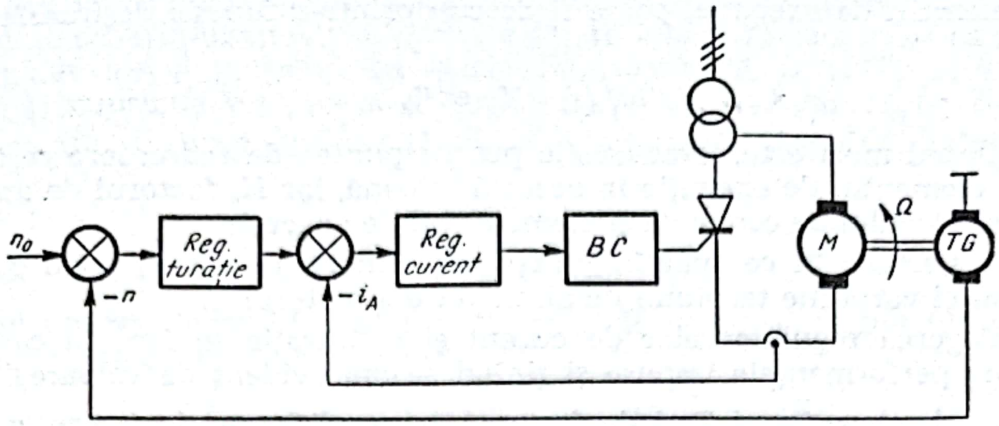


Fig. 7.4. Schema de reglare în cascadă a turației unui motor de curent continuu.

Funcția de transfer $H_2(s)$ se poate calcula pornind de la schema echivalentă a motorului

$$H_2(s)=\frac{K_m}{Js}=\frac{K_m\cdot\dfrac{R}{K_mK_e}}{\dfrac{J\cdot R}{K_mK_e}\cdot s}=\frac{R}{K_eT_ms}, \tag{7.3}$$

iar funcția de transfer globală a motorului rezultă sub forma

$$H(s)\cong\frac{\dfrac{1}{K_e}}{(T_ms+1)\ (Ts+1)},$$

obținîndu-se astfel o funcție de transfer corespunzătoare unui element de întîrziere de ordinul doi.

În acest caz mărimea de ieșire a sistemului este turația, iar mărimea intermediară este curentul rotoric. Astfel se asigură o reglare a turației și o reglare cu limitare a curentului absorbit de motor.

Schema funcțională a sistemului de reglare este prezentată în figura 7.5.

Dispozitivul de comandă pe grilă *DCG*, care generează impulsurile de comandă pentru elementul de execuție *EE* cu tiristoare, împreună cu

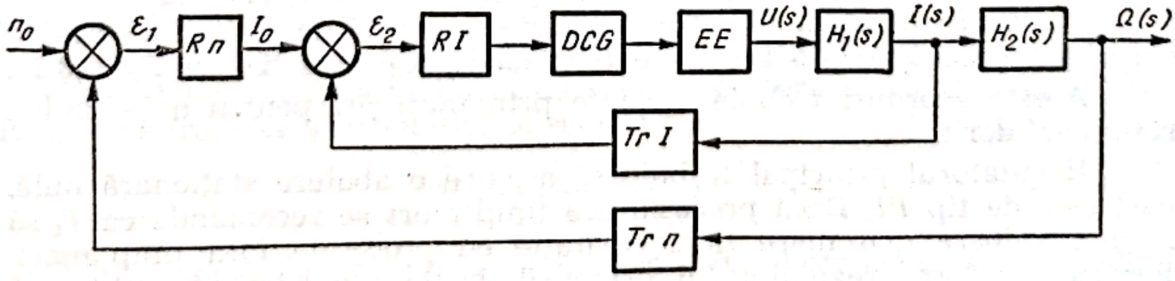


Fig. 7.5. Schema funcțională a sistemului de reglare a turației și curentului rotoric pentru un motor de curent continuu.

acest element de execuție, poate fi descris printr-o funcție de transfer de forma

$$H_r(s)=K_c \cdot e^{-\tau s},$$

unde timpul mort este caracteristic pentru puntea de redresoare ce alcătuiește elementul de execuție în această schemă, iar K_c factorul de amplificare al blocului de comandă și elementului de execuție.

Ca perturbații ce apar în funcționarea motorului menționăm cuplul rezistent și variațiile tensiunii de alimentare a motorului.

Alegerea regulatoarelor de curent și de turație se face în concordanță cu performanțele impuse și ținînd seama evident de valoarea constantelor de timp T_m și T și de factorul de amplificare al motorului $\frac{1}{K_e}$.

Pentru ca reglarea în cascadă să fie eficientă în ceea ce privește realizarea unor performanțe superioare față de reglarea convențională, se impune ca:

— perturbațiile cele mai importante să fie aplicate în cadrul buclei interioare, unde prin acțiunea regulatorului RA_2 se reduce rapid efectul lor;

— constantele de timp ale părții de proces inclusă în bucla de reglare interioară să fie reduse în comparație cu constantele de timp ale buclei principale (se recomandă ca raportul constantelor de timp ale celor două părți ale procesului să fie $3<\frac{T_1}{T_2}<5 \ldots 10$);

— parametrul intermediar supus reglării să fie legat direct de mărimea de ieșire a procesului.

Avînd în vedere condițiile impuse realizării unei reglări în cascadă, alegerea și acordarea regulatoarelor se face începînd cu bucla interioară. Astfel, dat fiind că în cadrul acestei bucle intervin cele mai importante perturbații și se impune realizarea unei viteze mari de răspuns, regulatorul secundar de tip *P* cu factor mare de amplificare este suficient. Dacă amplificarea acestui regulator este redusă se impune utilizarea unui regulator *PI*. Efectul *D* nu este dorit pentru procesele rapide care au zgomot, cum este cazul reglării de debite și presiuni, și pentru procesele cu timp mort.

Acordarea regulatorului *P* din bucla secundară se face funcționînd independent, impunînd satisfacerea unei restricții de forma $\varepsilon_{st} \leqslant \varepsilon_{st\ impus}$ pentru o perturbație de tip treaptă și un regim tranzitoriu cu minim de oscilații pînă la atingerea regimului staționar.

Pentru regulatorul *PI*, utilizînd metoda limitei de stabilitate pentru calculul parametrilor de acord, se recomandă $K_R=0{,}45\,K_{R0}$ și $T_i=0{,}8\,T_0$.

Aceste acorduri trebuie ajustate prin încercări pentru a se obține răspunsul dorit.

Regulatorul principal trebuie să asigure o abatere staționară nulă, deci este de tip *PI*. Dacă procesul are timp mort se recomandă ca T_i să aibă o valoare mai mare în comparație cu procesele fără timp mort. Pentru acordarea regulatorului principal, bucla secundară funcționează ca o parte caracteristică a întregului sistem, utilizîndu-se în acest scop metodele menționate în subcapitolul 6.4.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru procese rapide, utilizarea criteriului modulului, varianta Kessler, sau a criteriului simetriei permite determinarea parametrilor de acord ai regulatoarelor începînd cu bucla interioară. Dacă bucla interioară (fig. 7.1) cuprinde un proces a cărui funcție de transfer $H_{f_2}(s)$ conține o constantă de timp dominantă T_2 și o constantă parazită echivalentă T_{Σ_2}

$$H_{f_2}(s) = \frac{K_{f_2}}{(T_2 s+1)\ (T_{\Sigma_2} s+1)},$$

alegînd un regulator *PI* conform variantei Kessler, se obține funcția de transfer a acestei bucle sub forma

$$H_{02}(s) = \frac{H_{R_2}(s) \cdot H_{f_2}(s)}{1 + H_{R_2}(s) \cdot H_{f_2}(s)} = \frac{K_R\left(1+\frac{1}{T_i s}\right) \cdot \frac{K_{f_2}}{(T_2 s+1)\ (T_{\Sigma_2} s+1)}}{1 + K_R\left(1+\frac{1}{T_i s}\right) \cdot \frac{K_{f_2}}{(T_2 s+1)\ (T_{\Sigma_2} s+1)}}$$

sau, după simplificare ($T_i = T_2$ și $T_i/K_R = 2K_{f_2} T_{\Sigma_2}$), se obține

$$H_{02}(s) = \frac{1}{2T_{\Sigma_2}^2 s^2 + 2T_{\Sigma_2} s + 1} \cong \frac{1}{2T_{\Sigma_2} s+1}, \qquad (7.4)$$

deoarece $T_{\Sigma_2}^2 \ll 1$.

Astfel, bucla secundară intervine în componența buclei principale ca un element de întîrziere de ordinul întîi.

Performanțele obținute în cadrul buclei secundare sînt cele corespunzătoare aplicării variantei Kessler la alegerea și acordarea regulatoarelor.

Aplicînd din nou criteriul modulului pentru bucla principală, după ce se include în funcția de transfer a procesului și constanta parazită $2T_{\Sigma_2}$, se determină parametrii de acord ai regulatorului principal.

Dacă $H_{f_1}(s) = \frac{K_{f_1}}{(T_1 s+1)(T_{\Sigma_1} s+1)}$, prin considerarea întîrzierii introduse de bucla secundară, rezultă următoarea expresie pentru funcția de transfer a părții fixate

$$H'_{f_1}(s) = \frac{K_{f_1}}{(T_1 s+1)\ (T_{\Sigma_1} s+1)} \cdot \frac{1}{(2T_{\Sigma_2} s+1)} \cong \frac{K_{f_1}}{(T_1 s+1)\ (T'_{\Sigma_1} s+1)}, \qquad (7.5)$$

(întrucît $T_{\Sigma_1} \cdot 2T_{\Sigma_2} \ll 1$) unde $T'_{\Sigma_1} = T_{\Sigma_1} + 2T_{\Sigma_2}$ reprezintă tot o constantă de timp parazită.

Alegînd și acordînd regulatorul principal conform variantei Kessler se obțin și pentru această buclă de reglare performanțele cunoscute, iar funcția de transfer a sistemului se reduce la

$$H_{01}(s) = \frac{1}{2T'_{\Sigma_1} s+1}. \qquad (7.6)$$

În general, pentru unele bucle poate fi folosit criteriul modulului iar pentru altele, criteriul simetriei, în funcție de tipul variației în timp a semnalelor de intrare ale buclelor.

Scanned with OKEN Scanner

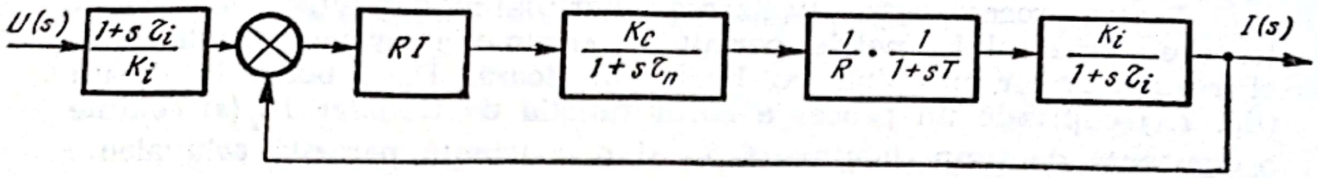


Fig. 7.6. Modelul simplificat al buclei de reglare a curentului rotoric.

Referitor la schema de reglare în cascadă a unui motor de curent continuu cu excitație independentă (fig. 7.5), se poate determina algoritmul optim de reglare folosind varianta Kessler a criteriului modulului pentru bucla interioară de reglare a curentului și criteriul simetriei pentru bucla de reglare a turației.

Dacă aproximăm comportarea elementului de execuție și a blocului de comandă printr-o funcție de transfer de forma

$$H_e(s)=\frac{K_e}{1+s\tau_\mu},$$

iar pentru funcția de transfer $H_1(s)$ reținem mai întîi constanta de timp T, deci $H_1(s)=\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{1+sT}$, structura buclei de reglare a curentului are forma din figura 7.6.

Funcția de transfer a părții fixate corespunzătoare buclei de reglare a curentului poate fi scrisă sub forma

$$H_{f_1}(s)=\frac{\frac{K_e\cdot K_i}{R}}{(1+s\tau_\mu)(1+s\tau_i)(1+sT)},$$

unde K_i și τ_i reprezintă parametrii caracteristici ai traductorului de curent.

Dacă facem notațiile $K_{1_i}=\frac{K_i\cdot K_e}{R}$ și $T_{\Sigma_i}=\tau_\mu+\tau_i$, funcția de transfer H_{f_1} devine

$$H_{f_1}(s)=\frac{K_{1_i}}{(1+sT_{\Sigma i})(1+sT)}. \tag{7.7}$$

Pentru funcția de transfer (7.7), conform variantei Kessler, algoritmul optim de reglare este

$$H_{R_i}(s)=\frac{K_R(1+sT_i)}{T_i s}, \tag{7.8}$$

cu parametrii optimi de acord $T_i=T$ și $\frac{K_R}{T_i}=\frac{1}{2K_{1i}T_{\Sigma i}}$.

Ținînd seama de (7.7) și (7.8), funcția de transfer echivalentă a buclei de reglare a curentului se reduce la forma

$$H_{0i}(s)=\frac{1+s\tau_i}{K_i}\cdot\frac{1}{1+2sT_{\Sigma i}+2s^2T_{\Sigma i}^2}\simeq\frac{1+s\tau_i}{K_i}\cdot\frac{1}{1+2sT_{\Sigma i}}. \tag{7.9}$$

Scanned with OKEN Scanner

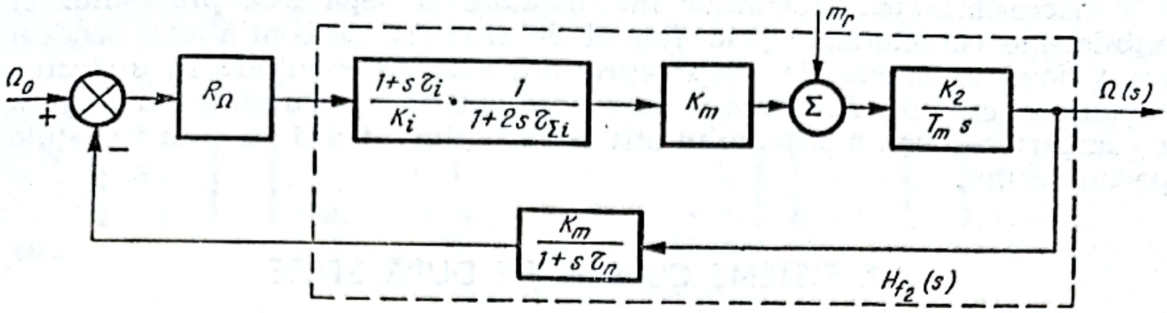


Fig. 7.7. Schema echivalentă pentru bucla de reglare a turației.

Pentru alegerea și acordarea optimă a regulatorului de turație vom considera schema dată în figura 7.7.

Funcția de transfer echivalentă a părții fixate corespunzătoare buclei de reglare a turației poate fi dedusă ușor din figura 7.7

$$H_{f_2}(s) = \frac{1+s\tau_i}{K_i} \cdot \frac{Km}{(1+2sT_{\Sigma i})} \cdot \frac{K_n}{(1+s\tau_\mu)} \cdot \frac{K_2}{T_m s} \simeq \frac{K_{2\Omega}}{s(1+sT_{\Sigma\Omega})T_m}, \qquad (7.10)$$

unde:

$$K_{2\Omega} = \frac{K_m \cdot K_n \cdot K_2}{K_i};$$

$$T_{\Sigma\Omega} = \tau_\mu + 2T_{\Sigma i} - \tau_i.$$

$T_{\Sigma\Omega}$ reprezintă o constantă de timp echivalentă de ordinul milisecundelor.

Acordînd regulatorul de viteză după criteriul simetriei, care asigură o comportare optimă a buclei de reglare pentru o variație în rampă a mărimii de intrare (sau pentru o variație treaptă a cuplului rezistent care reprezintă perturbația sistemului și se transmite la ieșire după efectuarea integrării de blocul cu funcția de transfer $\frac{K_2}{T_m s}$, se obține un algoritm de reglare *PI*

$$H_{R\Omega}(s) = \frac{K_{R\Omega}(1+T_{i\Omega}s)}{T_{i\Omega}s}, \qquad (7.11)$$

cu următoarele valori ale parametrilor de acord:

$$T_{i\Omega} = 4\ T_{\Sigma\Omega};$$

$$\frac{K_R}{T_{i\Omega}} = \frac{Im}{8\ K_{2\Omega}\ T^2_{\Sigma\Omega}},$$

O asemenea alegere și acordare optimă a regulatoarelor de curent și de turație asigură o comportare dinamică optimă a sistemului de acționare cu motor de curent continuu cu excitație independentă.

Printr-o alegere corespunzătoare a parametrilor intermediari, reglarea în cascadă asigură performanțe superioare în comparație cu reglarea convențională a mărimii de la ieșire cu un singur regulator.

Scanned with OKEN Scanner

Accesibilitatea mărimilor intermediare și separarea procesului în subsisteme caracterizate prin funcții de transfer ce conțin una sau cel mult două constante de timp reprezintă condiții esențiale în aplicarea reglării în cascadă. Alegerea și acordarea optimă a regulatoarelor asigură o comportare bună a sistemului atît la variațiile intrării cît și la variațiile perturbațiilor.

7.2. SISTEME CU REACȚIE DUPĂ STARE

Caracterizarea proceselor supuse automatizării se poate face, așa cum s-a arătat în capitolul 2, nu numai cu ajutorul unor modele de tipul intrare-ieșire (ecuații diferențiale, funcții de transfer) ci și cu ajutorul unor modele de tipul intrare-stare-ieșire.

Pentru procese liniare sau liniarizate monovariabile, modelul matematic intrare-stare-ieșire are forma:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}\,u(t); \\ y(t) &= \mathbf{c}^T\,\mathbf{x}(t), \end{aligned} \tag{7.12}$$

unde matricele **A**, **b** și $\mathbf{c}^T$ sînt formate cu ajutorul coeficienților ce intervin în ecuația diferențială sau în funcția de transfer a procesului.

Matricea **A** are dimensiunea nxn, fiind o matrice pătrată, iar matricele **b** și $\mathbf{c}^T$ sînt matrice coloană, respectiv linie.

Vectorul de stare $\mathbf{x}(t)$ este alcătuit dintr-un set minim de variabile, care permit caracterizarea completă a procesului la un anumit moment de timp. Pentru un proces (sistem) dat pot fi alese diverse variabile de stare, însă dimensiunea vectorului $\mathbf{x}(t)$ rămîne aceeași. Astfel pot fi alese variabilele de stare sub forma variabilelor de fază, variabilelor canonice sau variabile fizice [13].

Pentru un sistem caracterizat de ecuația diferențială

$$\frac{d^4y}{dt^4} + a_3\frac{d^3y}{dt^3} + a_2\frac{d^2y}{dt^2} + a^1\frac{dy}{dt} + a_0y = b_0u(t) \tag{7.13}$$

se pot obține diverse reprezentări în spațiul stărilor (spațiul variabilelor de stare).

Astfel, dacă alegem ca variabile de stare mărimea y și derivatele sale: $x_1=y$, $x_2=\dot{y}$, $x_3=\ddot{y}$, $x_4=\dddot{y}$, ecuația (7.13) poate fi scrisă sub forma

$$\dot{x}_4 = b_0u(t) - a_0x_1 - a_1x_2 - a_2x_3 - a_3x_4.$$

Pentru a obține modelul matematic general al sistemului observăm următoarea relație între variabilele de stare:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= x_3; \\ \dot{x}_3 &= x_4; \\ \dot{x}_4 &= -a_0x_1 - a_1x_2 - a_2x_3 - a_3x_4 + b_0u(t). \end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

Scriind sub formă matriceal-vectorială aceste n relații se obține

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ b_0\end{bmatrix}\cdot u(t)$$

sau

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{b}u(t),$$

Pentru a evidenția matricea $\mathbf{c}^T$ observăm că $y=x_1$, deci putem scrie

$$y=[1\quad 0\quad 0\quad 0]\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\mathbf{c}^T\cdot\mathbf{x}(t).$$

Modelul matematic obținut are avantajul simplității, matricele $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}^T$ caracterizînd complet sistemul.

Prin aplicarea transformatei Laplace ecuațiilor (7.12) se obține funcția de transfer dacă se consideră starea inițială $\mathbf{x}(0)=0$:

$$s\mathbf{X}(s)=\mathbf{A}\mathbf{X}(s)+\mathbf{b}U(s);$$

$$Y(s)=\mathbf{c}^T\mathbf{X}(s).$$

Din prima ecuație se obține starea $\mathbf{X}(s)$ în funcție de comanda $U(s)$ dacă matricea $[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}$ este nesingulară

$$\mathbf{X}(s)=[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\mathbf{b}U(s),$$

iar funcția de transfer are forma

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\mathbf{c}^T[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\cdot\mathbf{b}. \tag{7.14}$$

De remarcat faptul că funcția de transfer a sistemului este determinată dacă se cunosc matricele $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}^T$. Matricea $\Phi(s)=[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}$ poartă denumirea de *matrice de tranziție* sau *matrice fundamentală a sistemului*. În domeniul timp, această matrice se poate calcula cu ajutorul relației

$$\Phi(t)=\mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}]. \tag{7.15}$$

Cunoașterea matricei de tranziție permite a determina răspunsul sistemului și evoluția stării sale, dacă se cunoaște starea la un moment t_0 și comanda $u(t)$ pe un interval dat de timp.

Pentru un proces caracterizat prin funcția de transfer se poate obține un model matematic intrare-stare-ieșire printr-o alegere corespunzătoare a variabilelor de stare. Astfel, pentru sistemul reprezentat în figura 7.8 pot fi alese variabilele de stare $X_1(s)$, $X_2(s)$ și $X_3(s)$, între care există relațiile:

$$\begin{aligned}sX_1(s)&=X_2(s);\\ sX_2(s)&=X_3(s)-4X_2(s);\\ sX_3(s)&=5U(s)-2X_2(s).\end{aligned} \tag{7.16}$$

Scanned with OKEN Scanner

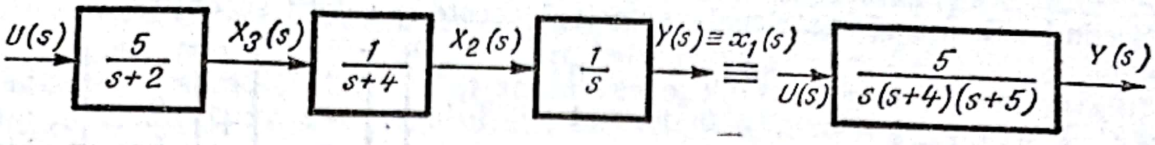


Fig. 7.8. Alegerea variabililor de stare pentru un sistem de ordinul trei.

Relaţiile (7.16) în domeniul timpului au forma:

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t);$$

$$\dot{x}_2(t)=x_3(t)-4x_2(t);$$

$$\dot{x}_3(t)=-2x_3(t)+5u(t)$$

sau

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\cdot\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\0\\5\end{bmatrix}\cdot u(t)$$

şi

$$y(t)=[1 \quad 0 \quad 0]\cdot\mathbf{x}(t).$$

Variabilele de stare pot reprezenta pentru un proces chiar variabile fizice. Pentru a exemplifica acest lucru considerăm motorul electric de curent continuu cu excitaţie independentă, a cărui funcţionare (v. cap. 2) este descrisă prin ecuaţiile:

$$u_a-e=R_a i_a+L_a\frac{di_a}{dt};$$

$$e=K_e\Omega;$$

$$K_m i_a=J\frac{d\Omega}{dt}.$$

Alegînd pentru acest proces variabilele de stare, variabilele fizice de interes: $\theta=x_1$, $\dot{\theta}=x_2$ şi $x_3=i_a$, se obţine următoarea reprezentare matriceal-vectorială:

$$x_1=x_2;$$

$$\dot{x}_2=\frac{K_m}{J}\cdot x_3;$$

$$\dot{x}_3=-\frac{K_e}{L_a}x_2-\frac{R_a}{L_a}x_3+\frac{1}{L_a}u_a,$$

sau

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{K_m}{J}\\ 0 & -\frac{K_e}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a}\end{bmatrix}\cdot\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\0\\\frac{1}{L_a}\end{bmatrix}\cdot u_a.$$

Scanned with OKEN Scanner

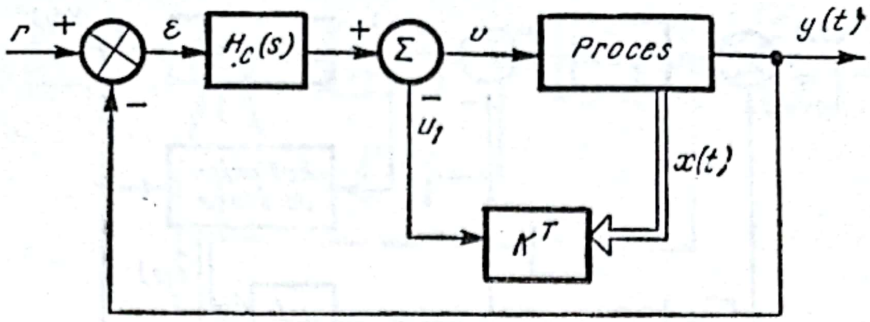


Fig. 7.9. Schema generală a unui sistem cu reacție după stare.

Cunoașterea stării unui proces tehnologic și măsurarea variabilelor de stare reprezintă o informație deosebit de utilă pentru determinarea algoritmului de conducere a procesului. Utilizarea unor reacții după variabilele de stare poate conduce la obținerea unor performanțe tranzitorii superioare, fiind posibilă astfel realizarea unor structuri de sisteme unde variabilele de stare, fiind măsurabile, pot fi utilizate în cadrul unor reacții pentru asigurarea performanțelor tranzitorii dorite (stabilitate și viteză de răspuns).

O structură de sistem cu reacție după stare este prezentată în figura 7.9. În acest caz, reacția după stare, definită prin relația $u_1=\mathbf{K}^T\mathbf{x}(t)=$ $=K_1x_1+K_2x_2+\ldots+K_nx_n=\sum_1^n K_ix_i$, asigură performanțele tranzitorii dorite ale sistemului iar prin intermediul blocului caracterizat prin funcția $H_c(s)$ se asigură o comportare dorită în regim staționar.

Prezența unui pol în origine în funcția de transfer $H_c(s)$ asigură eroare nulă în regim staționar pentru o variație în treaptă a mărimii de intrare $r(t)$. Pentru un proces care conține în funcția de transfer un pol în origine se poate alege $H_c(s)=K_c$, iar comanda $u(t)$ se obține sub forma

$$u(t)=K_c\varepsilon(t)-\sum_1^n K_ix_i(t) \tag{7.17}$$

sau în cazul în care $H_c(s)=K_i\int_0^t \varepsilon dt$, legea de comandă a procesului este dată de relația

$$u(t)=K_i\int_0^t \varepsilon dt-\sum_1^n K_ix_i(t). \tag{7.18}$$

Un asemenea algoritm de reglare asigură o comportare bună atît în regim staționar cît și în regim dinamic, prin alegerea corespunzătoare a componentelor K_i din matricea $\mathbf{K}^T$.

Dacă în ecuația de stare a procesului se înlocuiește comanda $u(t)$ dată prin relația (7.17), se obține

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{b}(K_c\varepsilon(t)-\mathbf{K}^T\mathbf{x}(t))$$

Scanned with OKEN Scanner

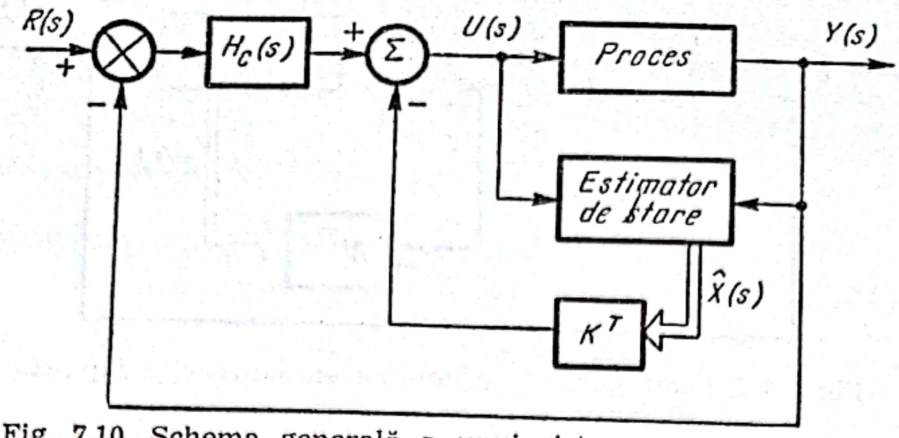


Fig. 7.10. Schema generală a unui sistem cu reacție după stare și estimator de stare.

sau

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=[\mathbf{A}-\mathbf{b}\mathbf{K}^T]\,\mathbf{x}(t)+\mathbf{b}K_c\varepsilon(t)=\mathbf{A}_k\mathbf{x}(t)-\mathbf{b}\,K_c\varepsilon(t). \tag{7.19}$$

Matricea de tranziție sau matricea fundamentală a sistemului $\Phi(s)$ în acest caz este dată de relația

$$\Phi_k(s)=[s\mathbf{I}-\mathbf{A}_k]^{-1}=[s\mathbf{I}-\mathbf{A}+\mathbf{b}\mathbf{K}^T]^{-1},$$

relație care evidențiază faptul că printr-o alegere corespunzătoare a matricei $\mathbf{K}^T=[K_1, K_2, K_3 \ldots, K_n]$ se asigură un regim dinamic dorit pentru sistem, o anumită evoluție a stării.

În cazul în care variabilele de stare nu sînt accesibile măsurării se poate utiliza pentru reacție un set de variabile de stare estimate $\hat{\mathbf{x}}(t)$, construind în acest caz un estimator de stare care pe baza informațiilor de la intrarea și ieșirea procesului generează starea estimată (fig. 7.10).

Răspunsul tranzitoriu dorit al sistemului se asigură și în acest caz prin alegerea corespunzătoare a matricei $\mathbf{K}^T$.

Exemplul 7.1

Pentru a exemplifica modul de utilizare a reacției după stare, considerăm procesul caracterizat prin funcția de transfer dată în figura 7.8. Structura sistemului prevăzut cu reacție după stare este dată în figura 7.11.

Pentru sistemul prezentat în figura 7.11, dacă se calculează funcția de transfer $H_0(s)$, se obține

$$H_0(s)=\frac{5K_c}{s^3+(6+5K_3)s^2+(5K_2+20K_3+8)s+5K_1+5K_c}.$$

Pentru acest sistem rezultă că asigurarea unui anumit regim tranzitoriu, anumite performanțe tranzistorii, implică alegerea corespunzătoare a componentelor K_1, K_2 și K_3, întrucît ecuația caracteristică a sistemului conține aceste componente.

Pentru a obține eroare în regim staționar $\varepsilon_{st}=0$, rezultă că valoarea lui $K_1=0$ întrucît $H_0(0)=\frac{5K_c}{5K_1+5K_c}$, iar valoarea $H_0(0)=1$ se obține numai dacă $K_1=0$.

Scanned with OKEN Scanner

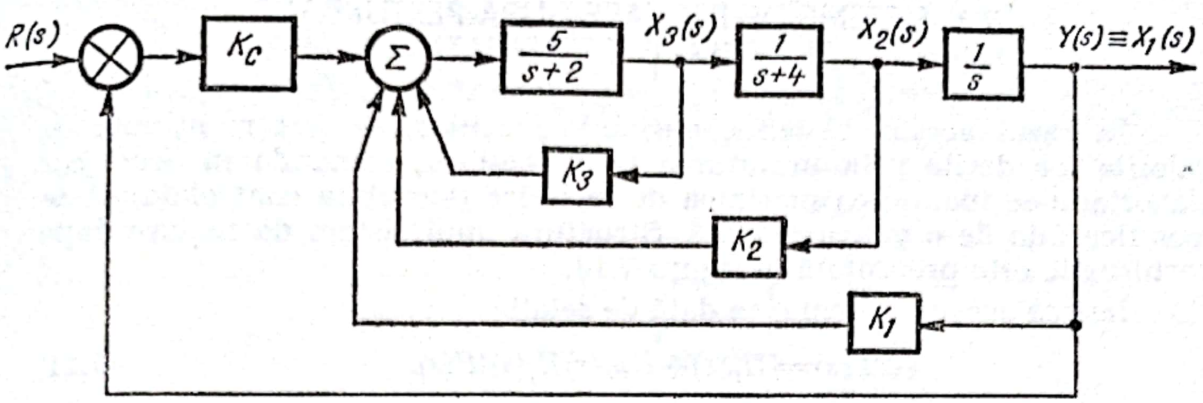


Fig. 7.11. Schema sistemului cu reacție după stare considerat în exemplul 7.1.

Pornind de la posibilitatea de a utiliza anumite variabile de stare în reacție pentru a genera comanda atît în funcție de eroarea $\varepsilon(t)$ cît și în funcție de stare, pot fi realizate structuri de sisteme de reglare automată la care regulatorul nu mai este plasat pe calea directă, ci anumite componente ale algoritmului sînt plasate pe calea de reacție.

În figura 7.12, pentru un proces dat, componentele derivativă și proporțională ale regulatorului au la intrare numai ieșirea procesului, iar componenta integrală este plasată pe calea directă.

În acest caz comanda $u(t)$ este dată de relația

$$u(t)=K_i\int_0^t [r(t)-y(t)]\,dt-K_R y(t)-K_d\frac{dy}{dt}. \qquad (7.20)$$

Utilizarea unui asemenea algoritm permite obținerea unei erori staționare egală cu zero pentru variația intrării în treaptă și o comportare dorită în regim tranzitoriu prin alegerea convenabilă a parametrilor de acord K_R și K_d. Eliminarea de pe calea directă a componentelor P și D asigură o comportare bună a procesului la variații bruște ale mărimii de intrare.

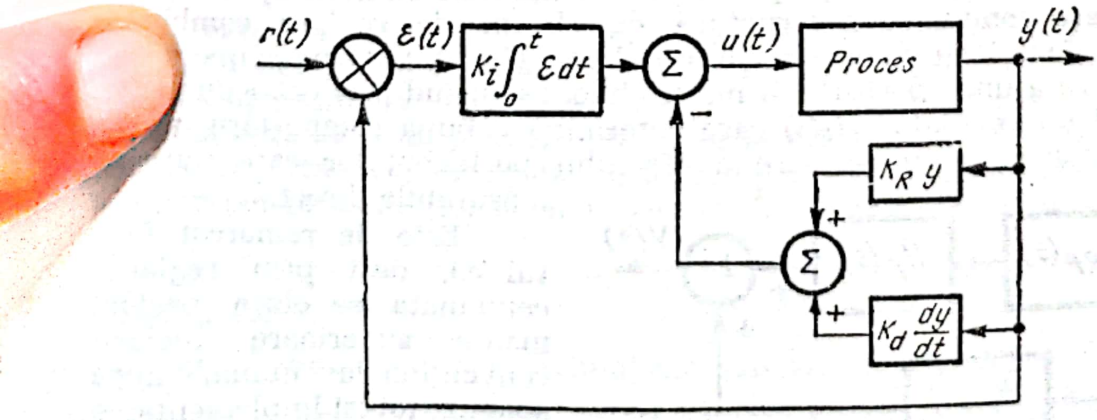


Fig. 7.12. Schema unui sistem automat pentru care componenta derivativă și proporțională sînt plasate pe calea de reacție.

Scanned with OKEN Scanner

7.3. SISTEME DE REGLARE DUPĂ PERTURBAȚIE ȘI REGLARE COMBINATĂ

În cazul acestor sisteme, variabilele controlate sînt menținute la valorile lor dorite prin măsurarea perturbațiilor, comanda în acest caz elaborîndu-se înainte ca mărimea de la ieșire (variabila controlată) să se modifice față de o valoare dorită. Structura unui sistem de reglare după perturbație este prezentată în figura 7.13.

Ieșirea acestui sistem este dată de relația

$$Y(s)=[H_p(s)+H_{RP}(s)H_f(s)]P(s). \tag{7.21}$$

Comportarea ideală a sistemului la perturbații se obține alegînd în mod corespunzător regulatorul

$$H_{RP}(s)=-\frac{H_p(s)}{H_f(s)}. \tag{7.22}$$

Relația (7.22) evidențiază faptul că pentru determinarea precisă a algoritmului de reglare după perturbație trebuie cunoscut cu precizie modelul procesului $H_f(s)$ precum și funcția de transfer $H_p(s)$ care stabilește corespondența între ieșire și perturbație. Schema presupune, de asemenea, ca mărimea perturbatoare să fie accesibilă măsurării.

De remarcat faptul că în cazul în care $H_f(s)$ are un exces de poli mai mare decît excesul de poli ai funcției $H_p(s)$, algoritmul de reglare $H_{RP}(s)$ nu este realizabil fizic, impunîndu-se folosirea unui algoritm aproximativ, însă realizabil. De asemenea, dat fiind că asupra procesului pot interveni și alte perturbații care nu pot fi măsurate direct, precizia sistemului de reglare după perturbație este redusă.

Spre deosebire de structura convențională de reglare după abatere, reglarea după perturbație prezintă avantajul că acțiunea de compensare a efectului perturbației se elaborează înainte de apariția unei abateri între valoarea dorită a mărimii de ieșire și valoarea reală a acesteia, evitîndu-se întîrzierea introdusă în întreaga buclă de reglare în transmiterea semnalelor de comandă.

Avantajele reglării după perturbație combinate cu avantajele reglării după abatere conduc la o structură de sistem de reglare combinată (fig. 7.14). Astfel se folosește un regulator $H_{RP}(s)$ pentru compensarea aproximativă a unor perturbații măsurabile, asigurînd o viteză ridicată de răspuns, și un regulator $H_R(s)$ care determină o bună comportare în regim staționar și o compensare a efectului perturbațiilor care nu sînt măsurabile direct.

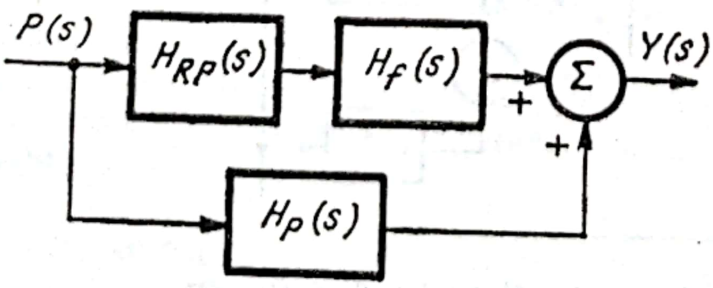


Fig. 7.13. Schema unui sistem de reglare după perturbație.

Este de remarcat faptul că, deși prin reglarea combinată se obțin performanțe superioare reglării convenționale numai după abatere, totuși implementarea unui asemenea sistem de reglare este mai dificilă și mai costisitoare.

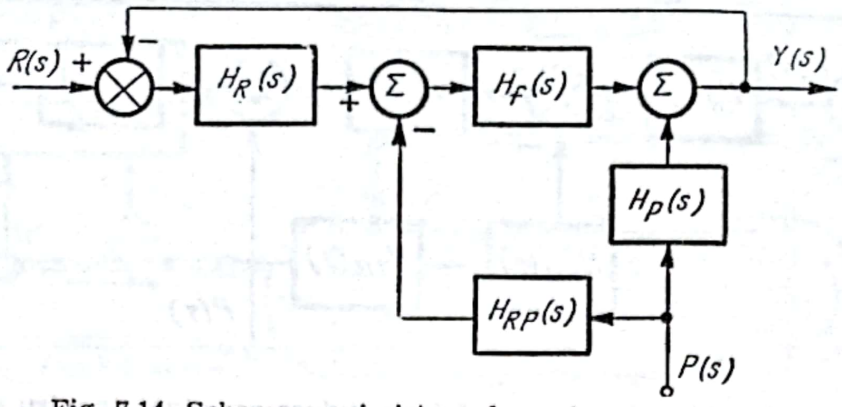


Fig. 7.14. Schema unui sistem de reglare combinată.

Funcţiile de transfer ale regulatoarelor $H_{RP}(s)$ şi $H_R(s)$ se pot determina pornind de la performanţele impuse sistemului. Astfel, admiţînd că sistemul este liniar, prin aplicarea principiului superpoziţiei se obţine mărimea de la ieşire sub forma

$$Y(s)=\frac{H_R(s)\,H_f(s)}{1+H_R(s)\,H_f(s)}R(s)+\frac{H_p(s)}{1+H_R(s)\,H_f(s)}P(s)-\frac{H_{RP}(s)\,H_f(s)}{1+H_R(s)\,H_f(s)}P(s) \quad (7.23)$$

sau

$$Y(s)=H_0(s)\cdot R(s)+H_{0p}(s)\cdot P(s). \quad (7.24)$$

Pentru o comportare optimă la perturbaţii se impune ca componenta ieşirii determinată de perturbaţia $P(s)$ să fie zero

$$Y_p(s)=H_{0p}(s)\cdot P(s)=0,$$

ceea ce implică

$$H_{0p}(s)=0. \quad (7.25)$$

Din relaţia (7.23) rezultă

$$H_{0p}(s)=\frac{H_p(s)-H_{RP}(s)\cdot H_f(s)}{1+H_R(s)\cdot H_f(s)}=0$$

şi

$$H_{RP}(s)=\frac{H_p(s)}{H_f(s)}. \quad (7.26)$$

Considerentele legate de realizabilitatea algoritmului (7.26) şi precizia limitată în determinarea funcţiilor $H_f(s)$ şi $H_p(s)$ impun utilizarea unor algoritmi aproximativi de compensare a perturbaţiei. Pentru alegerea şi acordarea regulatorului principal $H_R(s)$ se ia în considerare faptul că perturbaţia importantă a procesului este compensată, impunîndu-se obţinerea unor performanţe dorite în raport cu intrarea şi o eroare staţionară nulă.

Exemplul 7.2

Considerăm un proces tehnologic descris prin $H_f(s)=\frac{0,5}{15s+1}$, iar elementul de execuţie este de tip P cu o constantă de timp $T_m=1,2$ s,

$$H_e(s)=\frac{2}{1,2\,s+1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

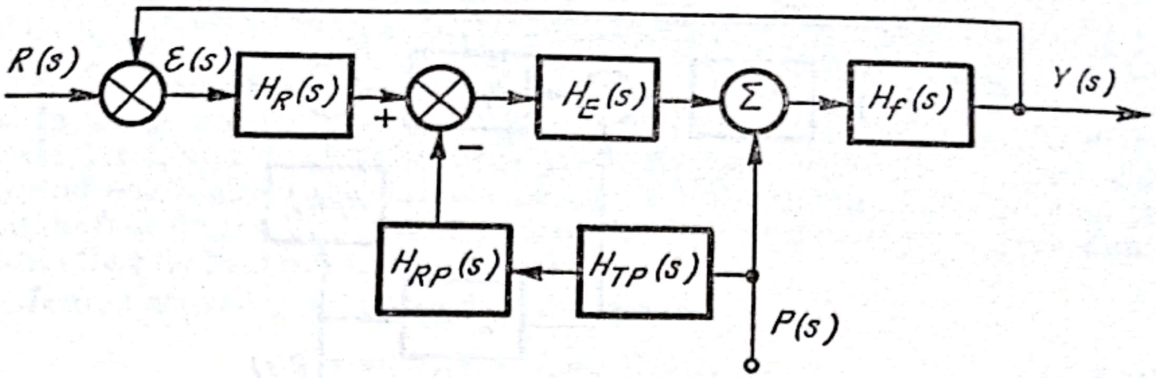


Fig. 7.15. Schema funcțională a sistemului de reglare combinată pentru exemplul 7.2.

Schema de reglare combinată a acestui proces este dată în figura 7.15. Perturbația se aplică asupra procesului direct, $H_p(s)=1$.

Regulatorul pentru compensarea perturbației $P(s)$ se determină din relația (7.26) sau dacă ținem seama de structura de sistem prezentată în figura 7.15, din relația

$$H_f(s)=H_f(s)\cdot H_E(s)\cdot H_{RP}(s)\cdot H_{TP}(s), \tag{7.27}$$

obținîndu-se

$$H_{RP}(s)=\frac{1}{H_E(s)\cdot H_{T_p}(s)}. \tag{7.28}$$

Dacă traductorul pentru măsurarea perturbației are funcția de transfer $H_{TP}(s)=0{,}5$ pentru $H_{RP}(s)$ rezultă expresia

$$H_{RP}(s)=1{,}2\,s+1, \tag{7.29}$$

deci un regulator de tip *PD*.

Exemplul 7.3

Un alt exemplu de sistem de reglare după perturbație este prezentat în figura 7.16.

Considerăm un schimbător de căldură (fig. 7.16) la care evidențiem posibilitatea reglării după perturbație și după abatere. Ecuația echilibrului termic în acest schimbător de căldură este

$$WC_p(T_e-T_i)=Q\Delta H, \tag{7.30}$$

unde: W este debitul de lichid introdus în schimbător;
Q — debitul de abur;
C_p — capacitatea termică a lichidului;
T_i, T_e — temperaturile la intrare și la ieșire din schimbător;
ΔH — căldura latentă a aburului.

Rezolvînd ecuația (7.30) în raport cu Q și înlocuind valoarea temperaturii T_e cu T_0, care reprezintă valoarea dorită a acesteia, se obține

$$Q=\frac{WC_p(T_e-T_i)}{\Delta H}. \tag{7.31}$$

Astfel, pentru a controla debitul de abur Q se măsoară debitul de lichid W și temperatura acestuia la intrare (fig. 7.16).

Scanned with OKEN Scanner

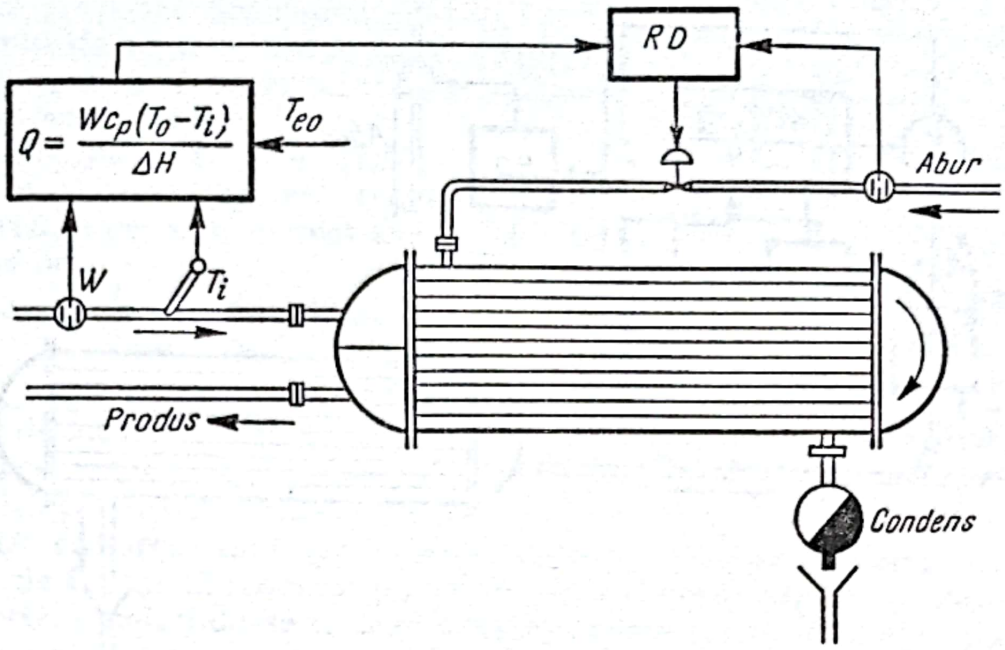


Fig. 7.16. Schema de reglare după perturbaţie pentru un schimbător de căldură.

Regulatorul în acest caz nu primeşte la intrare temperatura măsurată a lichidului încălzit ci numai valoarea dorită T_{e0} (prescrisă) a acestei temperaturi, debitul şi temperatura lichidului la intrare şi debitul de abur la intrare. Prin comanda debitului de abur se poate asigura valoarea dorită a temperaturii la ieşire T_e. Abaterea faţă de această temperatură impusă poate apărea din cauza pierderilor de căldură în mediul înconjurător sau din cauza cunoaşterii aproximative a lui C_p şi ΔH.

Utilizarea unui circuit de reacţie principală de la ieşirea procesului (temperatura lichidului încălzit) permite compensarea acestor perturbaţii suplimentare care apar în cadrul schimbătorului de căldură.

Pot fi utilizate mai multe căi pentru implementarea acestui circuit de reacţie, care să compenseze celelalte mărimi perturbatoare ce intervin în proces. O posibilitate este cea reprezentată în figura 7.17.

În acest caz, la debitul Q determinat de mărimile T_i şi W care sînt perturbaţii introduse de lichidul ce trebuie încălzit se adaugă un parametru K_Q, care este determinat direct de temperatura de ieşire T_e a lichidului

$$Q=\frac{W\cdot C_p(T_e-T_i)}{\Delta H}+K_Q. \tag{7.32}$$

Regulatorul ce comandă elementul de execuţie în acest caz primeşte la intrare o mărime, care este determinată atît de perturbaţiile măsurate W şi T_i cît şi de temperatura T_e, care este influenţată de celelalte perturbaţii ce intervin în proces (fig. 7.18).

Schema prezentată în figura 7.17 evidenţiază modul cum are loc o compensare staţionară a perturbaţiilor ce intervin în sistem. Problema acordării regulatorului de perturbaţie se reduce în acest caz la modificarea factorului de amplificare, în sensul reducerii abaterii staţionare.

Pentru a se asigura şi un răspuns tranzitoriu dorit se impune cunoaşterea funcţiei de transfer a procesului în raport cu debitul de abur

Scanned with OKEN Scanner

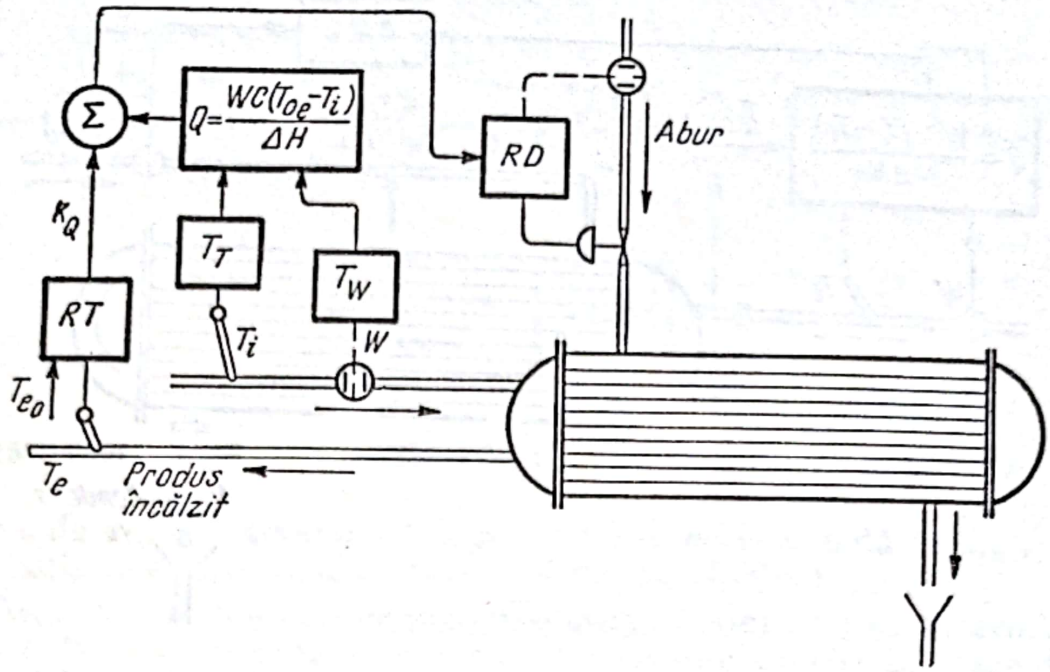


Fig. 7.17. Schema de reglare combinată cu controlul temperaturii fluidului la ieşirea din schimbător.

şi debitul de lichid. Cunoscînd aceste funcţii de transfer se poate determina algoritmul de reglare H_{RP} şi respectiv $H_R(s)$ ţinînd seama de relaţiile (7.23) şi (7.28).

Dacă cele două funcţii de transfer (fig. 7.19) în raport cu perturbaţia W (debitul de lichid) şi debitul de abur Q_{ab} sînt definite prin relaţiile aproximative:

$$H_1(s)=\frac{T_e(s)}{Q_{ab}(s)}=\frac{K_1}{\tau_1 s+1}; \tag{7.33}$$

$$H_2(s)=\frac{T_e(s)}{W(s)}=\frac{K_2}{\tau_2 s+1}, \tag{7.34}$$

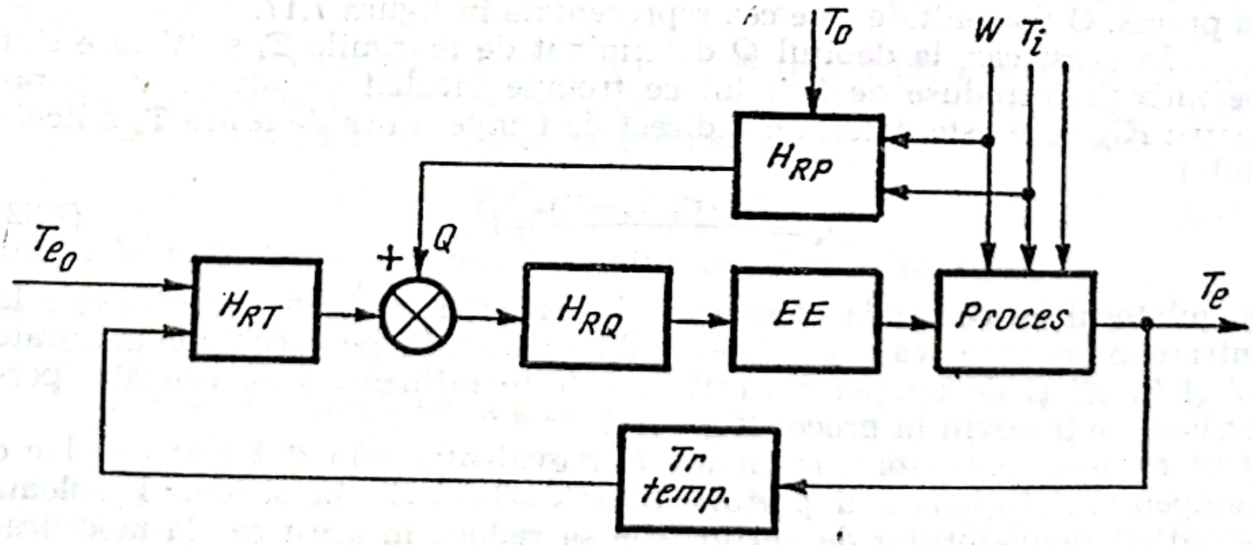


Fig. 7.18. Schema funcţională a sistemului de reglare combinată a unui schimbător de căldură:
H_{RT} — regulator de temperatură; H_{RQ} — regulator de debit; H_{RP} — regulator pentru perturbaţie.

Scanned with OKEN Scanner

atunci se poate determina algoritmul de reglare ținînd seama de τ_1 și τ_2 și de performanțele impuse sistemului.

Pe baza relației (7.26), algoritmul de reglare după perturbație cel mai indicat este descris prin

$$H_{RP}(s)=\frac{H_p(s)}{H_f(s)}=\frac{K_2}{K_1}\cdot\frac{\tau_1 s+1}{\tau_2 s+1}.$$

Astfel, pentru utilizarea unui circuit de corecție integro-diferențial se asigură compensarea efectului perturbației măsurate.

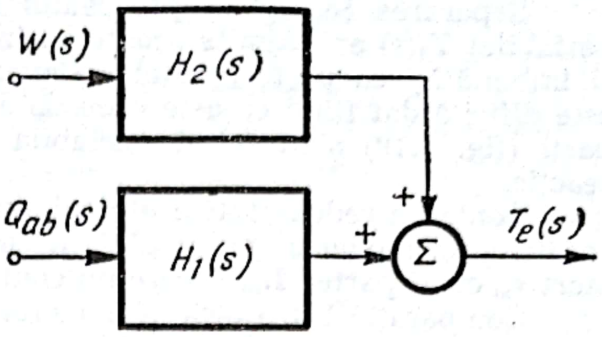


Fig. 7.19. Schema funcțională a procesului perturbat de debitul de apă W.

De remarcat faptul că această compensare este aproximativă ținînd seama de faptul că modelul procesului este determinat cu un anumit grad de precizie, neluîndu-se în considerație neliniaritățile și timpul mort care pot apărea în funcționarea procesului. Utilizarea reglării după perturbație este recomandată în cazul proceselor la care anumite perturbații au o influență foarte mare asupra acestora. Pentru eliminarea abaterilor mărimii de ieșire a procesului determinate de celelalte perturbații (accesibile și inaccesibile măsurării) se recomandă reglarea după abatere, obținînd astfel un sistem de reglare combinat.

7.4. SISTEME CU COMPENSAREA TIMPULUI MORT

Particularitățile sistemelor cu timp mort determinate de întîrzierea introdusă în transmiterea semnalului de reacție și implicit în elaborarea comenzii au determinat elaborarea unor metode de compensare a efectului timpului mort asupra performanțelor sistemelor.

Presupunînd că procesul tehnologic inclusiv elementul de execuție și traductorul este cu timp mort iar funcția de transfer a acestuia este de forma

$$H_f(s)=H(s)e^{-\tau s}, \tag{7.35}$$

se poate alcătui schema sistemului de reglare automată ca în figura 7.20.

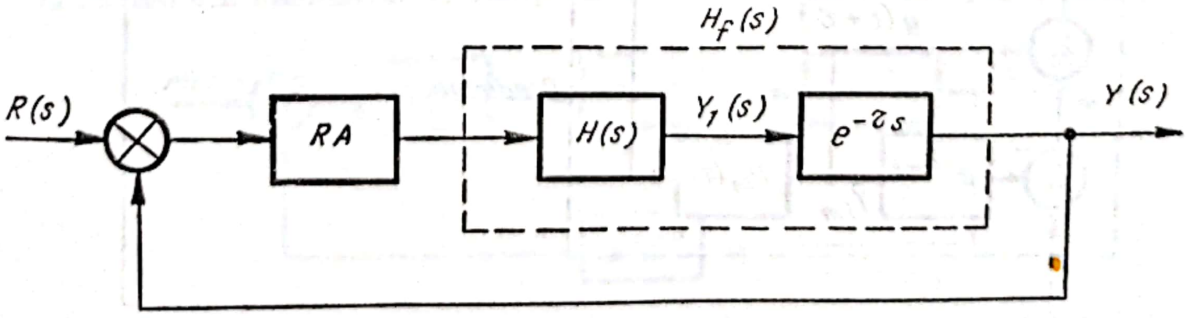


Fig. 7.20. Schema funcțională a unui sistem cu timp mort.

Scanned with OKEN Scanner

Separarea în cadrul procesului a timpului mort și accesibilitatea variabilei $Y_1(s)$ ar permite scoaterea în afara buclei de reglare a acestuia și îmbunătățirea performanțelor sistemului. Realizarea acestui deziderat este dificilă dat fiind că este greu de a descompune procesul în cele două părți (fig. 7.19) și a folosi variabila intermediară $Y_1(s)$ ca mărime de reacție.

Pentru a reduce totuși efectul timpului mort, presupunem că putem construi un model al procesului în cadrul căruia evidențiem atît timpul mort τ_m cît și partea $H_m(s)$ care nu conține timp mort.

Comparația între ieșirea modelului și sistemului considerat conduce la apariția unui semnal a cărui eroare depinde nu numai de valoarea curentă a ieșirii procesului presupus fără timp mort ci și de gradul de precizie al modelului.

Dat fiind că $Y_{1m}(s)$ (mărimea intermediară din model) se poate măsura și folosi ca semnal de reacție, se poate întocmi o schemă de reglare cu compensarea timpului mort (fig. 7.21) cunoscută sub denumirea de *schemă de reglare cu predictor* [6].

Funcția de transfer a predictorului în acest caz este

$$H_{pr}(s)=H_m(s)\cdot[1-e^{-\tau_m(s)}], \tag{7.36}$$

iar mărimea aplicată la intrarea regulatorului pe cale de reacție este

$$y_r(t)=y(t+\tau)-y(t)+y(t)=y(t+\tau). \tag{7.37}$$

Dacă $H_m(s)=H(s)$ și $\tau_m=\tau$ rezultă că elementele proces și predictor care sînt cuplate în paralel au funcția de transfer

$$H_1(s)=H(s)e^{-\tau s}+H(s)\,[1-e^{-\tau s}]=H(s), \tag{7.38}$$

fiind echivalentă cu funcția de transfer a procesului fără timp mort.

Mărimea de reacție $y_r(t)$ transmisă elementului de comparație al buclei de reglare este astfel devansată cu un timp — *deci cu predicție* — față de ieșirea $y(t)$ a instalației tehnologice. Deși mărimea y_{1m} devan-

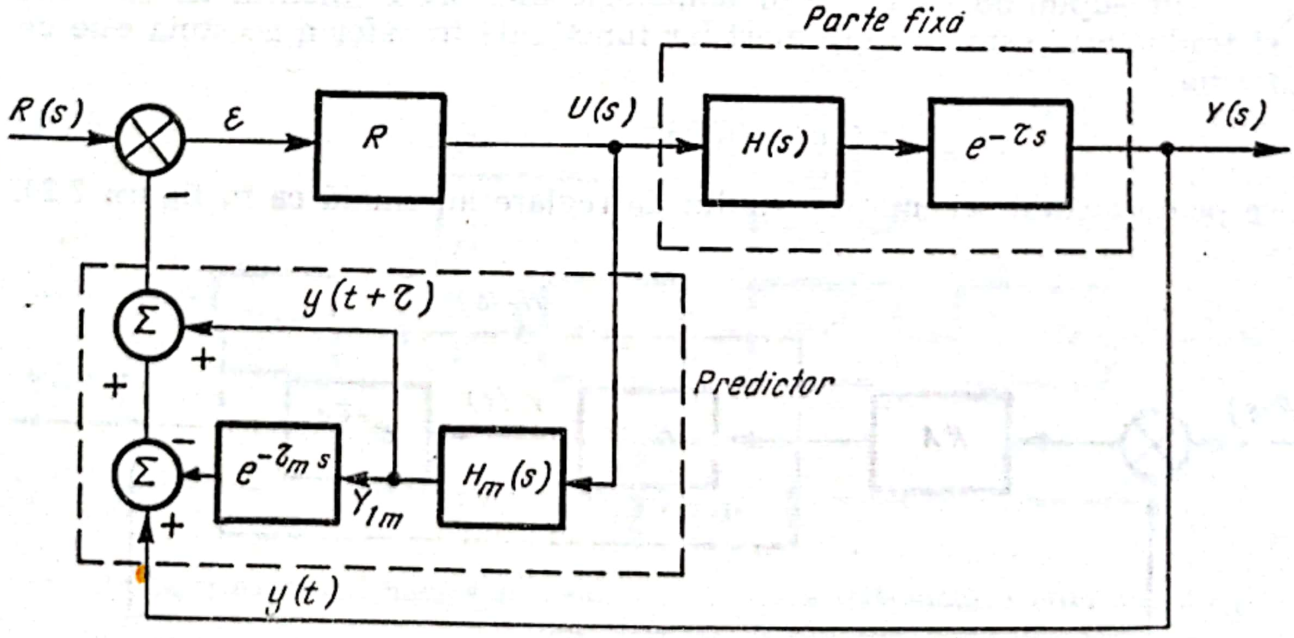


Fig. 7.21. Schema de reglare cu compensarea timpului mort.

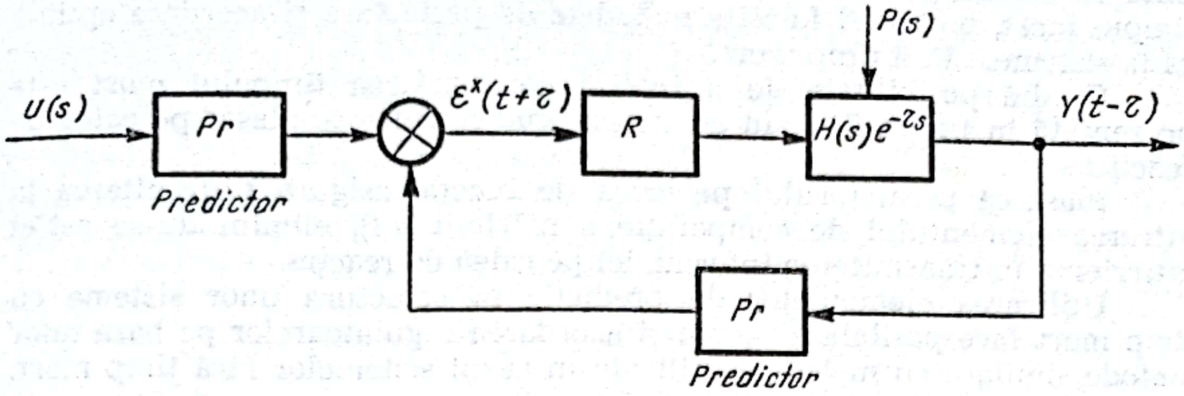


Fig. 7.22. Schema generală a unui sistem cu predicție.

sează cu timpul $\tau_m=\tau$ mărimea y, întrucît acest lucru nu se întîmplă decît dacă procesul nu este perturbat, a fost necesară introducerea unei reacții după y.

Efectele introducerii blocului de predicție descris de relația (7.36) asupra proiectării sistemului sînt deosebit de importante, dat fiind că în acest caz se compensează efectul timpului mort, la elementul de comparație transmițîndu-se un semnal care ar fi rezultat la ieșirea sistemului dacă în instalația tehnologică n-ar fi existat timpul mort τ. Proiectarea se poate face astfel făcînd abstracție de prezența timpului mort și considerînd pentru partea fixată numai funcția de transfer $H(s)$.

Altă variantă a predicției pentru compensarea timpului mort constă în introducerea unui element care realizează cu aproximație, o funcție de transfer de forma

$$H_{pr}(s)=e^{\tau s}, \tag{7.39}$$

corespunzătoare unei operații de anticipare pură, respectiv de predicție.

Pentru realizarea unui asemenea element de predicție se poate utiliza cu bune rezultate aproximația printr-o serie a exponențialei (7.39)

$$H_{pr}(s)\simeq a_0+\sum_{K=1}^{n} a_k\frac{\tau s}{K!}. \tag{7.40}$$

Schema generală a sistemului cu predicție în acest caz are aspectul din figura 7.22.

Datorită celor două predictoare descrise cu ajutorul funcției (7.39), la ieșirea din elementul de comparație se obține eroarea $\varepsilon^*(t+\tau)$ care per-

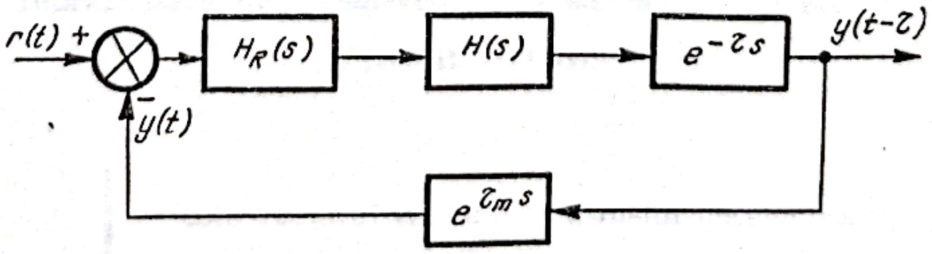


Fig. 7.23. Schema unui sistem cu predictorul plasat pe calea de reacție.

mite ca sistemul să se comporte ca și cum în partea fixă nu ar exista timpul mort, putînd fi folosite metodele de proiectare și acordare optimă ca la sistemele fără timp mort.

O altă posibilitate de a realiza compensarea timpului mort este prezentată în figura 7.23. În acest caz predictorul este plasat pe calea de reacție.

Plasarea predictorului pe calea de reacție asigură transmiterea la intrarea elementului de comparație a mărimii $y(t)$, eliminîndu-se astfel întîrzierea în transmiterea informației pe calea de reacție.

Utilizarea elementelor de predicție în structura unor sisteme cu timp mort face posibilă alegerea și acordarea regulatoarelor pe baza unor metode similare cu metodele utilizate în cazul sistemelor fără timp mort.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 8

SISTEME MULTIVARIABILE

8.1. REPREZENTAREA MATEMATICĂ A SISTEMELOR

În practică se întîlnesc procese tehnologice caracterizate prin mai multe mărimi de intrare şi mai multe mărimi de ieşire. Asemenea procese ca cele din laminoare, maşini-unelte, turboreactoare fermentatoare etc., sînt denumite *procese multivariabile* sau *sisteme multivariabile*. Mărimile de la intrare influenţează toate mărimile de ieşire (fig. 8.1).

Admiţînd că procesul este liniar şi scriind cîte o funcţie de transfer pentru fiecare canal de legătură între intrare şi ieşire, în baza principiului suprapunerii efectelor se obţine următorul sistem de ecuaţii:

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= H_{11}(s)\cdot U_1(s)+H_{12}(s)\cdot U_2(s)+\ldots+H_{1m}(s)\cdot U_m(s);\\ Y_2(s) &= H_{21}(s)\cdot U_1(s)+H_{22}(s)\cdot U_2(s)+\ldots+H_{2m}(s)\cdot U_m(s);\\ &\vdots\\ Y_n(s) &= H_{n1}(s)\cdot U_1(s)+H_{n2}(s)\cdot U_2(s)+\ldots+H_{nm}(s)\cdot U_m(s), \end{aligned} \tag{8.1}$$

unde $H_{ij}(s)=\dfrac{Y_i(s)}{U_j(s)}$ reprezintă funcţia de transfer a canalului de legătură între valorile $Y_i(s)$ şi $U_j(s)$.

În reprezentare matriceal-vectorială sistemul (8.1) are forma

$$\mathbf{Y}(s)=\mathbf{H}(s)\cdot\mathbf{U}(s),$$

unde:

$\mathbf{Y}(s)=\begin{bmatrix} Y_1\\ Y_2\\ \vdots\\ Y_n \end{bmatrix}$ — este vectorul coloană al transformatelor celor n ieşiri;

Scanned with OKEN Scanner

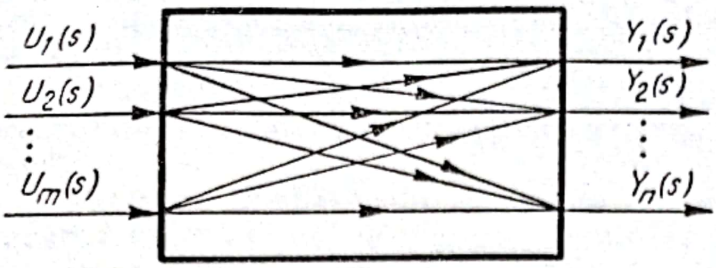


Fig. 8.1. Modelul general al unui proces multivariabil.

$$\mathbf{U}(s)=\begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{bmatrix}$$ — vectorul coloană al celor m intrări;

$$\mathbf{H}(s)=\begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) \dots H_{1m}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \dots H_{2m}(s) \\ \vdots & \\ H_{n1}(s) & H_{n2}(s) \dots H_{nm}(s) \end{bmatrix}$$ — matricea de transfer a sistemului de dimensiuni $n \times m$.

Un exemplu de proces avînd două intrări și două ieșiri este reprezentat în figura 8.2, *a*, *b*. În acest rezervor mărimile ce se impun reglate (ieșirile) sînt presiunea p și nivelul h, iar mărimile de intrare în proces sînt debitul de gaz Q_2 ce se introduce și debitul de lichid Q_1 ce se evacuează. Dacă nivelul crește se comprimă gazul în rezervor și apare o perturbație de presiune în sistem. Dacă se modifică presiunea în rezervor se modifică debitul de lichid, care reprezintă o perturbație de sarcină pentru sistemul de reglare a nivelului.

Dacă se notează $H_{11}(s)=\frac{P(s)}{Q_1(s)}$, $H_{22}(s)=\frac{H(s)}{Q_2(s)}$ și $H_{12}(s)=\frac{H(s)}{Q_1(s)}$, $H_{21}(s)=\frac{P(s)}{Q_2(s)}$ rezultă următorul model matematic al acestui sistem cu două intrări și două ieșiri:

$$\begin{aligned} Y_1(s)&=H_{11}(s)\cdot U_1(s)+H_{12}(s)\cdot U_2(s); \\ Y_2(s)&=H_{21}(s)\cdot U_1(s)+H_{22}(s)\cdot U_2(s), \end{aligned} \tag{8.2}$$

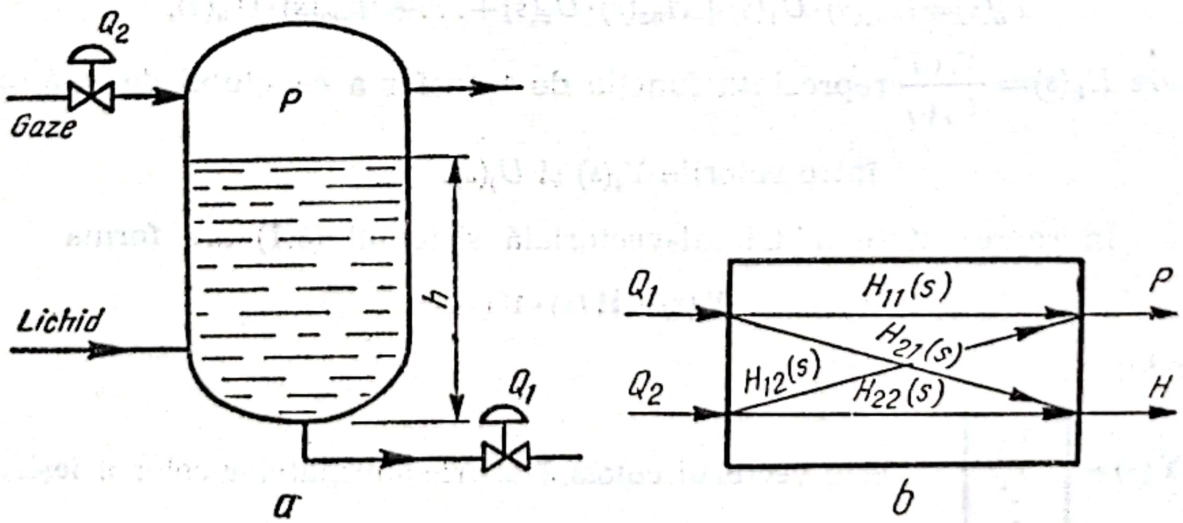


Fig. 8.2. Proces cu două intrări și două ieșiri:
a — schema procesului; *b* — schemă echivalentă.

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}. \tag{8.3}$$

Matricea de transfer în acest caz este o matrice pătrată, alcătuită din funcţiile de transfer corespunzătoare fiecărui canal de legătură între mărimile de intrare şi de ieşire.

Schema funcţională a procesului în care includem şi elementele de execuţie şi traductoarele pentru cazul în care numărul intrărilor şi ieşirilor este egal cu doi este prezentat în figura 8.3.

În cazul în care interacţiunile între intrări şi ieşiri sînt nule sau neglijabile ($H_{12}(s)=0$, $H_{21}(s)=0$) luîndu-se în consideraţie numai legăturile directe între intrări şi ieşiri spunem că procesul este decuplat iar modelul matematic al procesului are forma:

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= H_{11}(s) \cdot U_1(s); \\ Y_2(s) &= H_{22}(s) \cdot U_2(s) \end{aligned} \tag{8.4}$$

sau

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & 0 \\ 0 & H_{22}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}. \tag{8.5}$$

Matricea de transfer în acest caz este o matrice diagonală, conţinînd pe diagonală funcţiile de transfer corespunzătoare legăturilor directe între intrări şi ieşiri.

Pentru reglarea unui proces multivariabil se impune utilizarea unui regulator multivariabil care să genereze comenzi corespunzătoare pentru toate intrările procesului şi evident elemente de execuţie şi traductoare pentru fiecare parametru reglat. În figura 8.4 se prezintă schema funcţională a unui sistem de reglare multivariabil. Pentru obţinerea mai multor mărimi de comandă pentru reglarea procesului multivariabil este necesar ca şi regulatorul să fie multivariabil. Pentru a obţine algoritmul de comandă în funcţie de eroare este necesară prescrierea mai multor mărimi de referinţă, care se compară cu mărimile de la ieşire transmise pe calea de reacţie la intrarea regulatorului.

Pentru cazul în care partea fixată a sistemului are două intrări şi două ieşiri, schema funcţională a sistemului de reglare automată este prezentată în figura 8.5. În această schemă, pentru fiecare canal de legătură între intrări şi ieşiri este prevăzut cîte un regulator.

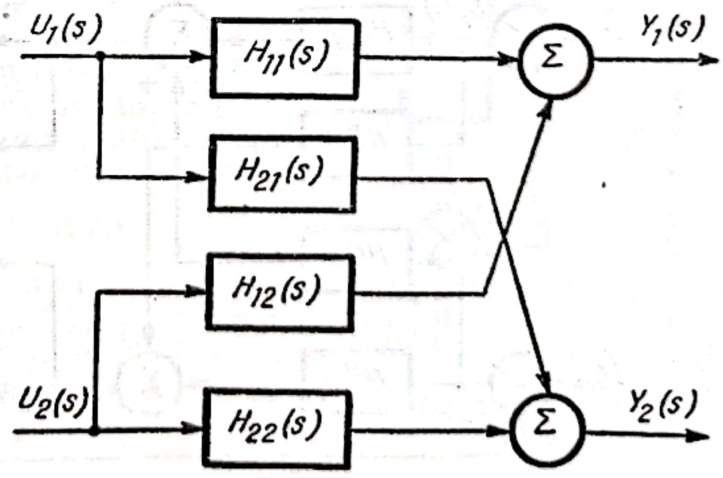


Fig. 8.3. Schema funcţională a procesului cu două intrări şi două ieşiri.

Scanned with OKEN Scanner

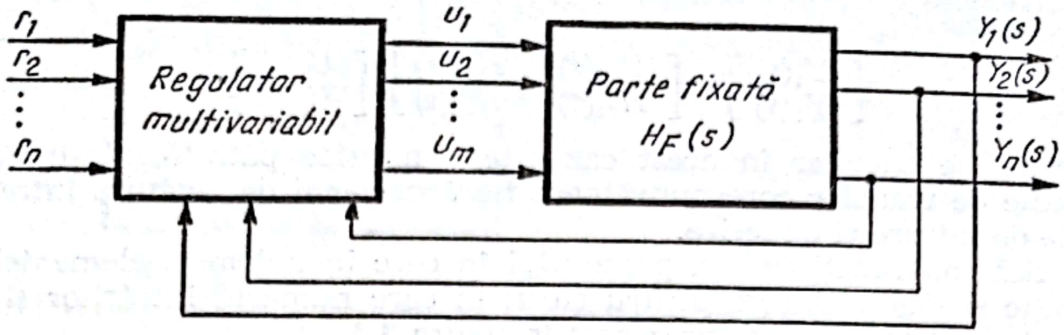


Fig. 8.4. Schema funcțională a unui sistem de reglare multivariabil.

Regulatoarele avînd funcțiile de transfer $H_{R21}(s)$ și $H_{R12}(s)$ sînt incluse în structura regulatorului multivariabil cu scopul de a compensa interinfluențele existente în cadrul părții fixate a sistemului. În funcție de intensitatea interacțiunilor existente în partea fixată a sistemului se adoptă o structură de regulator multivariabil sau nu. Cunoașterea cît mai exactă a modelului matematic al părții fixate este deosebit de importantă la alegerea structurii regulatorului multivariabil.

Identificarea modelului staționar și dinamic al unor sisteme multivariabile cu evidențierea modelelor matematice pe fiecare canal de legătură între intrările și ieșirile procesului este absolut necesară pentru determinarea algoritmului de reglare multivariabil.

Dacă fiecare mărime reglată este influențată numai de mărimea de referință a canalului respectiv, fiind cuplată reacția principală, spunem că sistemul multivariabil este decuplat. În acest caz regulatorul multivariabil este astfel proiectat încît să asigure compensarea completă a interacțiunilor din partea fixată. Pentru sistemele decuplate fiecare mărime reglată prezintă proprietăți de invarianță în raport cu mărimile de referință aferente celorlalte canale.

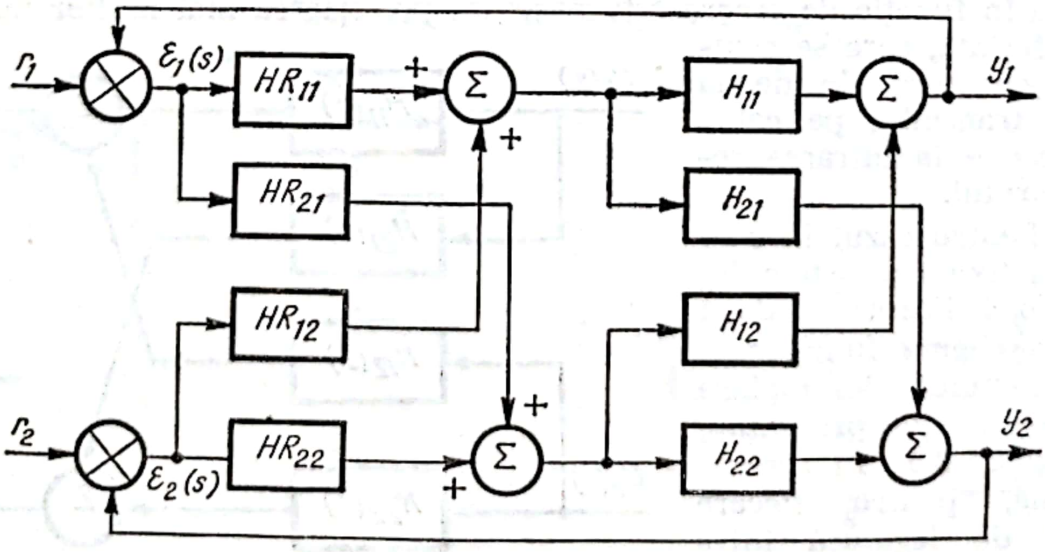


Fig. 8.5. Schema funcțională a unui SRA multivariabil pentru un proces cu două intrări și două ieșiri.

Scanned with OKEN Scanner

Printre diferitele categorii de decuplări sînt importante decuplările în raport cu semnalele de intrare și decuplările în raport cu perturbațiile. Determinarea algoritmului de reglare care să asigure decuplarea atît în raport cu intrările cît și în raport cu perturbațiile este dificilă, fiind utilizată de regulă proiectarea algoritmului de reglare care asigură decuplarea în raport cu intrările.

Referitor la structura de sistem de reglare multivariabil prezentată în figura 8.6, *a* se poate determina matricea de transfer a căii directe și respectiv a întregului sistem

$$\mathbf{H}_d(s)=\mathbf{H}_R(s)\cdot\mathbf{H}_F(s). \qquad (8.6)$$

Ieșirea sistemului din figura 8.6, *b* poate fi calculată cu ajutorul relației

$$\mathbf{Y}(s)=\mathbf{H}_d(s)[\mathbf{R}(s)-\mathbf{Y}(s)]=\mathbf{H}_d(s)\cdot\mathbf{R}(s)-\mathbf{H}_d(s)\cdot\mathbf{Y}(s)$$

sau

$$[\mathbf{I}+\mathbf{H}_d(s)]\mathbf{Y}(s)=\mathbf{H}_d(s)\cdot\mathbf{R}(s). \qquad (8.7)$$

Dacă notăm prin $\mathbf{H}_0(s)$ matricea de transfer a sistemului care stabilește relația între intrările și ieșirile sistemului sub forma

$$\mathbf{Y}(s)=\mathbf{H}_0(s)\cdot\mathbf{R}(s), \qquad (8.8)$$

din comparația relațiilor (8.7) și (8.8) rezultă

$$\mathbf{H}_0(s)=[\mathbf{I}+\mathbf{H}_d(s)]^{-1}\cdot\mathbf{H}_d(s). \qquad (8.9)$$

Se poate arăta că matricele $[\mathbf{I}+\mathbf{H}_d(s)]^{-1}$ și $\mathbf{H}_d(s)$ sînt permutabile, adică relația (8.9) poate fi scrisă și sub forma

$$\mathbf{H}_0(s)=\mathbf{H}_d(s)[\mathbf{I}+\mathbf{H}_d(s)]^{-1}. \qquad (8.10)$$

Relația (8.10) este analoagă cu relația ce definește funcția de transfer a unui sistem monovariabil.

Din relația (8.10) se poate obține matricea de transfer a căii directe a sistemului

$$\mathbf{H}_d(s)=[\mathbf{I}-\mathbf{H}_0(s)]^{-1}\cdot\mathbf{H}_0(s). \qquad (8.11)$$

Pentru cazul în care regulatorul multivariabil este plasat pe calea de reacție (fig. 8.7) se obține matricea de transfer într-o manieră similară

$$\mathbf{Y}(s)=\mathbf{H}_F(s)[\mathbf{R}(s)-\mathbf{H}_R(s)\cdot\mathbf{Y}(s)] \qquad (8.12)$$

sau

$$[\mathbf{I}+\mathbf{H}_F\mathbf{H}_R(s)]\mathbf{Y}(s)=\mathbf{H}_F(s)\mathbf{R}(s);$$

$$\mathbf{Y}(s)=[\mathbf{I}+\mathbf{H}_F\mathbf{H}_R(s)]^{-1}\cdot\mathbf{H}_F(s)\cdot\mathbf{R}(s)=\mathbf{H}_0(s)\cdot\mathbf{R}(s). \qquad (8.13)$$

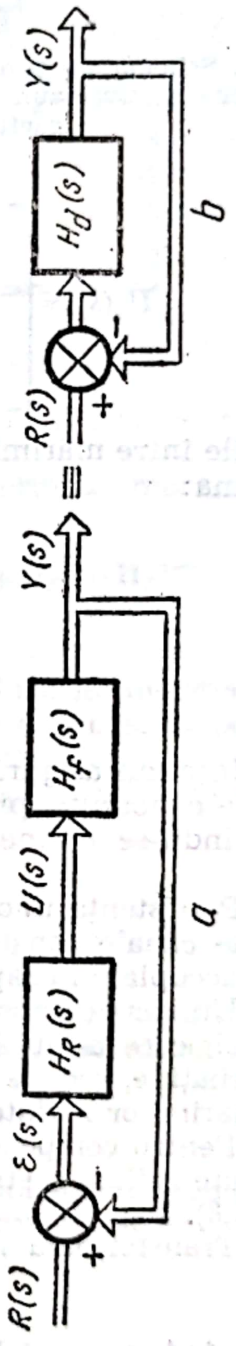


Fig. 8.6. Sistem de reglare multivariabil:
a — structura sistemului reglare cu regulatorul pe calea directă; *b* — structura simplificată a sistemului cu reacție unitară.

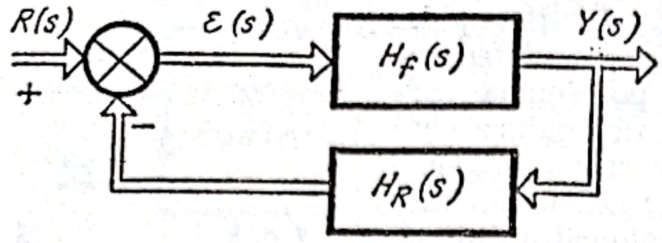


Fig. 8.7. Schema funcțională a unui SRA cu regulator multivariabil plaşat pe calea de reacție.

Din egalitatea (8.12) rezultă expresia matricei de transfer $\mathbf{H}_0(s)$

$$\mathbf{H}_0(s)=[\mathbf{I}+\mathbf{H}_F\cdot\mathbf{H}_R]^{-1}\cdot\mathbf{H}_F(s). \quad (8.14)$$

Decuplarea sistemului presupune în primul rînd ca matricea $\mathbf{H}_0(s)$ a sistemului să fie matrice pătrată, iar elementele matricei să fie egale cu zero în afară de elementele de pe diagonala principală

$$\mathbf{H}_0(s)=\begin{bmatrix} H_{011}(s) & 0 & 0 & 0\dots 0 \\ 0 & H_{022}(s) & 0 & 0\dots 0 \\ 0 & 0 & H_{033}(s) & 0\dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0\dots H_{0nn}(s) \end{bmatrix}. \quad (8.15)$$

Relațiile între mărimile de intrare şi mărimile de la ieşire în acest caz sînt de forma:

$$\begin{aligned} Y_1(s)&=H_{11}(s)\cdot R_1(s);\\ Y_2(s)&=H_{22}(s)\cdot R_2(s);\\ &\vdots\\ Y_n(s)&=H_{nn}(s)\cdot R_n(s). \end{aligned} \quad (8.16)$$

În cazul asigurării decuplării, proiectarea regulatoarelor se face prin metode cunoscute, prezentate în capitolul 6 pentru sisteme monovariabile, urmărindu-se obținerea performanțelor impuse pentru fiecare buclă în parte.

Persistența unor interacțiuni între perturbații şi mărimi reglate din diferite canale constituie principalul dezavantaj al sistemelor multivariabile decuplate în raport cu semnalele de intrare.

Utilizarea unor criterii de acordare optimă de tipul criteriului modulului, care asigură o comportare optimă a fiecărei bucle în raport cu perturbațiile, reduce sensibil efectul perturbațiilor din toate canalele asupra mărimilor reglate.

Pentru compensarea unei perturbații importante accesibilă măsurării se poate utiliza o structură de sistem de reglare multivariabilă combinat (fig. 8.8).

Transformata mărimii de ieşire în acest caz se obține sub forma

$$\mathbf{Y}(s)=\mathbf{H}_F(s)\cdot\mathbf{U}(s)+\mathbf{H}_p(s)\cdot\mathbf{P}(s), \quad (8.17)$$

sau ținînd seama că $\mathbf{U}(s)$ este dat de relația

$$\mathbf{U}(s)=\mathbf{R}(s)-\mathbf{H}_R(s)\cdot\mathbf{Y}(s)-\mathbf{H}_{RP}(s)\cdot\mathbf{P}(s) \quad (8.18)$$

rezultă

$$\mathbf{Y}(s)=\mathbf{H}_F(s)[\mathbf{R}(s)-\mathbf{H}_R(s)\cdot\mathbf{Y}(s)-\mathbf{H}_{RP}(s)\cdot\mathbf{P}(s)]+\mathbf{H}_p(s)\cdot\mathbf{P}(s). \quad (8.19)$$

Scanned with OKEN Scanner

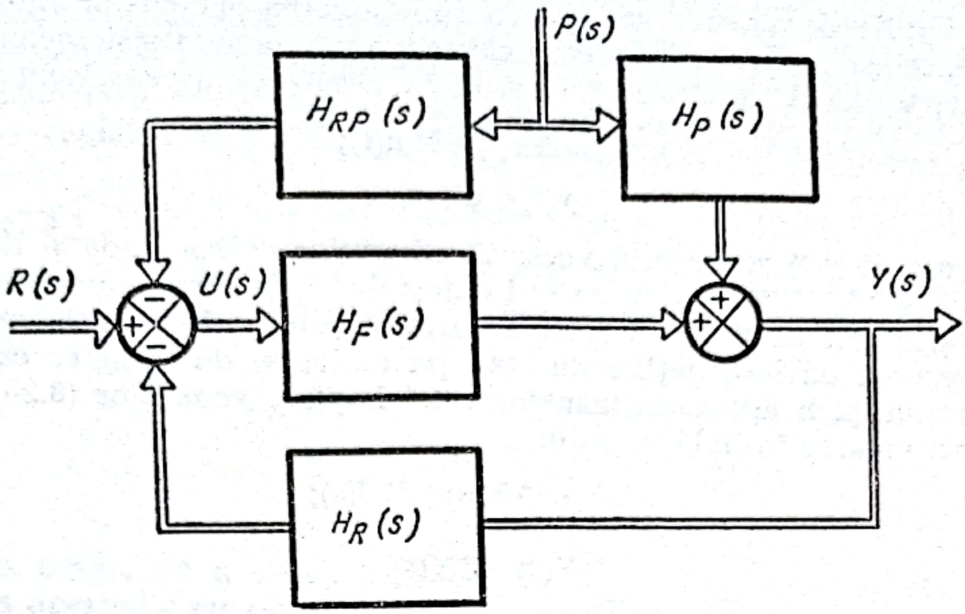


Fig. 8.8. Schema funcțională a unui sistem multivariabil de reglare combinată.

După unele operații cu matrice se obține transformata mărimii de la ieșire

$$\mathbf{Y}(s)=[\mathbf{I}+\mathbf{H}_F(s)\cdot\mathbf{H}_R(s)]^{-1}\cdot\mathbf{H}_F(s)\cdot\mathbf{R}(s)+[\mathbf{I}+\mathbf{H}_F(s)\cdot\mathbf{H}_R]^{-1}\cdot$$
$$\cdot[\mathbf{H}_p(s)-\mathbf{H}_F(s)\cdot\mathbf{H}_{RP}(s)]\cdot\mathbf{P}(s). \qquad (8.20)$$

Problema proiectării sistemului în acest caz se reduce la alegerea matricelor $\mathbf{H}_R(s)$ și $\mathbf{H}_{RP}(s)$, astfel încît să se compenseze atît efectul perturbațiilor $\mathbf{P}(s)$ cît și efectul intrărilor $\mathbf{R}(s)$. Pentru a anula efectul perturbațiilor se alege matricea de transfer a regulatorului $\mathbf{H}_{RP}(s)$ ca soluție a ecuației

$$\mathbf{H}_p(s)-\mathbf{H}_F(s)\cdot\mathbf{H}_{PR}(s)=0, \qquad (8.21)$$

iar matricea regulatorului $\mathbf{H}_R(s)$ astfel încît să se asigure decuplarea sistemului.

Dacă $\mathbf{T}(s)$ este o matrice diagonală a sistemului care asigură răspunsul dorit în raport cu intrările $\mathbf{R}(s)$, matricea $\mathbf{H}_R(s)$ se determină prin rezolvarea ecuației matriceale

$$[\mathbf{I}+\mathbf{H}_F(s)\cdot\mathbf{H}_R(s)]^{-1}\cdot\mathbf{H}_F(s)=\mathbf{T}(s). \qquad (8.22)$$

Presupunînd că $\mathbf{H}_F(s)$ este o matrice nesingulară, problema alegerii și acordării celor două regulatoare revine la a rezolva următoarele ecuații [34]:

$$\mathbf{H}_R(s)=\mathbf{T}^{-1}(s)-\mathbf{H}_F^{-1}(s); \qquad (8.23)$$

$$\mathbf{H}_{RP}(s)=\mathbf{H}_F^{-1}(s)\cdot\mathbf{H}_p(s). \qquad (8.24)$$

De reținut că nu întotdeauna matricele regulatoarelor $\mathbf{H}_R(s)$ și $\mathbf{H}_{RP}(s)$ sînt fizic realizabile.

Un alt mod de caracterizare a sistemelor multivariabile îl constituie reprezentarea în spațiul stărilor.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuaţiile de stare care descriu funcţionarea sistemelor multivariabile au acelaşi aspect ca cele care descriu funcţionarea sistemelor monovariabile, vectorul de stare $\mathbf{x}(t)$ avînd în acest caz aceeaşi semnificaţie:

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\,\mathbf{u}(t);$$
$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\,\mathbf{x}(t), \tag{8.25}$$

în care $\mathbf{u}(t)$ şi $\mathbf{y}(t)$ reprezintă vectorii mărimilor de comandă şi de ieşire, iar matricele **A, B, C** au dimensiuni determinate de dimensiunea spaţiului stărilor şi de numărul variabilelor de intrare şi de ieşire din sistem.

Trecerea de la ecuaţiile de stare la matricea de transfer este imediată. Astfel, prin aplicarea transformatei Laplace ecuaţiilor (8.25) se obţine pentru starea iniţială $\mathbf{x(0)=o}$:

$$s\mathbf{X}(s)=\mathbf{A}\mathbf{X}(s)+\mathbf{B}\mathbf{U}(s);$$
$$\mathbf{Y}(s)=\mathbf{C}\mathbf{X}(s). \tag{8.26}$$

sau

$$[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]\mathbf{X}(s)=\mathbf{B}\mathbf{U}(s),$$

respectiv

$$\mathbf{X}(s)=[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\cdot\mathbf{B}\mathbf{U}(s). \tag{8.27}$$

Prin înlocuirea relaţiei (8.27) în (8.26) obţinem

$$\mathbf{Y}(s)=\mathbf{C}[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\cdot\mathbf{B}\mathbf{U}(s). \tag{8.28}$$

Matricea de transfer a părţii fixate $\mathbf{H}_F(s)$ se obţine ţinînd seama de relaţia

$$\mathbf{Y}(s)=\mathbf{H}_F(s)\cdot\mathbf{U}(s). \tag{8.29}$$

Din comparaţia relaţiilor (8.28) cu (8.29) se obţine matricea de transfer

$$\mathbf{H}_F(s)=\mathbf{C}[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\cdot\mathbf{B}. \tag{8.30}$$

Pentru o matrice de transfer $\mathbf{H}_F(s)$ dată prezintă interes deosebit obţinerea realizărilor minimale ale matricelor **A, B, C,** matricea **A** avînd dimensiunea minimă.

Utilizarea acestor modele matematice permite algoritmizarea problemelor de analiză şi sinteză a sistemelor multivariabile.

8.2. ALEGEREA ŞI ACORDAREA REGULATOARELOR PENTRU PROCESE MULTIVARIABILE

Aşa cum s-a arătat în subcapitolul 8.1, cunoaşterea modelului matematic al părţii fixate, a legăturilor între diverse variabile de intrare şi ieşire, permite a determina algoritmul de reglare.

Pentru procese caracterizate prin intermediul unor matrice pătrate, metoda decuplării sistemului conduce la rezultate bune în proiectarea sistemelor multivariabile. Asigurarea unor relaţii de forma

$$Y_i(s)=H_{0ii}(s)\cdot R_i(s) \tag{8.31}$$

permite alegerea şi acordarea regulatorului care conduce la performanţe impuse pe fiecare canal de legătură intrare-ieşire.

Scanned with OKEN Scanner

Asigurarea unei distribuţii poli-zerouri pentru fiecare funcţie de transfer $H_{011}(s)$, $H_{022}(s)$, ..., $H_{0nn}(s)$, cu verificarea satisfacerii condiţiei de exces de poli-zerouri ale acestor funcţii în raport cu excesul poli-zerouri al funcţiilor de transfer din matricea $\mathbf{H}_F(s)$, permite determinarea algoritmului de reglare optim (dorit) pentru fiecare canal de legătură intrare-ieşire.

Exemplul 8.1

Pentru a ilustra modul de aplicare a acestei metodologii considerăm un sistem a cărui parte fixată este caracterizată prin intermediul matricei de transfer $\mathbf{H}_F(s)$

$$\mathbf{H}_F(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{0,5}{s+1} \\ \frac{0,5}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}.$$

Matricea diagonală a sistemului, pentru a obţine performanţele impuse (răspuns aperiodic cu constantele de timp egale cu 1 s), are forma

$$\mathbf{T}(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}.$$

Această matrice diagonală elimină interacţiunile între $y_2(t)$ şi $r_1(t)$ şi respectiv $y_1(t)$ şi $r_2(t)$.

Relaţiile între intrări şi ieşiri cu satisfacerea cerinţelor de performanţă sînt:

$$Y_1(s)=\frac{1}{s+1}\cdot R_1(s);$$

$$Y_2(s)=\frac{1}{s+1}\cdot R_2(s).$$

Perturbaţiile $\mathbf{P}(s)$ sînt neglijate în cadrul acestui sistem. Pentru a obţine algoritmul de reglare conform relaţiei (8.23) calculăm matricele $\mathbf{H}_F^{-1}(s)$ şi $\mathbf{T}^{-1}(s)$:

$$\mathbf{H}_F^{-1}(s)=\frac{\operatorname{adj}\ \mathbf{H}_F(s)}{\det\ \mathbf{H}_F(s)}=\frac{\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & -\frac{0,5}{s+1} \\ -\frac{0,5}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}}{\frac{0,75}{(s+1)^2}}=\begin{bmatrix} \frac{4}{3}(s+1) & -\frac{2}{3}(s+1) \\ -\frac{2}{3}(s+1) & \frac{4}{3}(s+1) \end{bmatrix};$$

$$T^{-1}(s)=\frac{\operatorname{adj}\ \mathbf{T}(s)}{\det\ \mathbf{T}(s)}=\frac{\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}}{\frac{1}{(s+1)^2}}=\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cu aceste matrice calculate determinăm algoritmul de reglare multivariabil:

$$\mathbf{H}_R(s)=\mathbf{T}^{-1}(s)-\mathbf{H}_F^{-1}(s)=\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \frac{4}{3}(s+1) & -\frac{2}{3}(s+1) \\ -\frac{2}{3}(s+1) & \frac{4}{3}(s+1) \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -\frac{1}{3}(s+1) & \frac{2}{3}(s+1) \\ \frac{2}{3}(s+1) & -\frac{1}{3}(s+1) \end{bmatrix}.$$

Pentru ca acest regulator să fie realizabil fizic putem utiliza următoarea aproximație

$$s+1\simeq\frac{s+1}{0{,}1\,s+1}=\frac{10\,(s+1)}{s+10}.$$

Astfel matricea de transfer a regulatorului devine

$$\mathbf{H}_R(s)=\begin{bmatrix} -\frac{10}{3}\cdot\frac{s+1}{s+10} & \frac{20}{3}\cdot\frac{s+1}{s+10} \\ \frac{20}{3}\cdot\frac{s+1}{s+10} & -\frac{10}{3}\cdot\frac{s+1}{s+10} \end{bmatrix}.$$

Structura generală a sistemului în acest caz este prezentată în figura 8.9.

Regulatorul poate fi plasat și pe calea directă, obținîndu-se rezultate similare.

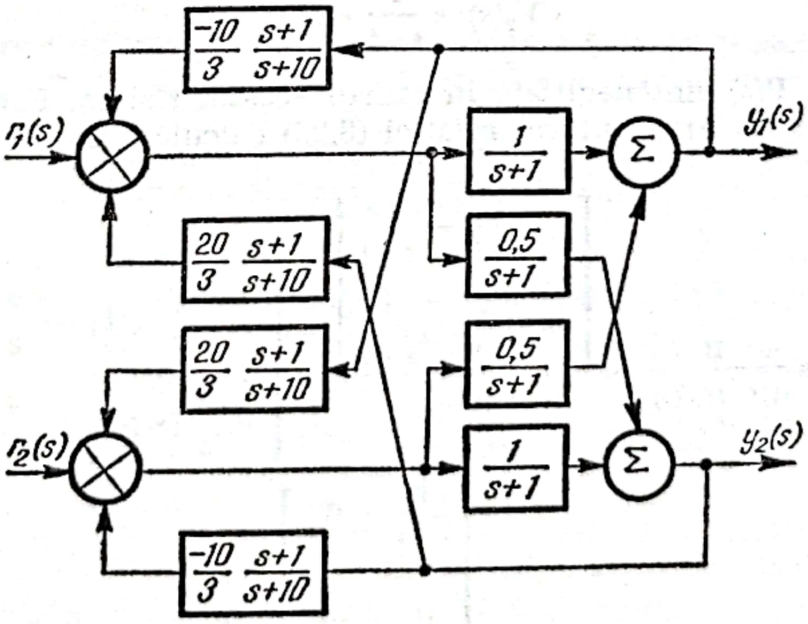


Fig. 8.9. Structura generală a sistemului de reglare multivariabil pentru procesul considerat în exemplul 8.1.

Scanned with OKEN Scanner

În [9] este prezentată o metodă de acordare optimă a regulatoarelor multivariabile pentru procese rapide, avînd la bază varianta Kessler a criteriului modulului, utilizată pentru acordarea optimă a regulatoarelor monovariabile.

Pentru un sistem cu două intrări și două ieșiri, matricele de transfer a regulatorului și a părții fixate au formele:

$$\mathbf{H}_R(s)=\begin{bmatrix} H_{R11}(s) & H_{R12}(s) \\ H_{R21}(s) & H_{R22}(s) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{H}_F(s)=\begin{bmatrix} H_{F11}(s) & H_{F12}(s) \\ H_{F21}(s) & H_{F22}(s) \end{bmatrix}.$$

Funcția de transfer a căii directe a sistemului în cazul în care regulatorul este introdus pe calea directă este dată de produsul celor două matrice de transfer:

$$H_d(s)=\mathbf{H}_F(s)\cdot\mathbf{H}_R(s)=$$

$$=\begin{bmatrix} H_{F11}(s)H_{R11}(s)+H_{F12}(s)H_{R21}(s) & H_{F11}(s)H_{R12}(s)+H_{F12}(s)H_{R22}(s) \\ H_{F21}(s)H_{R11}(s)+H_{F21}(s)H_{R21}(s) & H_{F21}(s)H_{R12}(s)+H_{F22}(s)H_{R22}(s) \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \end{bmatrix}. \qquad (8.32)$$

Punînd condiția de decuplare a sistemului în stare deschisă pot fi scrise primele două ecuații care prin rezolvare permit determinarea componentelor $H_{Rij}(s)$ ale algoritmului de reglare. Astfel, pentru ca matricea $H_d(s)$ să fie diagonală este necesar ca:

$$H_{12}(s)=0;$$

$$H_{21}(s)=0$$

sau:

$$H_{F11}(s)H_{R12}(s)+H_{F12}(s)H_{R22}=0; \qquad (8.33)$$

$$H_{F21}(s)H_{R11}(s)+H_{F21}(s)H_{R21}(s)=0. \qquad (8.34)$$

Aceste două ecuații corespund condiției de compensare completă a interacțiunilor dintre cele două canale.

Pentru a obține celelalte două componente ale matricei $H_d(s)$ respectiv $H_{11}(s)$ și $H_{22}(s)$ aplicăm varianta Kessler a criteriului modulului pentru acordarea optimă a fiecărui canal dorit.

Dacă constantele de timp parazite ale celor două canale principale sînt notate cu $T_{\Sigma_{11}}$ și $T_{\Sigma_{22}}$, conform variantei Kessler, în acordarea optimă se obțin următoarele funcții de transfer pentru cele două canale:

$$H_{11}(s)=\frac{1}{2T_{\Sigma_{11}}s(T_{\Sigma_{11}}s+1)}; \qquad (8.35)$$

$$H_{22}(s)=\frac{1}{2T_{\Sigma_{22}}s(T_{\Sigma_{22}}s+1)}. \qquad (8.36)$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin egalarea relaţiilor (8.35) şi (8.36) cu relaţiile date în (8.32), se obţine:

$$H_{F_{11}}(s)\cdot H_{R11}(s)+H_{F12}(s)\cdot H_{R21}(s)=\frac{1}{2T_{\Sigma_{11}}s\,(T_{\Sigma_{11}}s+1)}; \tag{8.37}$$

$$H_{F21}(s)\cdot H_{R12}(s)+H_{F22}(s)\cdot H_{R22}(s)=\frac{1}{2T_{\Sigma_{22}}s\,(T_{\Sigma_{22}}s+1)}. \tag{8.38}$$

Aceste două ecuaţii corespund traseelor de influenţare a mărimilor reglate Y_1 şi Y_2 de mărimile de eroare ale propriului canal.

Cunoaşterea componentelor $H_{F_{ij}}(s)$ permite obţinerea componentelor $H_{R_{ij}}(s)$ prin rezolvarea ecuaţiilor (8.33), (8.34) şi (8.37), (8.38). Astfel, din (8.33) şi (8.34) se obţine:

$$H_{R12}(s)=-H_{R22}(s)\cdot\frac{H_{F_{12}}(s)}{H_{F_{11}}(s)}; \tag{8.39}$$

$$H_{R21}(s)=-H_{R11}(s)\cdot\frac{H_{F_{21}}(s)}{H_{F_{22}}(s)}. \tag{8.40}$$

După înlocuirea acestor rezultate în ecuaţiile (8.37) şi (8.38), rezultă:

$$H_{F11}(s)\cdot H_{R11}(s)-H_{F12}(s)\cdot H_{R11}(s)\cdot\frac{H_{F_{21}}(s)}{H_{F_{22}}(s)}=H_{11}(s); \tag{8.41}$$

$$-H_{F21}(s)\cdot H_{R22}(s)\cdot\frac{H_{F_{12}}(s)}{H_{F_{11}}(s)}+H_{F22}(s)\cdot H_{R22}(s)=H_{22}(s). \tag{8.42}$$

Prin rezolvarea ecuaţiilor (8.41) şi (8.42) în raport cu $H_{R11}(s)$ şi $H_{R22}(s)$ se obţine:

$$H_{R11}(s)=H_{11}(s)\cdot\frac{1}{H_{F_{11}}(s)}\cdot\frac{1}{1-C(s)}; \tag{8.43}$$

$$H_{R22}(s)=H_{22}(s)\cdot\frac{1}{H_{F_{22}}(s)}\cdot\frac{1}{1-C(s)}, \tag{8.44}$$

unde

$$C(s)=\frac{H_{F_{12}}(s)\cdot H_{F_{21}}(s)}{H_{F_{11}}(s)\cdot H_{F_{22}}(s)}$$

reprezintă factorul de interacţiune al părţii fixate.

În cazul în care $C(s)=0$, lipsa interacţiunilor părţii fixate conduce la expresii ale funcţiilor de transfer ale regulatoarelor identice cu acelea pentru sisteme monovariabile.

Funcţiile de transfer $H_{R12}(s)$ şi $H_{R21}(s)$ se obţin prin înlocuirea (8.43) şi (8.44) în relaţiile (8.39) şi (8.40):

$$H_{R12}(s)=-\frac{H_{F_{12}}(s)}{H_{F_{11}}(s)}\cdot\frac{H_{11}(s)}{H_{F_{11}}(s)}\cdot\frac{1}{1-C(s)}; \tag{8.45}$$

$$H_{R21}(s)=-\frac{H_{F_{21}}(s)}{H_{F_{22}}(s)}\cdot\frac{H_{22}(s)}{H_{F_{22}}(s)}\cdot\frac{1}{1-C(s)}. \tag{8.46}$$

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 8.2

Pentru a exemplifica modul de alegere şi acordare optimă a regulatoarelor conform procedurii expuse, considerăm că partea fixată are următoarea matrice de transfer

$$H_F(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{3}{s(6s+1)(0,5s+1)} & \dfrac{0,2}{s(6s+1)(0,5s+1)} \\ \dfrac{0,5}{s(4s+1)(0,3s+1)} & \dfrac{2}{s(4s+1)(0,3s+1)} \end{bmatrix}.$$

Avînd în vedere că sumele constantelor parazite pentru cele două canale principale sînt: $T_{\Sigma_{11}}=0,5$ s şi $T_{\Sigma_{22}}=0,3$ s putem calcula funcţiile de transfer $H_{11}(s)$ şi $H_{22}(s)$:

$$H_{11}(s)=\frac{1}{2T_{\Sigma_{11}}s(T_{\Sigma_{11}}s+1)}=\frac{1}{s(0,5s+1)};$$

$$H_{22}(s)=\frac{1}{2T_{\Sigma_{11}}s(T_{\Sigma_{22}}s+1)}=\frac{1}{0,6s(0,3s+1)}.$$

Coeficientul de interinfluenţă al părţii fixate este dat de relaţia

$$C(s)=\frac{H_{F_{12}}(s)\cdot H_{F_{21}}(s)}{H_{F_{11}}(s)\cdot H_{F_{22}}(s)}=\frac{\dfrac{0,2}{s(6s+1)(0,5s+1)}\cdot\dfrac{0,5}{s(4s+1)(0,3s+1)}}{\dfrac{3}{s(6s+1)(0,5s+1)}\cdot\dfrac{2}{s(4s+1)(0,3s+1)}}=\frac{0,1}{6}=0,017.$$

Cu aceste elemente cunoscute se determină legea de reglare pentru fiecare canal:

$$H_{R11}(s)=0,33(6s+1);$$

$$H_{R22}(s)=0,83(4s+1);$$

$$H_{R12}(s)=-\frac{\dfrac{0,2}{s(6s+1)(0,5s+1)}\cdot\dfrac{1}{s(0,5s+1}}{\left[\dfrac{3}{s(6s+1)(0,5s+1)}\right]^2}=-0,022(6s+1);$$

$$H_{R21}(s)=-\frac{\dfrac{0,5}{s(4s+1)(0,3s+1)}\cdot\dfrac{1}{0,6s(0,3s+1)}}{\left[\dfrac{2}{s(4s+1)(0,3s+1)}\right]^2}=-0,21(4s+1).$$

Prin introducerea unor constante de timp parazite egale cu 0,1 s pentru cele patru blocuri de reglare, se obţin astfel patru componente de reglare de tip PD care asigură performanţe optime conform criteriului modulului, varianta Kessler:

$$H'_{R11}(s)=0,33\cdot\frac{6s+1}{0,1s+1};$$

$$H'_{R22}(s)=0,83\cdot\frac{4s+1}{0,1s+1};$$

Scanned with OKEN Scanner

$$H'_{R12}(s) = -0{,}022 \cdot \frac{6s+1}{0{,}1s+1};$$

$$H'_{R21}(s) = -0{,}21 \cdot \frac{4s+1}{0{,}1s+1}.$$

Pentru verificarea rezultatelor acordării optime calculăm matricea de transfer $\mathbf{H}_0(s)$ a sistemului în stare închisă, care, ca și matricea $\mathbf{H}_d(s)$, este o matrice diagonală.

Extinderea folosirii criteriului modulului (varianta Kessler) pentru acordarea optimă a regulatoarelor multivariabile prezintă avantaje importante. Astfel, datorită faptului că acest criteriu asigură o comportare optimă în raport cu perturbațiile, rezultă că, deși se realizează decuplarea în raport cu intrările sistemului, sînt menținute interacțiuni ale perturbațiilor dintr-un canal asupra mărimilor reglate din celelalte canale (decuplarea în raport cu intrările și cu perturbațiile nefiind posibilă simultan). Aceste interacțiuni nu vor exercita influențe importante, deoarece toate canalele realizează o comportare optimă în raport cu perturbațiile, deci atît în raport cu perturbațiile din canalul respectiv, cît și în raport cu perturbațiile din celelalte canale.

Pentru procese lente multivariabile pot fi extinse unele criterii utilizate la alegerea și acordarea regulatoarelor monovariabile. Pentru un proces cu două intrări și două ieșiri se poate întocmi schema de reglare din figura 8.10, unde cele două regulatoare nu asigură decuplarea canalelor. La o asemenea structură se poate extinde criteriul Ziegler-Nichols [33] pentru acordarea optimă a regulatoarelor.

Dacă se admit pentru cele două variabile de ieșire coeficienții de pondere ρ_1 și ρ_2, care caracterizează calitatea regimului tranzitoriu pentru cele două ieșiri, sistemul poate fi adus la limita de stabilitate prin modificarea factorilor de amplificare K_{R1} și K_{R2} ai celor două regulatoare. Raportul valorilor critice ale factorilor de amplificare ale celor două regulatoare pentru care se asigură limita de stabilitate se calculează cu relația

$$\frac{K_{R_1}}{K_{R_2}} = \frac{H_{F_{22}}(0)}{H_{F_{11}}(0)} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2}. \tag{8.47}$$

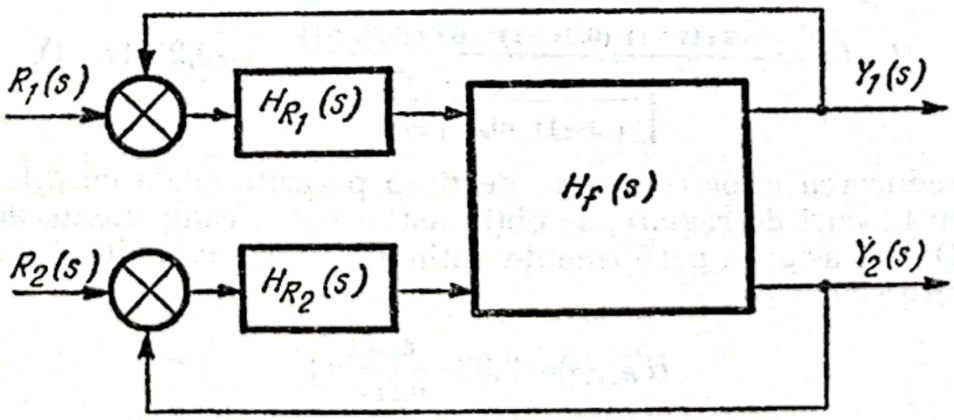


Fig. 8.10. Structura unui sistem de reglare multivariabil la care nu se asigură decuplarea.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă adoptăm $\rho_1=\rho_2$ din (8.47) se obține relația

$$K_{R1}H_{F11}(0)=K_{R2}H_{F22}(0), \tag{8.48}$$

care evidențiază faptul că factorii totali de amplificare pe cele două canale sînt egali. Această egalitate a amplificărilor pe cele două canale asigură anumite caracteristici staționare și tranzitorii similare pe ambele canale. Adoptarea unor valori diferite ale coeficienților de pondere ρ_1 și ρ_2 implică obținerea unor factori de amplificare diferiți pentru cele două canale și implicit calitatea răspunsului staționar și tranzitoriu diferită.

Acordarea optimă a regulatoarelor se face similar ca în cazul sistemelor monovariabile. Astfel, păstrînd numai elemente proporționale și raportul din (8.47) se modifică factorii de amplificare pînă se obțin oscilații neamortizate caracteristice limitei de stabilitate. În funcție de valorile critice ale amplificărilor K_{R01} și K_{R02} și de valoarea pulsației critice ω_0 ce caracterizează regimul oscilant neamortizat al răspunsului, se determină valorile optime ale parametrilor de acord pentru cele două regulatoare.

În tabelul 8.1 sînt prezentate relațiile de calcul al valorilor optime pentru parametrii de acord în cazul regulatoarelor convenționale *P*, *PI* și *PID*.

Tabelul 8.1

Calculul parametrilor de acord

Parametrul de acord / Tipul regulatorului	K_{R1}	K_{R2}	$T_{i1}=T_{i2}$	$T_{d1}=T_{d2}$
P	$\sqrt{0{,}5}K_{R01}$	$\sqrt{0{,}5}K_{R02}$	–	–
PI	$\sqrt{0{,}5}K_{R01}$	$\sqrt{0{,}45}\,K_{R02}$	$\frac{5{,}225}{\omega_0}$	–
PID	$\sqrt{0{,}6}K_{R01}$	$\sqrt{0{,}6}\,K_{R02}$	$\frac{3{,}14}{\omega_0}$	$\frac{0{,}785}{\omega_0}$

Pentru structuri de sisteme multivariabile mai complexe (mai multe intrări mai multe ieșiri), problemele alegerii și acordării optime a regulatoarelor și sintezei sistemelor multivariabile pot fi rezolvate cu eficiență apelînd la tehnica de calcul numeric.

Adoptînd criterii integrale de performanță de tipul celor menționate în capitolul 6, se poate determina algoritmul optim de conducere a unor procese multivariabile.

Asigurarea unei comportări dorite atît în regim staționar cît și în regim tranzitoriu a impus structuri de sisteme multivariabile, utilizînd atît reacție după stare cît și reacție după ieșire. În aceste condiții, legea de conducere a procesului multivariabil este dată de o relație de forma

$$\mathbf{u}(t)=\mathbf{K}_1\mathbf{x}(t)+\mathbf{K}_2\int_0^t[\mathbf{r}(\tau)-\mathbf{y}(\tau)]d\tau \tag{8.49}$$

Scanned with OKEN Scanner

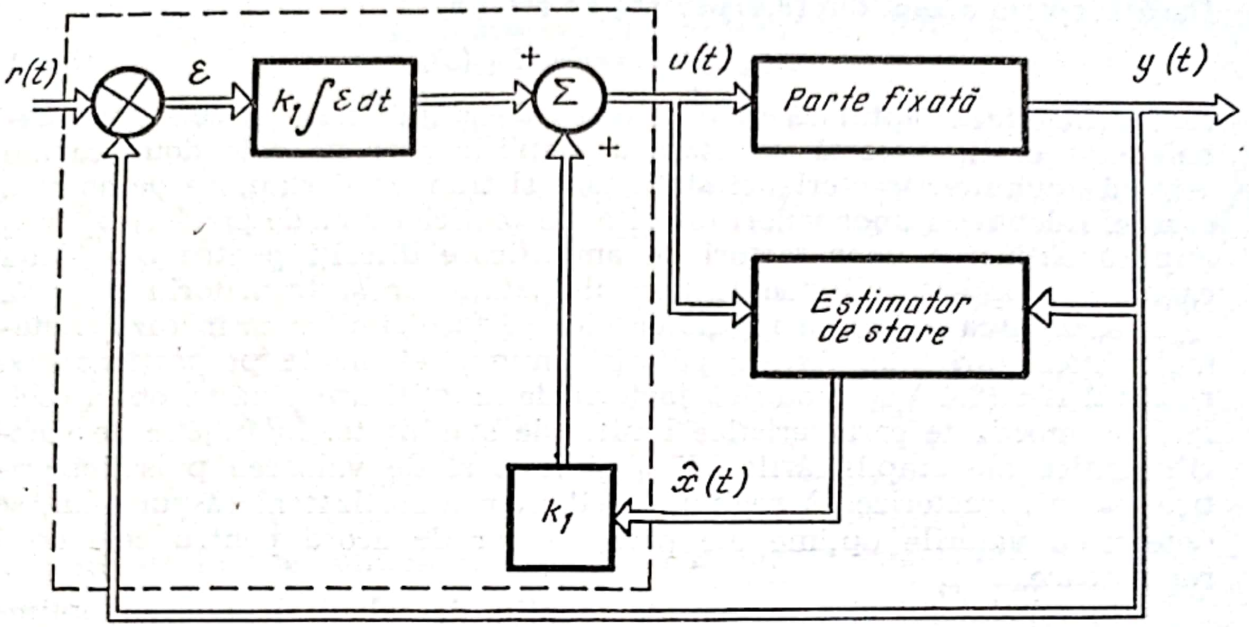


Fig. 8.11. Schema generală a unui sistem multivariabil cu reacție după stare.

sau

$$\mathbf{u}(t)=\mathbf{K}_1\mathbf{x}(t)+\mathbf{K}_2\int_0^t \varepsilon\, dt+\mathbf{K}_3\,\mathbf{p}, \tag{8.50}$$

unde $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ și $\mathbf{K}_3$ sînt matrice astfel încît să asigure o comportare optimă a sistemului atît în regim staționar cît și în regim tranzitoriu, atît la variația intrării cît și la variația perturbațiilor.

Structura unui sistem de reglare cu reacție după stare și după ieșire este dată în figura 8.11.

Pentru a utiliza reacția după stare (reacție care permite obținerea unor performanțe dorite) se impune construirea unui estimator de stare care să furnizeze starea $\hat{\mathbf{x}}(t)$. Introducerea pe calea directă a componentei integrale asigură satisfacerea condiției de eroare staționară nulă pentru intrări și perturbații de tip treaptă.

CAPITOLUL 9

SISTEME AUTOMATE CU ACȚIUNE DISCONTINUĂ (DISCRETĂ)

9.1. CONSIDERAȚII GENERALE ASUPRA SISTEMELOR CU ACȚIUNE DISCONTINUĂ

Sistemele cu acțiune discretă sînt caracterizate prin faptul că semnalele prelucrate într-un subsistem sau mai multe subsisteme componente se prezintă fie sub forma unui tren de impulsuri fie sub forma unui cod numeric. În funcție de modul cum se prezintă semnalele în sistem vom distinge: *sisteme automate cu eșantionare* (informația se prezintă sub forma unei succesiuni de impulsuri modulate) și *sisteme numerice* (informația se prezintă sub forma unui cod numeric), care implică prezența unor regulatoare sau calculatoare numerice.

Schema generală a unui sistem cu eșantionare este prezentată în figura 9.1.

Elementul de eșantionare transformă mărimea continuă $u(t)$ într-o succesiune de impulsuri modulate în amplitudine sau în durată. O modulare în amplitudine a impulsurilor conform unei funcții continue $u(t)$ se poate urmări în figura 9.2.

În figura 9.2, *b* funcția continuă $u(t)$ este modulată printr-o succesiune de impulsuri de durată p și de perioadă constantă T (perioada de eșantionare), nivelul impulsurilor reprezentînd valoarea funcției continue în momentele de eșantionare.

Filtrul de netezire are rolul de a netezi semnalele sub formă de impuls (de a filtra) înainte de a fi aplicate la intrarea procesului sau sub-

Fig. 9.1. Schema generală a unui sistem cu eșantionare.

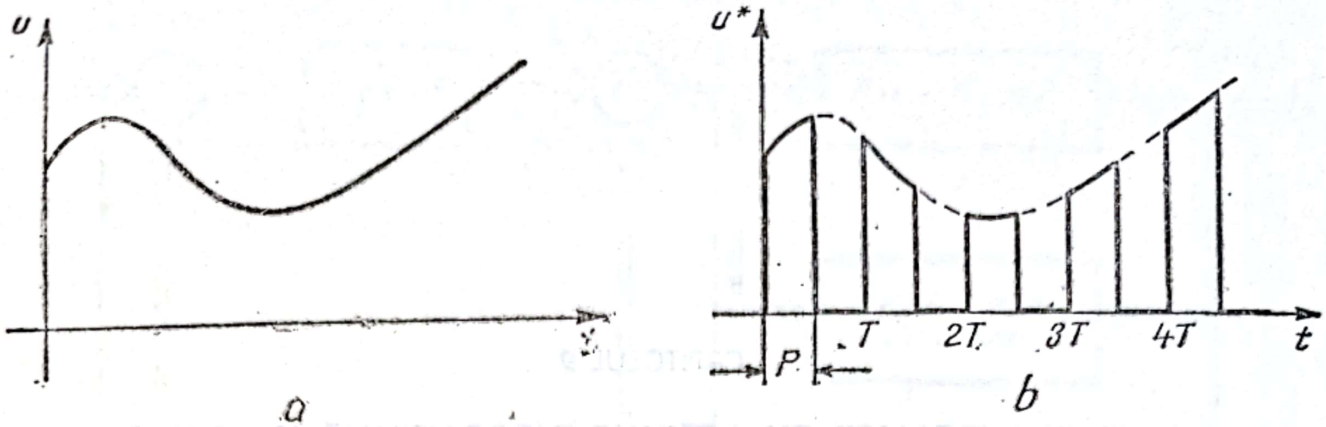


Fig. 9.2. Reprezentarea funcţiei continue şi eşantionată:
a — funcţia continuă; *b* — funcţia eşantionată.

sistemului liniar continuu. Acest element este cunoscut în literatură sub denumirea de *extrapolator* [35], jucînd rolul unui element de extrapolare a funcţiei între două momente de eşantionare.

Schema funcţională a unui sistem numeric pentru conducerea unui proces continuu este prezentată în figura 9.3.

Calculatorul numeric sau echipamentul de conducere numerică generează comenzi sub formă numerică în funcţie de abaterea numerică între programul prescris şi valoarea numerică a mărimilor controlate ale procesului. Aplicarea comenzii la proces se realizează prin intermediul convertoarelor numeric-analogice, iar ieşirea procesului este transmisă echipamentului de conducere numerică prin intermediul convertoarelor analog-numerice de pe calea de reacţie.

Sistemele cu acţiune discretă, deşi au dezavantajul unor structuri mai complexe şi evident un preţ de cost mai ridicat şi o întreţinere mai dificilă, prezintă totuşi o serie de avantaje nete faţă de sistemele cu acţiune continuă. Astfel, precizia de lucru şi viteza de prelucrare a informaţiei sînt net superioare faţă de sistemele continue. Aceste sisteme permit o folosire multiplă a aparatajului şi canalelor de transmitere a semnalelor, realizează condiţii pentru memorarea anumitor date şi asigură largi posibilităţi pentru introducerea calculatoarelor numerice în conducerea proceselor.

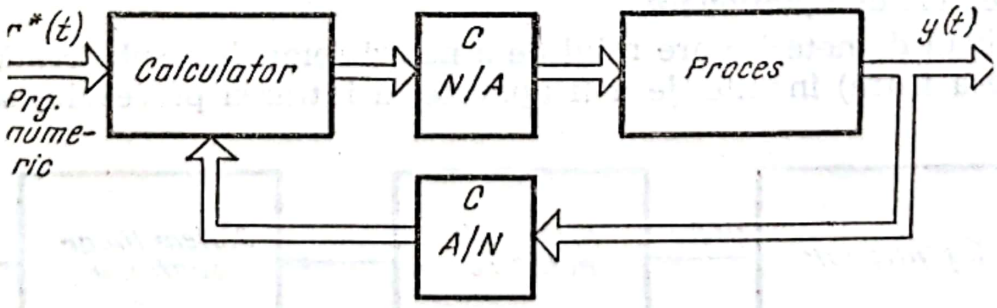


Fig. 9.3. Schema funcţională a unui sistem numeric pentru conducerea unui proces continuu

Scanned with OKEN Scanner

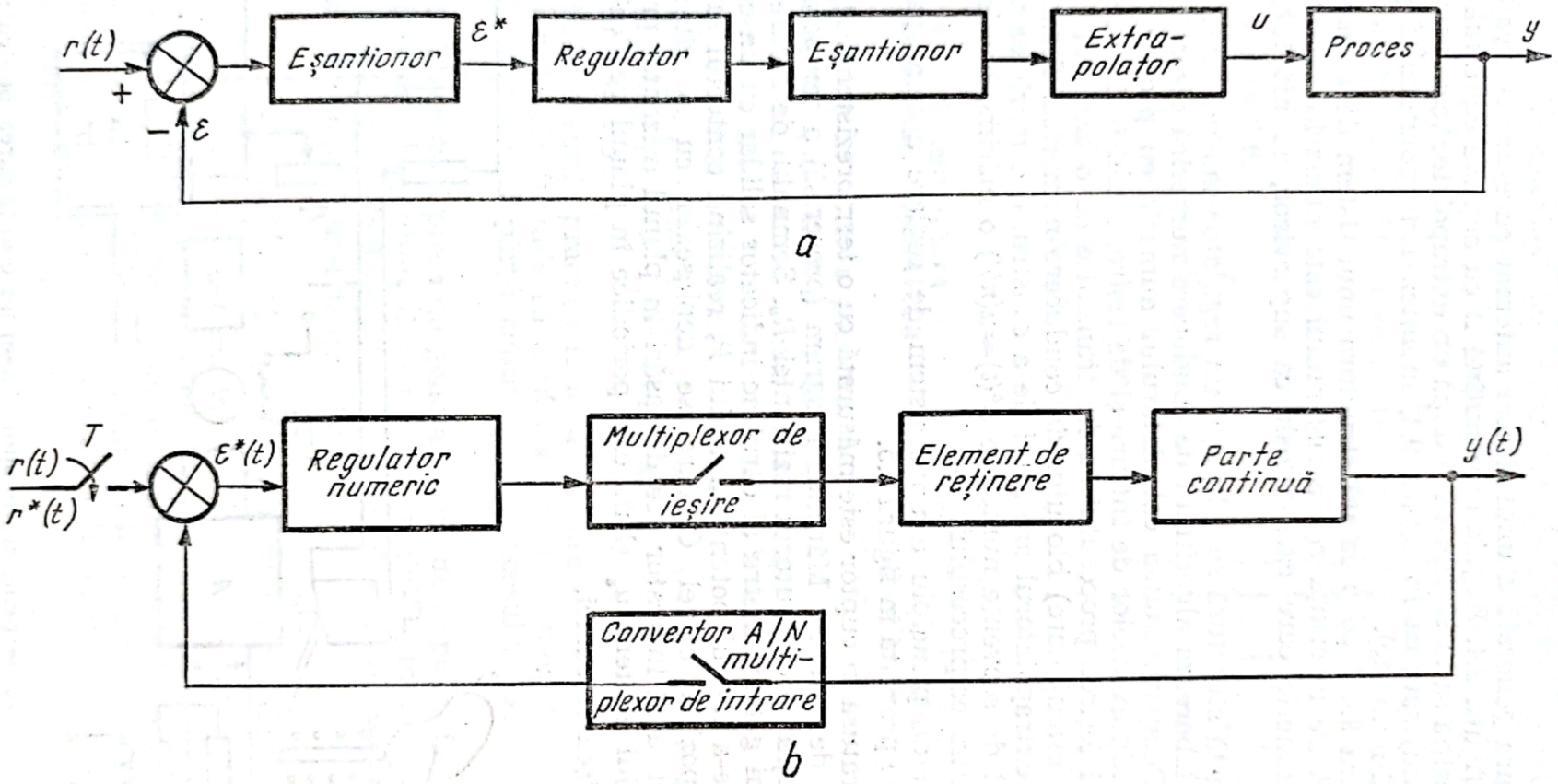


Fig. 9.4. Structuri de sisteme numerice:
a — cu eșantionarea erorii și regulator numeric; *b* — cu regulator numeric și referințe sub formă numerică.

Scanned with OKEN Scanner

9.2. SISTEME AUTOMATE CU EŞANTIONARE

Structura generală a unui sistem automat cu eşantionarea erorii se prezintă în figura 9.4. Regulatorul putînd fi cu acţiune continuă sau discontinuă, poziţia sa în sistem va fi după un extrapolator (cazul unui regulator continuu) sau, ca în figura 9.4, înaintea extrapolatorului (în cazul regulatorului numeric).

În figura 9.4, *b* se prezintă structura unui sistem de reglare numerică pentru care referinţa $r(t)$ a sistemului este numerică, fixată de un calculator numeric care este folosit ca supervizor, la nivelul ierarhic superior.

În această structură se foloseşte un regulator sau un calculator numeric care elaborează algoritmul de conducere numerică directă (*CND*) a procesului. Compatibilitatea calculatorului numeric cu procesul implică prezenţa multiplexoarelor de intrare şi de ieşire, astfel încît mărimile de la intrarea şi ieşirea procesului să fie transmise cu o anumită frecvenţă (perioadă de eşantionare) blocului de conducere numerică. Elementul de reţinere sau extrapolatorul are rolul de a construi din mărimea numerică (din numărul de secvenţe numerice $u^*(t)=u(nT)$ o mărime continuă care se aplică la intrarea procesului.

Schema de principiu a unui sistem de reglare a temperaturii cu eşantionare se prezintă în figura 9.5.

Temperatura în cuptor este măsurată cu o termorezistenţă R_y inclusă într-o punte de măsură. Mărimea program (prescrisă) a temperaturii se realizează în punte cu ajutorul rezistenţei R_u. Semnalul de eroare u_ε este transmis unui galvanometru al cărui ac indicator solidar cu un cursor se deplasează de-a lungul potenţiometrului P, realizînd contactul sau nu în funcţie de poziţia camei C, care se deplasează cu o viteză constantă. Astfel, acul indicator are deplasări în planul orizontal proporţionale cu nivelul abaterii u_ε şi mişcări periodice în planul vertical, determinate de mişcarea camei.

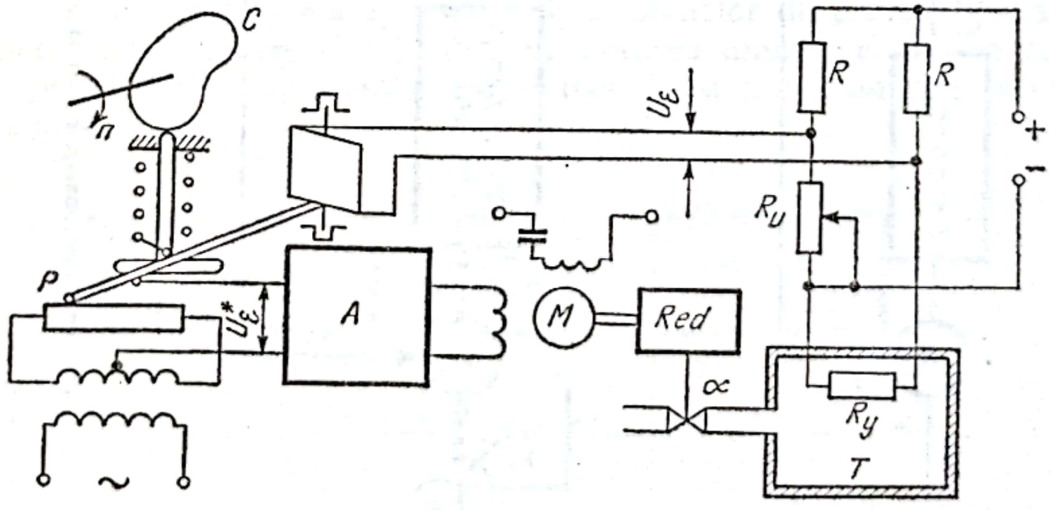


Fig. 9.5. Schema de principiu a unui sistem cu eşantionarea pentru reglarea temperaturii.

Scanned with OKEN Scanner

La intrarea amplificatorului A se aplică o succesiune de impulsuri dreptunghiulare cu durata p și cu o amplitudine agală cu valoarea mărimii u_ε, la diferite momente de timp echidistante. Perioada de eșantionare este determinată de viteza de rotație a camei.

Diagrama variației semnalelor în diferite puncte ale schemei se poate urmări în figura 9.6.

Semnalul eșantionat u_ε^* este amplificat și transmis la una din înfășurările motorului bifazat ce acționează, prin intermediul unui reductor, ventilul de reglare a debitului de combustibil. Deschiderea α a ventilului are forma de variație din figura 9.6, *c*.

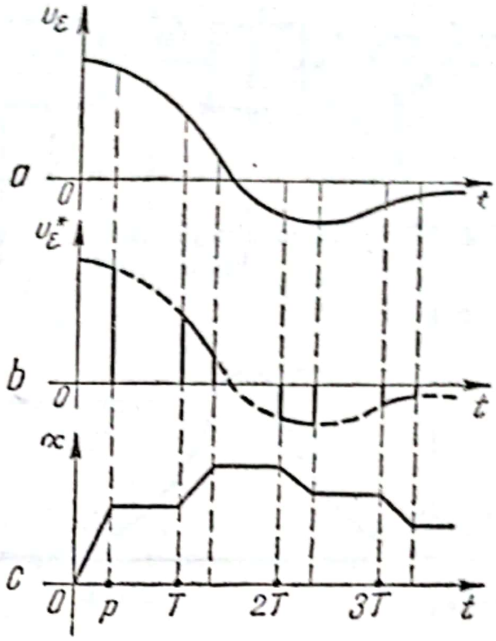


Fig. 9.6. Diagrama variației semnalelor în diferite puncte ale schemei din fig. 9.5:
a — funcția continuă; *b* — funcția eșantionată; *c* — poziția organului de reglare.

9.2.1. EȘANTIONAREA ȘI REFACEREA SEMNALELOR

Pornind de la schema generală a unui sistem cu eșantionare se observă că într-un asemenea sistem apar două categorii de semnale, semnale cu caracter discontinuu (impulsuri) și semnale continue. Astfel, schema poate fi reprezentată simplificat ca în figura 9.7.

Impulsurile generate de generatorul de impulsuri *GI* al sistemului sînt caracterizate printr-o funcție $\alpha(t)$ arbitrară, care este zero în afara intervalului $0<t\leqslant T$.

În toate cazurile practice funcția $\alpha(t)$ are o înălțime finită și poate fi normalizată prin includerea unui coeficient de modulare K_m în coeficientul de transfer al părții continue a procesului, astfel că $\alpha_{max}=1$ (fig. 9.8).

Ținînd seama de prezența generatorului de impulsuri, eroarea sistemului ε este astfel eșantionată în timp și modulată în amplitudine. Dacă aproximăm că $\varepsilon(t)=0$ la $t<0$, atunci semnalul eșantionat la ieșirea eșantionorului (*GI*) poate fi descris de relația

$$\varepsilon_p^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon(kT)\alpha(t-kT) \text{ pentru } 0\leqslant t<\infty. \qquad (9.1)$$

Un element de eșantionare cu impulsuri modulate într-o formă arbitrară la ieșire poate fi înlocuit prin două elemente legate în serie: un eșantionor ideal cu impulsuri unitare modulate la ieșire și un element formator. Formatorul, avînd la intrare impulsuri unitare, va avea la ieșire chiar funcția pondere proprie $\alpha(t)$.

Astfel, sistemul prezentat în figura 9.7 poate fi reprezentat în aceste condiții prin structura dată în figura 9.9.

Scanned with OKEN Scanner

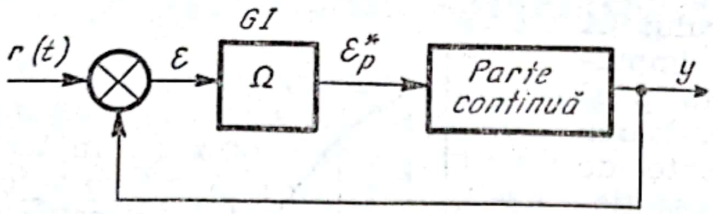


Fig. 9.7. Schema simplificată a unui sistem cu eşantionare.

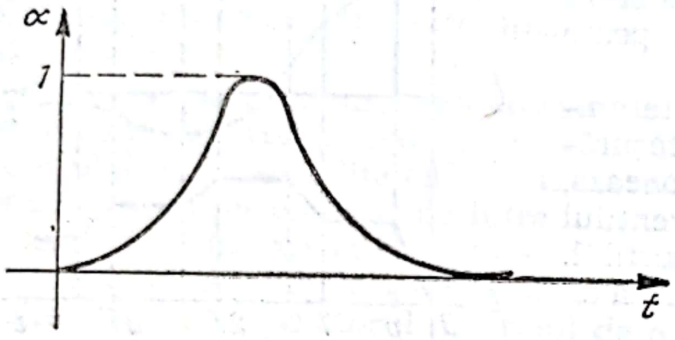


Fig. 9.8. Răspunsul formatorului de impulsuri.

Funcţia de transfer a elementului formator este în acest caz chiar imaginea funcţiei $\alpha(t)$.

Dacă se notează prin $H_e(s)$ funcţia de transfer a formatorului şi prin $H_f(s)$ funcţia de transfer a subsistemului continuu, atunci funcţia de transfer generală a părţii continui a sistemului va fi dată de expresia

$$H(s)=H_e(s)\cdot H_f(s). \qquad (9.2)$$

Trenul de impulsuri unitare modulat prin intermediul funcţiei $\alpha(t)$, obţinut la ieşirea unui eşantionor ideal, se defineşte prin relaţia

$$\varepsilon^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon(kT)\cdot\delta(t-kT), \qquad (9.3)$$

unde $\delta_T(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT)$ reprezintă un tren de funcţii impuls unitare.

Eşantionorul ideal poate fi reprezentat ca în figura 9.10, *a*, ca un întreruptor mecanic care se închide şi deschide cu perioada T, durata închiderii fiind practic neglijabilă în comparaţie cu perioada T. Elementul formator transformă succesiunea de impulsuri $\varepsilon^*(t)$ într-o succesiune de impulsuri reale de tipul relaţiei (9.1), care acţionează asupra părţii continui a sistemului (fig. 9.10, *b*). De remarcat faptul că locul elementelor componente ale unui sistem cu eşantionare nu poate fi schimbat, respectiv poziţia eşantionorului este întotdeauna înaintea formatorului de impulsuri. Rolul acestui formator (extrapolator) este de a filtra armonicele de înaltă frecvenţă conţinute în impulsurile $\varepsilon^*(t)$ înainte de aplicarea lor la intrarea părţii continue a sistemului.

Dacă admitem că funcţia $\alpha(t)$ la ieşirea formatorului este reprezentată sub forma unor impulsuri de durată T şi amplitudine unitară, res-

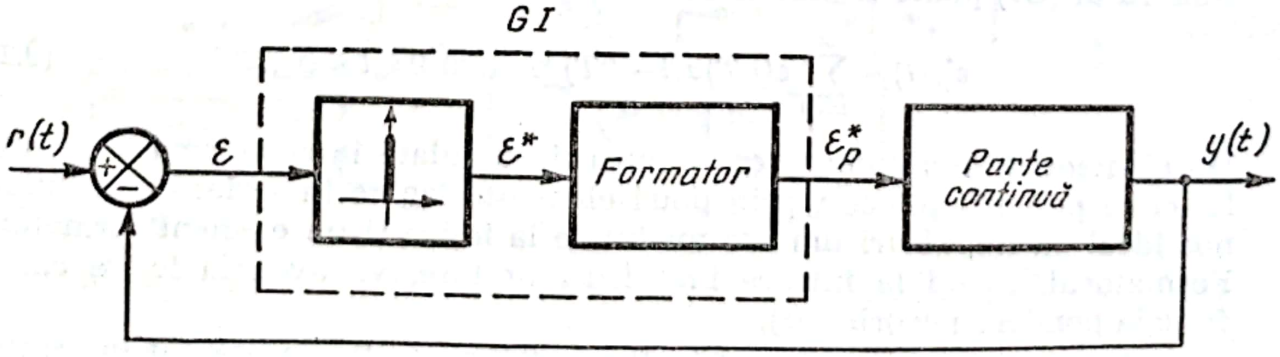


Fig. 9.9. Structura unui sistem cu eşantionare cu eşantionar ideal şi formator de impulsuri.

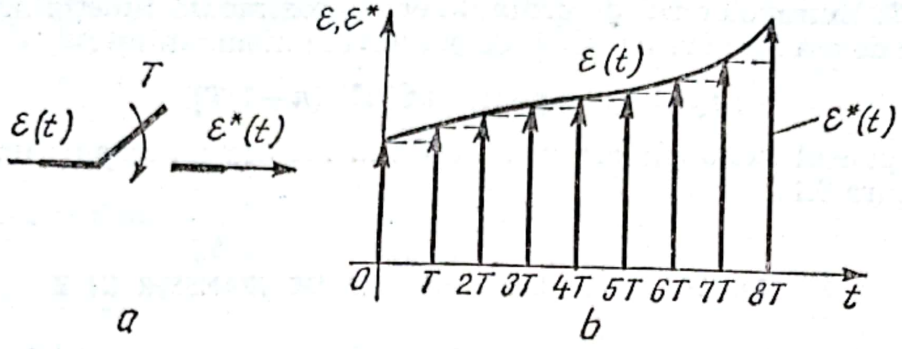


Fig. 9.10. Schema unui eşantionor:
a — eşantionor ideal; *b* — răspunsul formatorului de impulsuri.

pectiv presupunînd o comportare de filtru ideal (fig. 9.11), atunci funcţia de transfer a acestui filtru (extrapolator) se obţine considerînd impulsul unitar de durată T ca o sumă a două trepte unitare $u_0(t)$, decalate prin perioada de eşantionare T

$$\alpha(t)=u_0(t)-u_0(t-T); \tag{9.4}$$

$$H_e(s)=\mathfrak{L}[\alpha(t)]=\frac{1-e^{-sT}}{s}. \tag{9.5}$$

Formatorul de impulsuri reale de durată T şi o amplitudine dată de valoarea funcţiei în momentele de eşantionare este cunoscut sub denumirea de *extrapolator de ordinul zero.*

În figura 9.12 se prezintă forma impulsurilor ideale şi reale într-un sistem la care variaţia mărimii $\varepsilon(t)$ este dată în figura 9.6.

Procesul de formare reprezintă în esenţă un proces de reconstruire a semnalului între momentele de eşantionare, respectiv un proces de extrapolare a funcţiei $\varepsilon(t)$ între două momente de eşantionare consecutive nT

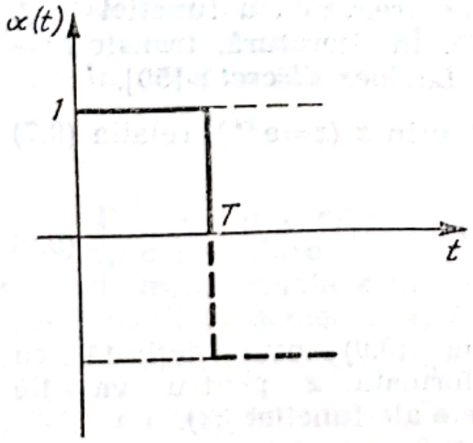


Fig. 9.11. Caracteristica de filtru ideal a formatorului de impulsuri.

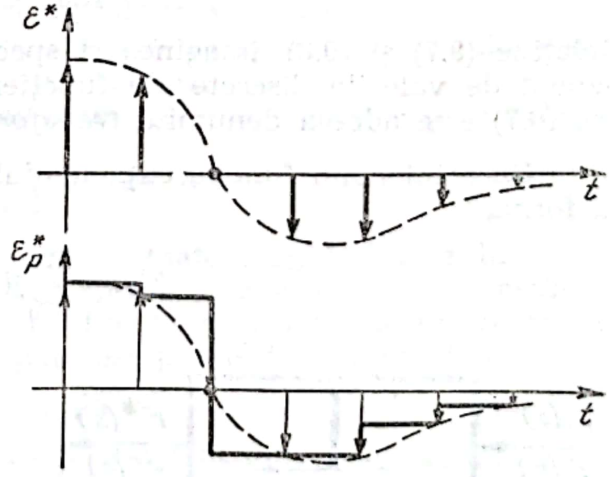


Fig. 9.12. Variaţia fucţiilor $\varepsilon^*(t)$ şi $\varepsilon^*p\,(t)$:
a — la ieşirea eşantionarului ideal; *b* — la ieşirea extrapolatorului de ordinul zero.

și $(n+1)T$. Extrapolatorul de ordinul zero aproximează funcția între două momente de eșantionare cu valoarea acesteia la momentul nT

$$\varepsilon(t)=\varepsilon(nT) \text{ pentru } t\in[nT, (n+1)T].$$

Răspunsul extrapolatorului de ordinul zero la un impuls unitar este dat în figura 9.11.

9.2.2. TRANSFORMATA ÎN Z. FUNCȚIA DE TRANSFER ÎN Z

Scopul analizei, ca și în cazul sistemelor continue, este determinarea performanțelor staționare și tranzitorii ale sistemelor în condițiile impuse de variația intrării și a mărimilor perturbatoare ale sistemului.

Cele mai uzuale metode de analiză a sistemelor cu eșantionare sînt: metoda ecuațiilor cu diferențe finite, metoda transformatei z și a transformatei z-modificate și metoda spațiului stărilor. În cele ce urmează vom prezenta metoda transformatei în z și a transformatei z-modificată.

Pentru un eșantionor ideal (fig. 9.13), la care considerăm că intrarea continuă $f(t)$ este definită pentru $t\geqslant 0$, funcția eșantionată este definită prin relația

$$f^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT). \tag{9.6}$$

Aplicînd transformata Laplace relației (9.6) și ținînd seama de teorema întîrzierii [35], se obține

$$F^*(s)=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\cdot e^{-kTs}. \tag{9.7}$$

Transformate Fourier pentru funcția $f^*(t)$ are forma

$$F^*(j\omega)=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-j\omega kT}. \tag{9.8}$$

Relațiile (9.7) și (9.8), imaginea și spectrul de frecvență a funcției $f^*(t)$, depind de valorile discrete ale funcției $f(kT)$. În literatură, transformarea (9.7) este adesea denumită *transformata Laplace discretă* [50].

Dacă înlocuim funcția exponențială e^{Ts} prin z ($z=e^{Ts}$), relația (9.7) ia forma

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}. \tag{9.9}$$

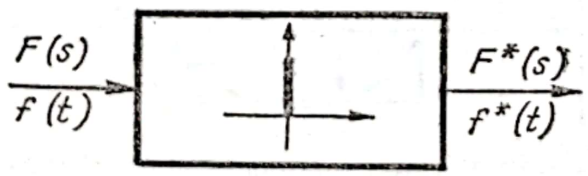


Fig. 9.13. Modelul unui eșantionar ideal.

Relația (9.9) este definită ca transformata z pentru valorile discrete ale funcției $f(t)$.

Transformata z a unui impuls unitar este evident egală cu 1 ($k=0$), $f(kT)=\delta(t)$, iar $k=0$.

Scanned with OKEN Scanner

Transformata în z a unei funcții de tip treaptă unitară este definită pornind de la relația (9.6), înlocuind funcția $f(kT)$ prin valoarea $u_0(t)$:

$$f^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT);$$

$$F^*(s)=\mathcal{L}[f^*(t)]=\mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT)\right]=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-kTs}=\frac{1}{1-e^{-Ts}}=\frac{e^{Ts}}{e^{Ts}-1}. \quad (9.10)$$

Relația (9.10) se obține ținînd seama că pentru o progresie geometrică $\sum_{i=0}^{\infty}ar^i$ suma acesteia se calculează cu ajutorul relației $a/(1-r)$, unde a este primul termen și $r<1$ este rația progresiei geometrice (raportul între termenii succesivi ai progresiei). Dacă ținem seama că $e^{Ts}=z$, relația (9.10) poate fi scrisă sub forma

$$F(z)=\frac{z}{z-1} \quad \text{pentru} \quad |z^{-1}|<1. \quad (9.11)$$

În mod similar se calculează transformata z a unei funcții exponențiale de tip $f(t)=e^{at}$. Funcția $f(t)$ în formă discretizată se prezintă astfel:

$$f^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{akT}\cdot\delta(t-kT). \quad (9.12)$$

Transformata Laplace a acestei funcții, ținînd seama de proprietățile transformatei Laplace și transformatei z prezentate în anexa A-1, este

$$F^*(s)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{akT}\cdot e^{-kTs} \quad (9.13)$$

sau

$$F(z)=\frac{z}{z-e^{aT}} \quad \text{dacă} \quad |z^{-1}|<e^{aT}. \quad (9.14)$$

În anexă sînt date transformatele în z ale unor funcții utilizate în automatică, precum și principalele proprietăți ale trasformatei z.

De remarcat faptul că transformata în z a unei funcții dă informații doar în momentele de eșantionare despre funcție.

În ceea ce privește transformata inversă, se definește prin relația

$$f(kT)=\frac{1}{2\pi J}\int_{\Gamma}F(z)z^{k-1}dz, \quad (9.15)$$

unde Γ este un contur închis ce conține toate singularitățile lui $F(z)$.

Spre deosebire de transformata Laplace care este unică în ambele sensuri, transformata z inversă a unei funcții date nu este unică, adică unei funcții în domeniul z, $F(z)$, îi pot corespunde în domeniul real mai multe funcții $f_i(t)$. Exemplu: transformata z inversă a funcției $F(z)=\frac{z}{z-1}$ poate fi orice funcție ce ia valoarea 1 la momentele $t=0,\ T,\ 2T,\ldots$.

De observat faptul că în procesul de eșantionare are loc o pierdere de informație; cu cît perioada de eșantionare este mai mare cu atît această pierdere de informație prin eșantionare este mai mare.

Scanned with OKEN Scanner

Alegerea perioadei de eşantionare se face în concordanţă cu teorema eşantionării [13, 35].

Teorema eşantionării (Shanon) stabileşte că dacă o funcţie continuă are frecvenţa de tăiere ω_c, această funcţie este complet caracterizată prin valorile funcţiei măsurate la intervale de timp separate prin $T=\frac{1}{2}(2\pi/\omega_c)$.

Ţinînd seama de această teoremă şi de faptul că funcţia eşantionată are în momentele de eşantionare amplitudinea funcţiei continue, se poate deduce $f(t)$ din $f^*(t)$.

Metoda seriilor de puteri permite calculul funcţiei $f(kT)$ pornind de la transformata z a acesteia. Această metodă rezidă în faptul că o funcţie $F(z)$ se poate scrie sub forma unei serii de puteri în z^{-1}, iar coeficienţii seriei reprezintă valoarea funcţiei în momentele de eşantionare

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}, \tag{9.16}$$

respectiv

$$F(z)=f(0)+f(T)z^{-1}+f(2T)z^{-2}+\ldots+f(kT)z^{-k}+\ldots \tag{9.17}$$

Exemplul 9.1.

Pentru funcţia

$$F(z)=\frac{(1-e^{-aT})\,z}{z^2-(1+e^{-aT})\,z+e^{-aT}}, \tag{9.18}$$

prin împărţire se obţine seria de puteri

$$F(z)=(1-e^{-aT})z^{-1}+(1-e^{-2aT})z^{-2}+(1-e^{-3aT})z^{-3}+\ldots \tag{9.19}$$

iar funcţia $f(kT)$ are expresia

$$f(kT)=1-e^{-akT} \tag{9.20}$$

În cazul general al unei funcţii $F(z)$ exprimată sub forma unui raport a două polinoame în z se poate obţine un model de forma (9.17), care permite calculul funcţiei $f(kT)$ corespunzătoare

$$F(z)=\frac{A(z)}{B(z)}=\sum_{k=0}^{\infty}=f(kT)z^{-k}. \tag{9.21}$$

Pentru cazul în care funcţia continuă de la intrarea eşantionorului are o transformată Laplace de tipul

$$\varepsilon(s)=\frac{A(s)}{B(s)} \tag{9.22}$$

şi admiţînd că $B(s)$ are n rădăcini reale simple, relaţia (9.22) se poate scrie sub forma

$$\varepsilon(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{A(s_i)}{\dot{B}(s_i)}\cdot\frac{1}{s-s_i}, \tag{9.23}$$

unde

$$\dot{B}(s_i)=\left.\frac{dB(s)}{ds}\right|_{s=s_i}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin aplicarea transformatei Laplace inversă relației (9.23) se obține expresia în timp a funcției $\varepsilon(t)$

$$\varepsilon(t)=\mathcal{L}^{-1}[\varepsilon(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{A(s_i)}{\dot{B}(s_i)}\cdot\frac{1}{s-s_i}\right],$$

iar

$$\varepsilon(t)=\sum_{i=1}^{n}\cdot\frac{A(s_i)}{\dot{B}(s_i)}\cdot e^{-s_i t}.$$

Transformata Laplace discretă a funcției $\varepsilon(s)$, ținînd seama de definiția transformatei discrete a unei funcții exponențiale, ia forma

$$\varepsilon^*(s)=\sum_{i=1}^{n}\cdot\frac{A(s_i)}{\dot{B}(s_i)}\cdot\frac{e^{sT}}{e^{sT}-e^{s_i T}} \tag{9.24}$$

sau

$$\varepsilon(z)=\sum_{i=1}^{n}\cdot\frac{A(s_i)}{\dot{B}(s_i)}\cdot\frac{z}{z-e^{-s_i T}}, \tag{9.25}$$

respectiv în cazul general

$$\varepsilon(z)=\frac{A(z)}{B(z)}, \tag{9.26}$$

cu observația că gradul polinoamelor $B(z)$ și $B(s)$ este același.

Exemplul 9.2

Pentru a ilustra modul de calcul al transformatei z a unei funcții cînd este cunoscută transformata Laplace a acesteia considerăm funcția $\varepsilon(s)$ dată sub forma

$$\varepsilon(s)=\frac{K}{s(1+sT_0)},$$

cu răspunsul în timp cunoscut

$$\varepsilon(t)=K(1-e^{-t/T_0}).$$

Folosind relația (9.25) se obține

$$\varepsilon^*(s)=K\left(\frac{e^{sT}}{e^{sT}-1}-\frac{e^{sT}}{e^{sT}-e^{-T/T_0}}\right)=\frac{K(1-e^{-T/T_0})e^{sT}}{(e^{sT}-1)(e^{sT}-e^{-T/T_0})}$$

sau înlocuind $z=e^{Ts}$, se obține

$$\varepsilon(z)=\frac{K(1-e^{-T/T_0})z}{(z-1)(z-e^{-T/T_0})z}.$$

Pentru cazul în care semnalul aplicat la intrarea eșantionorului are o întîrziere pură τ ca în figura 9.14, transformata în z a funcției eșantionate depinde de valoarea întîrzierii:

$$\varepsilon_\tau^*(t)=\sum_{k=n}^{\infty}\varepsilon(kT-\tau)\cdot\delta(t-kT); \tag{9.27}$$

$$(k-1)T<\tau<kT$$

Scanned with OKEN Scanner

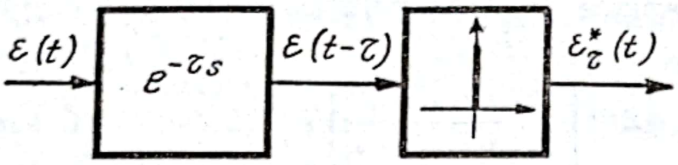


Fig. 9.14. Eşantionarea unei funcţii întîrziate cu τ

sau

$$\varepsilon_\tau^*(s)=\sum_{k=n}^{\infty}\varepsilon(kT-\tau)e^{-skT}. \quad (9.28)$$

Dacă întîrzierea este egală cu un număr întreg de perioade $\tau=nT$, atunci

$$\varepsilon_\tau^*(s)=\sum_{k=n}\varepsilon[k-n)T]e^{-ksT}. \quad (9.29)$$

sau

$$\varepsilon_\tau^*(s)=e^{-nsT}\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon(kT)e^{-ksT}=e^{-nsT}\cdot\varepsilon^*(s), \quad (9.30)$$

respectiv

$$\varepsilon_\tau(z)=z^{-n}\cdot\varepsilon(z). \quad (9.31)$$

Cunoaşterea transformatei în z a unei funcţii permite calculul funcţiei $f(t)$ prin metoda seriilor de puteri, prin descompunerea în fracţii simple sau prin intermediul relaţiei ce defineşte transformata z inversă.

Funcţionarea unui sistem cu eşantionare poate fi descrisă în domeniul real al timpului cu ajutorul ecuaţiilor cu diferenţe de forma

$$y(k)+a_1y(k-1)+a_2y(k-2)+\ldots+a_ny(k-n)=b_0u(k)+b_1u(k-1)+\ldots$$
$$\ldots+b_mu(k-m), \quad (9.32)$$

unde $y(k)=y(kT)$ reprezintă valoarea funcţiei în momentul $t=KT$.

Dacă ecuaţiei cu diferenţe (9.32) îi aplicăm transformata z şi ţinem seama de proprietăţile acesteia definite în anexa A-1, obţinem pentru condiţii iniţiale nule ale funcţiilor $y(t)$ şi $u(t)$ precum şi pentru derivatele lor următoarea relaţie

$$Y(z)+a_1z^{-1}\cdot Y(z)+a_2z^{-2}Y(z)+\ldots a_nz^{-n}\cdot Y(z)=b_0U(z)+b_1z^{-1}U(z)+$$
$$+\ldots\ldots+b_mz^{-m}U(z).$$

Prin definiţie, raportul între transformatele în z ale celor două variabile de la intrarea şi ieşirea sistemului poartă denumirea de *funcţie de transfer în z*

$$H(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\ldots b_mz^{-m}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\ldots a_nz^{-n}}. \quad (9.33)$$

Dacă considerăm un sistem (fig. 9.15) a cărui funcţie de transfer este $H(s)$ şi în domeniul real (domeniul timpului) este caracterizat prin intermediul funcţiei pondere $w(t)$, se poate determina semnificaţia fizică a funcţiei de transfer în domeniul z.

Funcţia de la intrare fiind un impuls unitar

$$u(0)=1;$$
$$u(k)=0 \quad \text{pentru} \quad k>0,$$

Scanned with OKEN Scanner

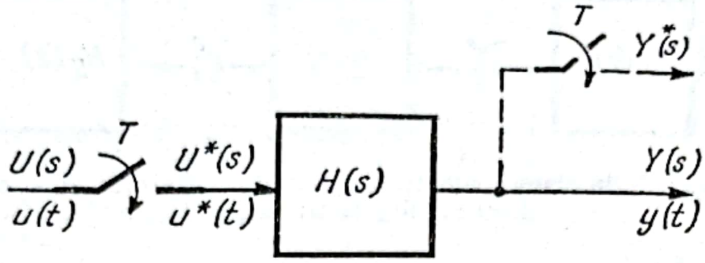


Fig. 9.15. Schemă pentru determinarea funcției de transfer în z.

se pot scrie următoarele relații pentru sistemul definit prin intermediul funcției de transfer $H(s)$ (sau prin ecuația 9.32) respectiv funcția pondere $w(t)$:

$$\begin{aligned}
&w(0)=b_0;\\
&w(1)=b_1-a_1w(0);\\
&w(2)=b_2-a_1w(1)-a_2w(0);\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&w(k)=b_k-a_1w(k-1)-\ldots-a_kw(0) \qquad \text{pentru } k\leqslant n;\\
&w(k)=-a_1w(k-1)-\ldots-a_nw(k-n) \qquad \text{pentru } k>n.
\end{aligned} \tag{9.34}$$

Ținînd seama de (9.33) și (9.34) rezultă

$$H(z)=\sum_0^\infty w(k)z^{-k}=\mathcal{Z}[w(k)]. \tag{9.35}$$

Relația (9.35) evidențiază faptul că pentru un sistem care are la intrare o succesiune de impulsuri se poate defini o funcție pondere discretă, iar funcția de transfer în domeniul z reprezintă transformata în z a acestei funcții pondere discretă. Pentru a defini funcția de transfer în z, la intrarea sistemului continuu se impune a se aplica o succesiune de impulsuri.

Pentru cazul în care semnalul eșantionat se aplică la intrarea unui lanț de elemente cu funcții de transfer $H_i(s)$ (fig. 9.16), funcția de transfer în domeniul z se definește ca raportul transformatelor în z ale funcțiilor $Y(z)$ și $U(z)$ și este dată de transformata în z a produsului celor trei funcții de transfer

$$H(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=H_1H_2H_3(z). \tag{9.36}$$

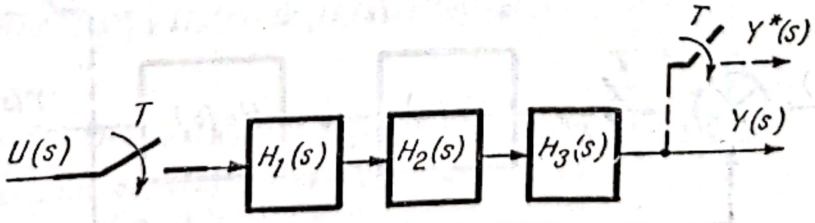


Fig. 9.16. Schemă de sistem alcătuit din mai multe elemente continue legate în serie.

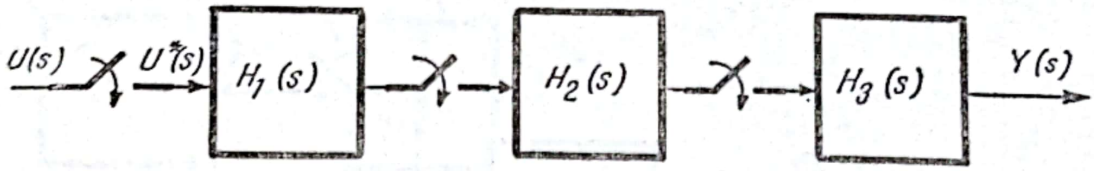


Fig. 9.17. Schemă de sistem alcătuit din mai multe elemente cu acțiune discretă legate în serie.

De reținut faptul că în domeniul z pentru o structură serie de elemente este îndeplinită condiția

$$H_1(z)\cdot H_2(z)\ldots H_k(z)\neq H_1H_2\ldots H_k(z). \tag{9.37}$$

Pentru o structură ca aceea prezentată în figura 9.17, funcția de transfer generală a sistemului se definește astfel

$$H(z)=H_1(z)\cdot H_2(z)\cdot H_3(z). \tag{9.38}$$

Pentru o structură de sistem închis cu eșantionare (fig. 9.18) se poate scrie funcția de transfer în z ținînd seama de observațiile anterioare

$$Y(s)=H_e(s)\cdot H_f(s)\cdot\varepsilon^*(s);$$

$$H_d^*(s)=\frac{Y^*(s)}{\varepsilon^*(s)}=[H_e(s)\cdot H_f(s)]^*;$$

$$\varepsilon(s)=R(s)-H_e(s)\cdot H_f(s)\cdot\varepsilon^*(s);$$

$$\varepsilon^*(s)=R^*(s)-[H_eH_f(s)]^*\cdot\varepsilon^*(s). \tag{9.39}$$

Funcția de transfer a întregului sistem se deduce pe baza relațiilor stabilite anterior

$$Y^*(s)=[H_eH_f(s)]^*\cdot\varepsilon^*(s)=\frac{[H_eH_f(s)]^*}{1+[H_eH_f(s)]^*}\cdot R^*(s)$$

sau

$$H_0^*(s)=\frac{Y^*(s)}{R^*(s)}=\frac{[H_eH_f(s)]^*}{1+[H_eH_f(s)]^*}; \tag{9.40}$$

$$H_0(z)=\frac{H_eH_f(z)}{1+H_eH_f(z)}=\frac{P(z)}{Q(z)}.$$

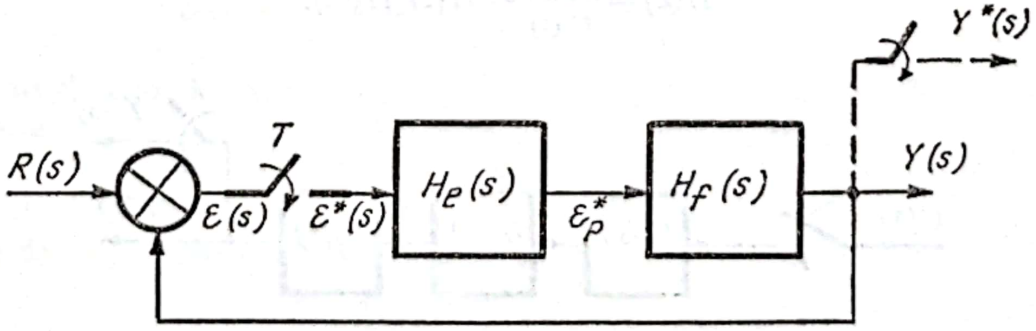


Fig. 9.18. Schema funcțională a unui sistem cu eșantionare

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 9.3

Considerăm că în sistemul de reglare prezentat în figura 9.18, procesul continuu are funcţia de transfer $H_f(s)=\frac{1}{s+1}$. Funcţia de transfer în z a căii directe a sistemului este dată de relaţia

$$H_d(z)=\mathcal{Z}[H_e(s)\cdot H_f(s)]=\mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-sT}}{s}\cdot\frac{1}{s+1}\right]$$

sau

$$H_d(z)=H_e\cdot H_f(z)=\mathcal{Z}\frac{1}{s\,(s+1)}-\mathcal{Z}\left[\frac{e^{-sT}}{s(s+1)}\right].$$

Dacă ţinem seama că $e^{-sT}=z^{-1}$ şi de rezultatul obţinut în exemplul anterior, se obţine

$$H_d(z)=(1-z^{-1})\left[\mathcal{Z}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right)\right]=$$

$$=(1-z^{-1})\left[\mathcal{Z}\left(\frac{1}{s}\right)-\mathcal{Z}\left(\frac{1}{s+1}\right)\right]=$$

sau

$$H_d(z)=(1-z^{-1})\left[\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}}\right]=\frac{(1-e^{-T})z^{-1}}{1-e^{-T}z^{-1}}.$$

Funcţia de transfer în z a întregului sistem este dată de relaţia

$$H_0(z)=\frac{H_d(z)}{1+H_d(z)}=\frac{H_eH_f(z)}{1+H_eH_f(z)}=\frac{(1-e^{-T})z^{-1}}{1+(1-2e^{-T})z^{-1}}.$$

Pentru o structură de sistem de reglare numerică prezentată în figura 9.19, dacă notăm prin $H_R(z)$ funcţia de transfer a regulatorului numeric obţinem uşor expresia funcţiei de transfer $H_0(z)$ a întregului sistem.

Ieşirea eşantionată a sistemului se calculează cu relaţia

$$Y(z)=\mathcal{Z}[P(s)\cdot H(s)]+H_R(z)\cdot\mathcal{Z}[H_e(s)\cdot H(s)]\cdot\varepsilon(z)$$

sau

$$Y(z)=P\cdot H(z)+H_R(z)\cdot H_e\cdot H(z)\cdot\varepsilon(z).$$

Dacă ţinem seama că $\varepsilon(z)=R(z)-Y(z)$, se obţine $Y(z)$ din ultima relaţie, sub forma

$$Y(z)=\frac{H_eH(z)\cdot H_R(z)}{1+H_R(z)\cdot H_eH(z)}\cdot R(z)+\frac{PH(z)}{1+H_R(z)\cdot H_eH(z)}. \qquad (9.41)$$

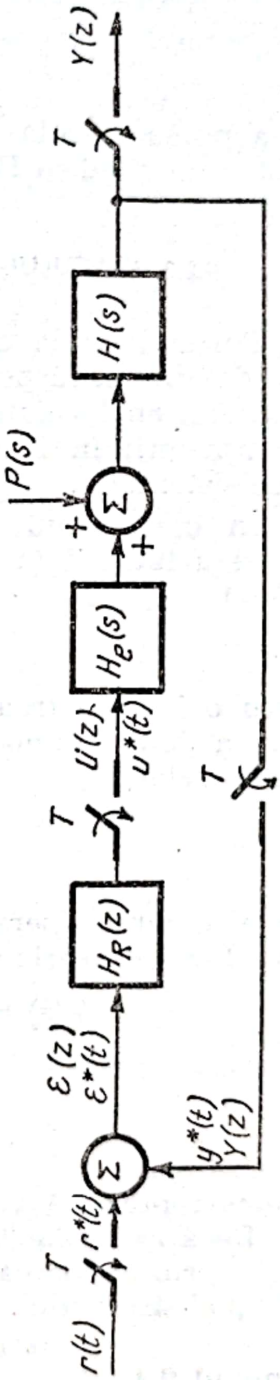


Fig. 9.19. Schema funcţională a unui sistem automat alcătuit numai din elemente cu acţiune discretă.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru perturbație $P(s)=0$ se obține funcția de transfer $H_0(z)$

$$H_0(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{H_eH(z)}{1+H_R(z)\cdot H_eH(z)} \tag{9.42}$$

iar pentru $R(s)=0$, se obține

$$Y(z)=\frac{PH(z)}{1+H_R(z)\cdot H_eH(z)},$$

fără a putea calcula funcția de transfer a sistemului în raport cu perturbația dat fiind că $P(z)$ nu poate fi explicitat.

9.2.3. CALCULUL RĂSPUNSULUI UNUI SISTEM CU EȘANTIONARE

Pornind de la expresia funcției de transfer a sistemului $H_0(z)$ se poate determina răspunsul în timp al acestuia printr-una dintre metodele amintite: transformata z inversă, metoda seriilor de puteri sau metoda descompunerii în fracții simple a funcției ce definește mărimea de la ieșirea sistemului.

În cazul unui sistem de reglare automată, cunoașterea funcției $H_0(z)$ și a intrării (a referinței) $r(t)$ a sistemului permite calculul funcției $Y(z)$.

$$Y(z)=H_0(z)\cdot R(z).$$

Pentru o intrare treaptă unitară, dacă funcția de transfer este dată ca raport a două polinoame în z, $P(z)$, și $Q(z)$, ieșirea sistemului se calculează cu relația

$$Y(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}\cdot\frac{z}{z-1}. \tag{9.43}$$

Prin efectuarea operației de împărțire a celor două polinoame se poate obține $Y(z)$ ca o serie de puteri

$$Y(z)=y_0+y_1z^{-1}+y_2z^{-2}+\ldots+y_kz^{-k}+\ldots \tag{9.44}$$

sau

$$Y(z)=\sum_0^\infty y_iz^{-i},$$

unde y_i reprezintă valorile funcției în momentele de eșantionare.

Dacă expresia (9.43) poate fi scrisă sub forma unei sume de fracții simple, prin aplicarea transformatei în z inversă, se determină răspunsul în timp al sistemului.

Exemplul 9.4

Pentru a ilustra modul de obținere a răspunsului unui sistem cu eșantionare considerăm că funcția de transfer $H_0(z)$ are următoarea expresie

$$H_0(z)=\frac{3}{(1-z^{-1})\ (1-0{,}5z^{-1})}:$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă intrarea sistemului este o treaptă unitară $R(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$ se obține ieșirea $Y(z)$ a sistemului

$$Y(z)=H_0(z)\cdot R(z)=\frac{3}{(1-z^{-1})\ (1-0{,}5z^{-1})}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}},$$

sau după descompunerea în fracții simple

$$Y(z)=\frac{6z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}+\frac{3}{1-0{,}5z^{-1}}.$$

Din tabelul de transformate în z prezentat în anexa A-1, se obține transformata z inversă

$$y(t)=6t+3e^{-0{,}694t},$$

unde constanta 0,5 din termenul exponențial este obținută din $e^{-0{,}694}=0{,}5$.

Un rezultat similar se obține dacă scriem funcția $Y(z)$ sub forma unei serii de puteri obținută prin împărțirea celor două polinoame de la numărătorul și numitorul funcției $Y(z)$

$$Y(z)=3+7{,}5z^{-1}+12{,}75z^{-2}+18{,}325z^{-3}+24{,}1875z^{-4}+\ldots$$

Astfel, valorile funcției $y(t)$ în momentele de eșantionare sînt:

$$y(0)=3;$$

$$y(1)=7{,}5;$$

$$y(2)=12{,}75;$$

$$y(3)=18{,}325;$$

$$y(4)=24{,}1875\ldots \text{ etc.}$$

În figura 9.20 este prezentat răspunsul sistemului pentru o intrare treaptă unitară.

Exemplul 9.5

Pentru o funcție $Y(z)$ definită prin raportul a două polinoame în z

$$Y(z)=\frac{z\,(0{,}368z+0{,}264)}{(z-1)\ (z^2-z+0{,}632)},$$

răspunsul se obține dacă efectuăm împărțirea celor două polinoame. Astfel $Y(z)$ după efectuarea operației de împărțire poate fi scris sub forma

$$Y(z)=0{,}368z^{-1}+z^{-2}+1{,}4z^{-3}+1{,}4z^{-4}+$$

$$+1{,}15z^{-5}+0{,}9z^{-6}+0{,}8z^{-7}+0{,}86z^{-8}+0{,}97z^{-9}+\ldots$$

Valorile funcției $y(t)$ în momentele de eșantionare fiind: $y(0)=0$; $y(1)=0{,}368$; $y(2)=1$; $y(3)=1{,}4$; $y(5)=1{,}15$; ... răspunsul sistemului definit prin intermediul acestor valori este reprezentat în figura 9.21.

De reținut faptul că pentru un sistem cu eșantionare, calculul răspunsului tranzitoriu se poate efectua pornind de la expresia funcției de

Scanned with OKEN Scanner

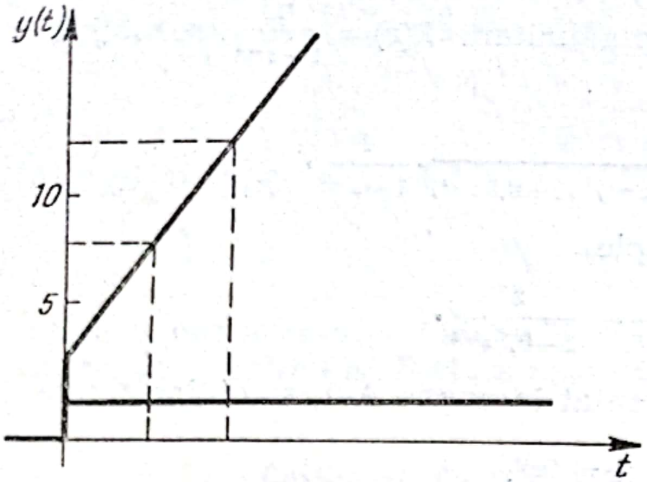


Fig. 9.20. Răspunsul indicial pentru sistemul considerat în exemplul 9.4.

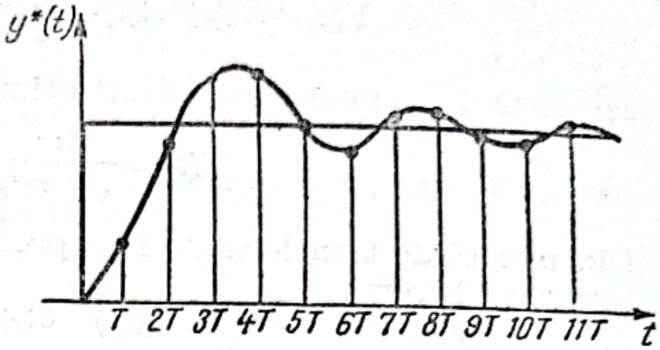


Fig. 9.21. Răspunsul sistemului considerat în exemplul 9.5.

transfer a sistemului în domeniul z și cunoscînd transformata z a mărimii de la intrare. Răspunsul la perturbație se poate obține într-o manieră similară.

În cazul sistemelor pentru care perioada de eșantionare este mică în comparație cu constanta de timp a procesului, această evaluare a răspunsului prin valorile funcției în momentele de eșantionare este suficient de precisă.

Pentru cazul în care între momentele de eșantionare funcția prezintă oscilații, evident se impune cunoașterea legii de variație și între momentele de eșantionare. În acest scop se recomandă utilizarea transformatei z modificată.

Pornind de la transformata în z întîrziată din relația (9.27) și admițînd că întîrzierea τ este definită prin relația

$$\tau=(\lambda+\Delta)T=nT, \tag{9.45}$$

unde λ este un număr întreg de perioade și Δ o fracțiune din T, transformata z întîrziată a unei funcții $f(t-\tau)$ se deduce astfel

$$f^*(t-\tau)=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT-\tau)\delta(t-kT) \tag{9.46}$$

sau prin înlocuirea lui τ în relația (9.46) se obține

$$f^*(t-\tau)=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT-\lambda T-\Delta T)\cdot\delta(t-kT). \tag{9.47}$$

Aplicînd transformata z ambilor termeni și ținînd seama de teorema întîrzierii se obține

$$\mathcal{Z}\,[f^*(t-\tau)]=z^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} f(kT-\Delta T)z^{-k}. \tag{9.48}$$

Pentru $\lambda=0$, relația (9.48) devine

$$\mathcal{Z}\,[f^*(t-\Delta T)]=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT-\Delta T)z^{-k}=F(z,\,\Delta). \tag{9.49}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă vom nota $\Delta=1-m$, se obține transformata în z modificată a funcției $f(t)$, sub forma

$$\mathcal{Z}[f^*(t-T+mT)]=z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} f(kT+mT)z^{-k}=F(z, m). \tag{9.50}$$

Pentru calculul răspunsului unui sistem între momentele de eșantionare se definește o funcție de transfer în z modificată sub forma

$$H_0(z, m)=\frac{Y(z, m)}{R(z)},$$

care permite pentru valori ale lui m cuprinse între 1 și 0 să se determine răspunsul sistemului între momentele de eșantionare.

Pornind de la definiția transformatei în z modificate s-au calculat aceste transformate pentru funcțiile uzuale utilizate în automatică (v. anexa).

Exemplul 9.6

Pentru o funcție de tip $f(t)=e^{-at}$, transformata în z modificată se calculează astfel:

$$f(k+m)T=e^{-a(k+m)T}, \tag{9.51}$$

$$F(z, m)=z^{-1}\sum_{k=0} e^{-a(k+m)T}z^{-k}= \tag{9.52}$$

$$=z^{-1}\,e^{-amT}+e^{-a(m+1)T}\cdot z^{-1}+\cdots=\frac{z^{-1}\,e^{-amT}}{1-e^{-aT}z^{-1}}=\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}. \tag{9.53}$$

Pentru a ilustra modul de aplicare a transformatei în z modificată la calculul răspunsului unui sistem considerăm următorul exemplu.

Exemplul 9.7

Se dă sistemul al cărui model este prezentat în figura 9.22.

În schema funcțională s-a considerat un element de întîrziere fictiv pentru a ilustra faptul că transformata z modificată se obține ca urmare a întîrzierii semnalului de la ieșirea sistemului. Funcția de transfer a sistemului închis în acest caz se scrie sub forma

$$H_0(z, m)=\frac{Y(z, m)}{R(z)}=\frac{1{,}5\,H_e H_f(z, m)}{1+1{,}5\,H_e H_f(z)},$$

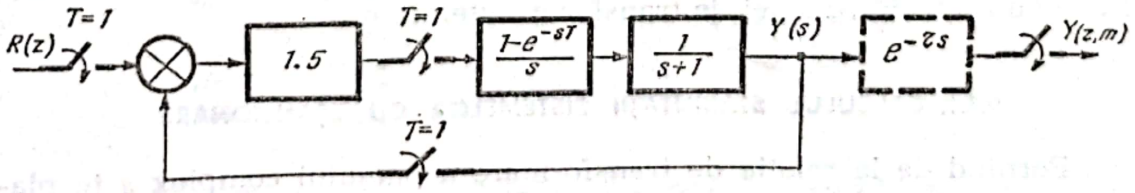


Fig. 9.22. Schema funcțională a unui sistem automat cu eșantionare cu semnalul la ieșire întîrziată cu timpul τ.

Scanned with OKEN Scanner

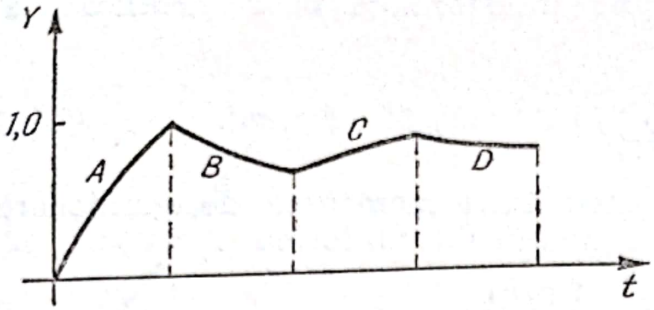


Fig. 9.23. Răspunsul sistemului considerat în exemplul 9.7, calculat cu ajutorul transformatei Z — modificată.

unde:

$$H_eH_f(z, m)=\mathcal{Z}_m[H_e(s)\cdot H_f(s)]=$$

$$=\mathcal{Z}[H_e(s)\cdot H_f(s)\cdot e^{-\tau s}]=$$

$$=\frac{z^{-1}[(1-e^{-mT})+(e^{-mT}-e^{-T})z^{-1}]}{1-e^{-T}z^{-1}};$$

$$H_eH_f(z)=\mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-sT}}{s(s+1)}\right]=$$

$$=\frac{(1-e^{-T})z^{-1}}{1-e^{-T}z^{-1}}.$$

Astfel, prin înlocuirea expresiilor celor două funcţii în z în relaţia ce determină pe $H_0(z, m)$ se obţine

$$H_0(z, m)=\frac{1{,}5\,z^{-1}[(1-e^{-mT})+(e^{-mT}-e^{-T})z^{-1}]}{1-e^{-T}z^{-1}+1{,}5\,(1-e^{-T})z^{-1}}.$$

Pentru o intrare treaptă unitară se obţine transformata z modificată a ieşirii sub forma

$$Y(z, m)=\frac{1{,}5\,z^{-1}[(1-e^{-mT})+(e^{-mT}-e^{-T})z^{-1}]}{1-0{,}42\,z^{-1}-0{,}58\,z^{-2}}$$

sau

$$Y(z, m)=1{,}5(1-e^{-mT})z^{-1}+1{,}5(0{,}58e^{-mT}+$$

$$+0{,}052)z^{-2}+1{,}5(0{,}602-0{,}34e^{-mT})z^{-3}+\ldots$$

Rezultatul este ilustrat în figura 9.23. Răspunsul pe porţiuni este definit prin relaţiile:

$$A:\ 1{,}5(1-e^{-mT});$$

$$B:\ 1{,}5(0{,}58e^{-mT}+0{,}052);$$

$$C:\ 1{,}5(0{,}602-0{,}341\,e^{-mT});$$

$$D:\ 1{,}5(0{,}193\,e^{-mT}+0{,}283).$$

9.3. CALCULUL PERFORMANŢELOR SISTEMELOR CU EŞANTIONARE

Performanţele unui sistem cu eşantionare se definesc în mod similar ca în cazul sistemelor continui. Cunoaşterea răspunsului sistemului permite determinarea performanţelor staţionare şi tranzitorii. Unele performanţe ale sistemului cu eşantionare pot fi determinate direct pe baza funcţiei de transfer în z a sistemului fără a obţine transformata inversă. Astfel, stabilitatea sistemului şi eroarea în regim staţionar pot fi determinate cu ajutorul funcţiei de transfer a sistemului.

9.3.1. CALCULUL STABILITĂŢII SISTEMELOR CU EŞANTIONARE

Pornind de la relaţia de transformare a planului complex s în planul complex z ($z=e^{Ts}$) rezultă că semiplanul stîng al planului complex s este transformat în planul z într-o familie de cercuri cu raza mai mică de-

Scanned with OKEN Scanner

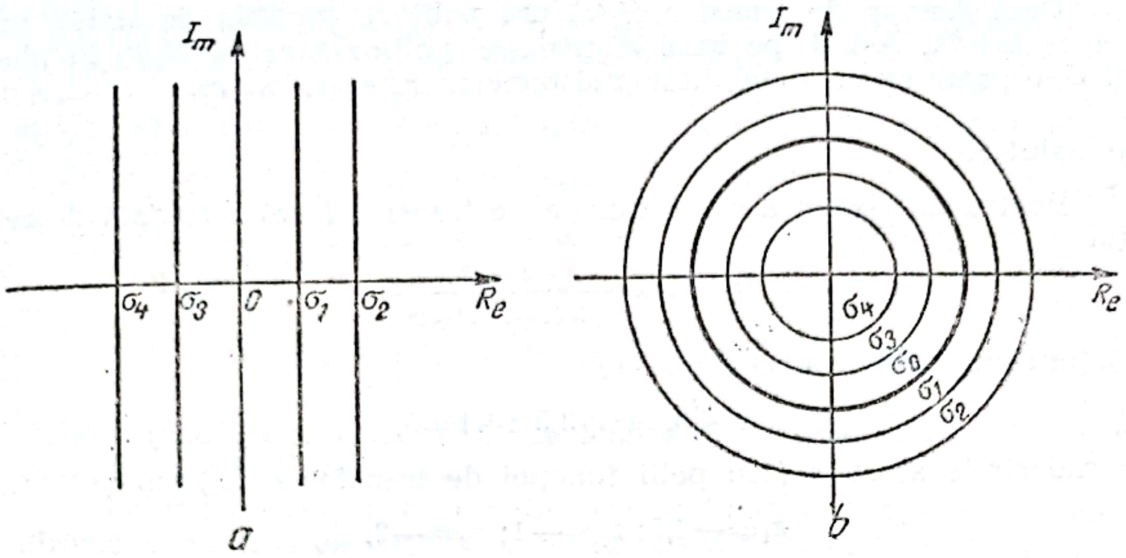


Fig. 9.24. Transformarea planului complex s în planul complex z:
a — planul complex s; *b* — planul complex z.

cît unitatea. Axa imaginară din planul s este transformată în planul z într-un cerc cu centrul în origine și raza egală cu unitatea. Acest lucru este evident dacă ținem seama că $z=e^{Ts}=e^{T(\sigma+j\omega)}=e^{\sigma T}\cdot e^{j\omega T}$. Pentru $\sigma=0$, rezultă $z=e^{j\omega T}$, care în planul z pentru diverse valori ω reprezintă un cerc cu raza egală cu unitatea și centrul în origine (fig. 9.24).

Ținînd seama de cele menționate se poate defini condiția necesară și suficientă ca un sistem automat cu eșantionare să fie stabil într-o manieră similară ca pentru un sistem continuu. Astfel, pentru o intrare mărginită, condiția de stabilitate a unui sistem cu eșantionare este ca toți polii funcției de transfer $H_0(z)$ să se situeze în interiorul cercului de rază unitară. Prezența polilor funcției $H_0(z)$ pe circumferința cercului de rază unitară determină oscilații întreținute ale mărimii de ieșire.

Astfel, domeniul de stabilitate pentru sistemele cu eșantionare este numai interiorul cercului de rază unitară (fig. 9.25).

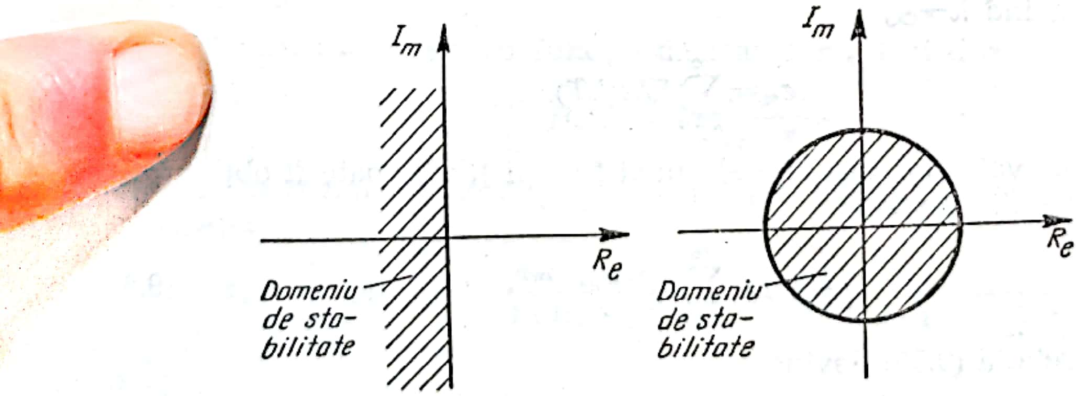


Fig. 9.25. Domeniul de stabilitate al sistemului liniar:
a — în planul complex s; *b* — în planul complex z.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă funcția de transfer $H_0(z)$ are polii z_i, condiția de stabilitate este ca $|z_i|<1$. Astfel, pe baza distribuției polilor funcției $H_0(z)$ în planul z se poate aprecia stabilitatea sistemelor cu eșantionare.

Exemplul 9.8

Pentru un sistem a cărui funcție de transfer $H_0(z)$ este dată de relația

$$H_0(z)=\frac{1+2z+z^3}{1+3{,}5z+3{,}5z^2+z^3},$$

ecuația caracteristică a acestuia este

$$z^3+3{,}5\,z^2+3{,}5\,z+1=0,$$

iar rădăcinile acesteia (sau polii funcției de transfer $H_0(z)$) sînt:

$$z_1=-0{,}5;\ z_2=-1;\ z_3=-2.$$

Acest sistem este instabil, avînd un singur pol situat în interiorul cercului de rază unitară.

Pentru aprecierea stabilității sistemelor cu eșantionare sînt cunoscute mai multe criterii de stabilitate: Criteriul Shur-Cohn, criteriul Jury etc. [46, 35].

9.3.2. CALCULUL ERORII STAȚIONARE

Valoarea staționară a unei secvențe de semnale discrete $\varepsilon^*(t)$ poate fi determinată cu ajutorul transformatei Laplace discrete a funcției $\varepsilon^*(t)$.

Vom considera mai întîi funcția $\varepsilon(kT)$ ca o sumă de incremente (diferențe) pentru toate momentele de eșantionare începînd cu $t=0$.

$$\varepsilon(kT)=\varepsilon(0)+[\varepsilon(T)-\varepsilon(0)]+\ldots+[\varepsilon(kT)-\varepsilon(k-1)T]=$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\nabla\varepsilon(iT). \tag{9.54}$$

Valoarea staționară la care secvența $\varepsilon(kT)$ tinde poate fi obținută din relația (9.54) făcînd $k\to\infty$

$$\varepsilon_{st}=\sum_{k=0}^{\infty}\nabla\varepsilon(kT). \tag{9.55}$$

Suma tuturor valorilor discrete ale unei funcții $f(kT)$ poate fi obținută cu ajutorul imaginii acesteia

$$F^*(s)=\sum_{k=0}^{\infty}f(kT)e^{-skT}. \tag{9.56}$$

Dacă $s=0$, relația (9.56) devine

$$F^*(0)=\sum_{0}^{\infty}f(kT).$$

Scanned with OKEN Scanner

Astfel

$$\varepsilon^*_{st}=\lim_{s\to 0} \nabla\varepsilon^*(s), \tag{9.57}$$

unde $\Delta\varepsilon^*(s)$ este transformata Laplace a secvenței diferenței de impulsuri

$$\nabla\varepsilon^*(t)=\varepsilon^*(t)-\varepsilon^*(t-T)$$

$$\nabla\varepsilon^*(s)=\varepsilon^*(s)-e^{-sT}\varepsilon^*(s)=(1-e^{-Ts})\varepsilon^*(s) \tag{9.58}$$

și

$$\varepsilon^*_{st}=\lim_{s\to 0}[1-e^{-Ts}]\ \varepsilon^*(s)=\lim_{s\to 0}\frac{e^{Ts}-1}{e^{Ts}}\varepsilon^*(s). \tag{9.59}$$

Relația (9.59) reprezintă o relație analoagă teoremei valorii finale definită pentru funcții continue.

Pentru un sistem cu eșantionare cu funcția de transfer în z a căii directe $H_d(z)$, eroarea staționară se calculează cu relația

$$\varepsilon_{st}=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\cdot\varepsilon(z)=\lim_{z\to 1}[1-z^{-1}]\frac{R(z)}{1+H_d(z)}. \tag{9.60}$$

Pentru intrare treaptă unitară eroarea se calculează cu relația

$$\varepsilon_{st}=\lim_{z\to 1}[1-z^{-1}]\cdot\frac{z}{z-1}\cdot\frac{1}{1+H_d(z)}=\lim_{z\to 1}\left[\frac{1}{1+H_d(s)}\right], \tag{9.61}$$

sau dacă se consideră că funcția de transfer în z a sistemului deschis este definită prin relația

$$H_d(z)=K\cdot\frac{A(z)}{B(z)},$$

$$\varepsilon_{st}=\lim_{z\to 1}\cdot\left[\frac{B(z)}{B(z)+KA(z)}\right]. \tag{9.62}$$

Această eroare staționară va fi zero numai dacă polinomul $B(z)$ conține termenul $(z-1)$. Prezența acestui termen implică evident prezența în funcția de transfer $H_d(s)$ a unui pol în origine.

Exemplul 9.9

Pentru un sistem cu funcția de transfer a căii directe definită prin

$$H_d(z)=\frac{K(1-e^{-aT})}{z-e^{-aT}},$$

eroarea în regim staționar pentru o intrare treaptă unitară se calculează cu relația

$$\varepsilon_{st}=\lim_{z\to 1}[1-z^{-1}]\cdot\frac{R(z)}{1+H_d(z)}=\lim_{z\to 1}[1-z^{-1}]\cdot\frac{z}{z-1}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{K(1-e^{-aT})}{z-e^{-aT}}},$$

deci

$$\varepsilon_{st}=\frac{1}{1+K}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Relația obținută este identică cu cea pentru sistemul continuu.

Dacă în relația (9.60) introducem funcția de transfer a sistemului în stare închisă, ținînd seama de relația de legătură între $H_0(z)$ și $H_d(z)$

$$H_0(z)=\frac{H_d(z)}{1+H_d(z)},$$

se obține

$$\varepsilon_{st}=\lim_{z\to 1}[1-z^{-1}]\cdot[1-H_0(z)]R(Z). \tag{9.63}$$

Pentru diverse semnale de intrare și diverse funcții de transfer $H_d(z)$ sau $H_0(z)$ se determină eroarea în regim staționar într-o manieră similară ca pentru sistemele continue.

9.4. CORECȚIA ȘI PROIECTAREA SISTEMELOR CU EȘANTIONARE

9.4.1. CORECȚIA SISTEMELOR CU EȘANTIONARE

Corecția sistemelor cu eșantionare se impune în cazul în care performanțele staționare și tranzitorii ale sistemului nu satisfac criteriile de performanță impuse. Răspunsul sistemului cu eșantionare este caracterizat în esență prin aceleași performanțe cunoscute în cadrul sistemelor continue: suprareglaj, durata procesului tranzitoriu, eroare staționară, timp de creștere, timp de întîrziere etc., de aceea introducerea circuitelor de corecție în sistemele cu eșantionare trebuie să compenseze aceste categorii de performanțe.

Particularitățile sistemelor cu eșantionare (legate de prezența în sistem a semnalelor continue cît și a celor discontinue) introduc o serie de dificultăți în ceea ce privește corecția performanțelor. Astfel, la asemenea sisteme este posibilă atît corecția cu elemente analogice cît și cu elemente numerice.

Așa cum se arată în figura 9.26, s-a notat prin $H_F(s)$ partea fixată a sistemului iar prin $H_c(s)$ s-a notat funcția de transfer a circuitului de corecție. În figura 9.26, *a*, corecția sistemului se asigură prin introducerea în serie cu procesul a elementului de corecție cu funcția de transfer $H_c(s)$, iar în figura 9.26, *b* se utilizează un element de corecție numeric cu funcția de transfer $H^*_c(s)$.

Corecția se poate face și prin introducerea unor elemente corectoare pe reacție, fie de tip analogic fie de tip numeric (fig. 9.27).

Scriind funcțiile de transfer echivalente ale sistemelor reprezentate în figura 9.26 apare clar avantajul, din punctul de vedere al proiectării prin corecție a sistemelor, al schemelor prevăzute cu corecție numerică.

Pentru figura 9.26, *a*, funcția de transfer are forma

$$H_0(z)=\frac{H_e\cdot H_c\cdot H_F(z)}{1+H_eH_cH_F(z)}, \tag{9.64}$$

iar pentru schema prezentată în figura 9.26, *b* rezultă

$$H_0(z)=\frac{H_c(z)\cdot H_eH_F(z)}{1+H_e(z)\cdot H_eH_F(z)}. \tag{9.65}$$

Scanned with OKEN Scanner

Este clar că în cazul în care se dorește determinarea circuitului de corecție care asigură anumite performanțe impuse, respectiv pentru o anumită funcție $[H_0(z)]_{impus}$, este dificil a determina funcția de transfer a circuitului de corecție continuu din relația (9.64), pe cînd în cazul unei corecții numerice se determină simplu funcția de transfer a circuitului de corecție din relația (9.65)

$$H_c(z)=\frac{1}{H_e H_F(z)}\cdot\frac{H_0(z)}{1-H_0(z)}. \qquad (9.66)$$

Pentru o funcție de transfer dată $H_e H_F(z)$ și pentru anumite performanțe impuse prin $[H_0(z)]_{impus}$, se poate determina funcția de transfer a blocului de corecție, respectiv legea de reglare. Într-o manieră similară se deduc și funcțiile de transfer echivalente pentru schemele din figura 9.27 și care au expresia

$$H_0(z)=\frac{H_e H_F(z)}{1+H_e H_c(z)+H_e H_F(z)} \qquad (9.67)$$

pentru sistemul prezentat în figura 9.27, *a* și

$$H_0(z)=\frac{H_F(z)}{1+H_F G(z)+H_e H_F(z)\cdot H_e(z)} \qquad (9.68)$$

pentru sistemul prezentat în figura 9.27, *b*.

Apare evident faptul că în cazul utilizării corecției cu circuite numerice se poate ușor determina funcția de transfer a acestora direct din funcția de transfer impusă sistemului.

În cazul utilizării unor blocuri analogice pentru corecția sistemului se poate determina modelul matematic al acestora pe baza unor încercări, nefiind evidentă influența funcției de transfer $H_c(s)$ a circuitului de corecție asupra comportării întregului sistem. Deși din punctul de vedere al realizării blocurilor de corecție analogice acestea prezintă avantaje față de blocurile numerice, totuși, din punctul de vedere al algoritmului de alegere și acordare a acestor circuite de corecție analogice, corecția analogică este mai dificil de realizat.

Alegerea blocurilor de corecție analogică este limitată și prin faptul că performanțele sînt inferioare în comparație cu performanțele obținute prin utilizarea circuitelor de corecție numerică. De asemenea, algoritmii de corecție sau reglare ce pot fi obținuți pe cale analogică sînt mai limitați față de algoritmii ce pot fi obținuți pe cale numerică.

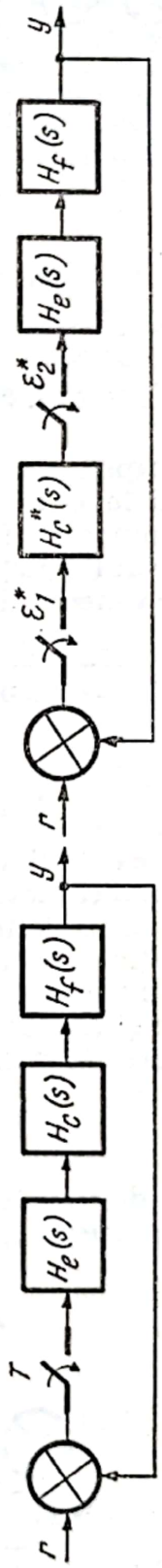


Fig. 9.26. Schema unui sistem cu eșantionare cu corecție de tip serie:
a — rețea de corecție continuă; *b* — rețea de corecție numerică.

Scanned with OKEN Scanner

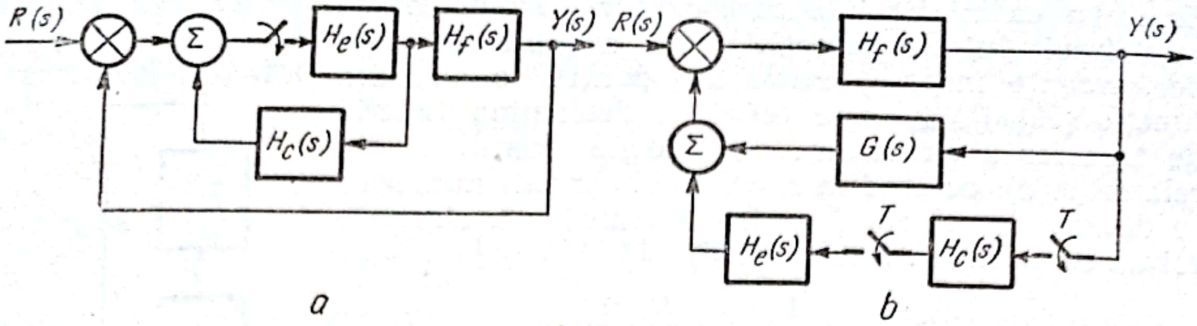


Fig. 9.27. Schemele unor sisteme cu corecţie în paralel:
a — reţea de corecţie continuă; *b* — reţea de corecţie numerică.

9.4.2. PROIECTAREA SISTEMELOR DE REGLARE NUMERICĂ

Etapele proiectării unui sistem cu eşantionare sau numeric sînt aceleaşi ca în cazul sistemelor cu acţiune continuă. Pentru o structură de sistem numeric (fig. 9.28) unde toate componentele sînt caracterizate prin intermediul funcţiilor de transfer în z, se poate determina modelul matematic general al acestuia

$$Y(z)=\frac{H_R(z)\cdot H_F(z)}{1+H_R(z)\cdot H_F(z)}R(z)+\frac{H_{p2}(z)\cdot H_F(z)}{1+H_R(z)H_F(z)}P_2(z)+\frac{H_{p1}(z)}{1+H_R(z)H_F(z)}P_1(z) \tag{9.69}$$

sau

$$Y(z)=H_0(z)\cdot R(z)+H_{0p1}(z)\cdot P_1(z)+H_{0p2}(z)\cdot P_2(z).$$

Realizarea unui răspuns dorit, performanţe staţionare şi tranzitorii impuse, implică determinarea algoritmului de reglare $H_R(z)$ atunci cînd sînt cunoscute celelalte funcţii de transfer ce intervin în relaţia (9.69) şi forma de variaţie a intrării şi a mărimilor perturbatoare.

Pentru cazul în care se neglijează perturbaţiile care acţionează la intrarea şi ieşirea părţii fixate a sistemului se poate determina algoritmul de reglare $H_R(z)$ din relaţia (9.69)

$$H_R(z)=\frac{1}{H_F(z)}\cdot\frac{H_0(z)}{1-H_0(z)}. \tag{9.70}$$

Funcţia de transfer $H_F(z)$ se poate obţine dacă se cunosc funcţiile de transfer ale procesului, elementului de execuţie şi traductorului de reacţie, $H_0(s)$.

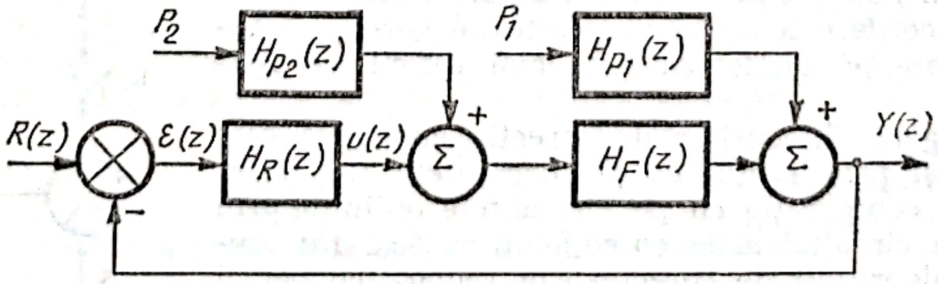


Fig. 9.28. Schema generală a unui sistem de reglare automată numeric.

Scanned with OKEN Scanner

Astfel $H_F(z)=Z[H_e(s)\cdot H(s)]$, $H_e(s)$ fiind funcția de transfer a extrapolatorului. Ținînd seama că $H_F(z)$ și $H_0(z)$ pot fi scrise sub forma unui raport de două polinoame în z^{-1}, atunci algoritmul de reglare numerică, conform relației (9.70), poate fi obținut sub forma

$$H_R(z)=\frac{Q_m(z)}{P_n(z)}=\frac{q_0+q_1z^{-1}+\cdots+q_mz^{-m}}{p_0+p_1z^{-1}+\cdots+p_nz^{-n}}. \tag{9.71}$$

Condiția de realizabilitate fizică a acestui algoritm este ca $m<n$, iar gradul polinomului de la numărătorul funcției de transfer $H_0(z)$ să fie, de asemenea, mai mic decît gradul polinomului de la numitorul acestei funcții de transfer.

Un algoritm de reglare convențional de tip *PID* este caracterizat prin următoarea ecuație cu diferențe

$$u(k)=K_R\left\{\varepsilon(k)+\frac{T}{T_i}\sum_{i=0}^{k}\varepsilon(i-1)+\frac{T_d}{T}[\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)]\right\}+u_0. \tag{9.72}$$

Acest algoritm de reglare evidențiază faptul că parametrii de acord în acest caz sînt influențați de valoarea perioadei de eșantionare T. Un algoritm incremental se obține dacă vom scrie ecuația (9.72) pentru o secvență $(k-1)$

$$u(k-1)=K_R\left\{\varepsilon(k-1)+\frac{T}{T_i}\sum_{i=0}^{k}\varepsilon(i-1)+\frac{T_d}{T}[\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)]\right\}+u_0 \tag{9.73}$$

și vom efectua scăderea între cele două secvențe

$$u(k)-u(k-1)=K_R\left(1+\frac{T_d}{T}\right)\cdot\varepsilon(k)-K_R\left(1+2\frac{T_d}{T}-\frac{T}{T_i}\right)\cdot\varepsilon(k-1)+K_R\cdot\frac{T_d}{T}\cdot\varepsilon(k-2)$$

sau

$$\Delta u(k)=q_0\cdot\varepsilon(k)+q_1\cdot\varepsilon(k-1)+q_2\cdot\varepsilon(k-2). \tag{9.74}$$

Pentru a obține funcția de transfer a regulatorului *PID* aplicăm transformata z ecuației (9.74):

$$U(z)[1-z^{-1}]=[q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}]E(z);$$

$$H_R(z)=\frac{q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}}{1-z^{-1}}=\frac{U(z)}{E(z)}. \tag{9.75}$$

Dacă în cazul general scriem relația între $u(k)$ și $u(k-1)$ sub forma

$$u(k)=u(k-1)+q_0\cdot\varepsilon(k)+q_1\cdot\varepsilon(k-1)+q_2\cdot\varepsilon(k-2)+\ldots+q_m\,\varepsilon(k-m),$$

putem obține pentru diverse valori ale lui m algoritmi de reglare convenționali *P*, *PI*, *PID* etc.

Pentru un algoritm *PID*, dacă intrarea $\varepsilon(k)$ este o treaptă unitară

$$\varepsilon(k)=1(k)=\begin{cases}1 & \text{pentru } k\geqslant 0;\\ 0 & \text{pentru } k<0,\end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

putem scrie următoarele relații:

$$\begin{aligned} &u(0)=q_0;\\ &u(1)=u(0)+q_0+q_1=2q_0+q_1;\\ &u(2)=u(1)+q_0+q_1+q_2=3q_0+2q_1+q_2;\\ &\cdot\\ &\cdot\\ &\cdot\\ &u(k)=u(k-1)+q_0+q_1+q_2=(k+1)q_0+kq_1+(k-1)q_2. \end{aligned} \tag{9.76}$$

Dacă

$u(1)<u(0)$ rezultă $q_0+q_1<0$ sau $q_1<-q_0$; dacă $u(k)>u(k-1)$ pentru $k\geqslant 2$ rezultă: $q_0+q_1+q_2>0$, $q_2>-(q_0+q_1)$.

Admițînd că $q_0>0$, rezultă următoarele relații între parametrii q_0, q_1 și q_2:

$$q_0>0;\ q_1<-q_0;\ -(q_0+q_1)<q_2<q_0,$$

sau ținînd seama de corespondența între parametrii q_0, q_1 și q_2 și parametrii K_R, T_i, T_d, se obțin relațiile:

$$K_R=q_0-q_2;$$

$$\frac{T_d}{T}=\frac{q_2}{K_R}>0;$$

$$\frac{T}{T_i}=\frac{q_0+q_1+q_0}{K_R}>0.$$

Răspunsurile indiciale ale regulatoarelor *PI* și *PID* sînt prezentate în figurile 9.29, *a*, *b*.

Alegerea și acordarea optică a regulatorului numeric se poate face prin mai multe metode [35, 32].

O metodă de determinare a algoritmului optim de reglare numerică are la bază determinarea funcției $H_0(z)$, care asigură un *răspuns minimal*

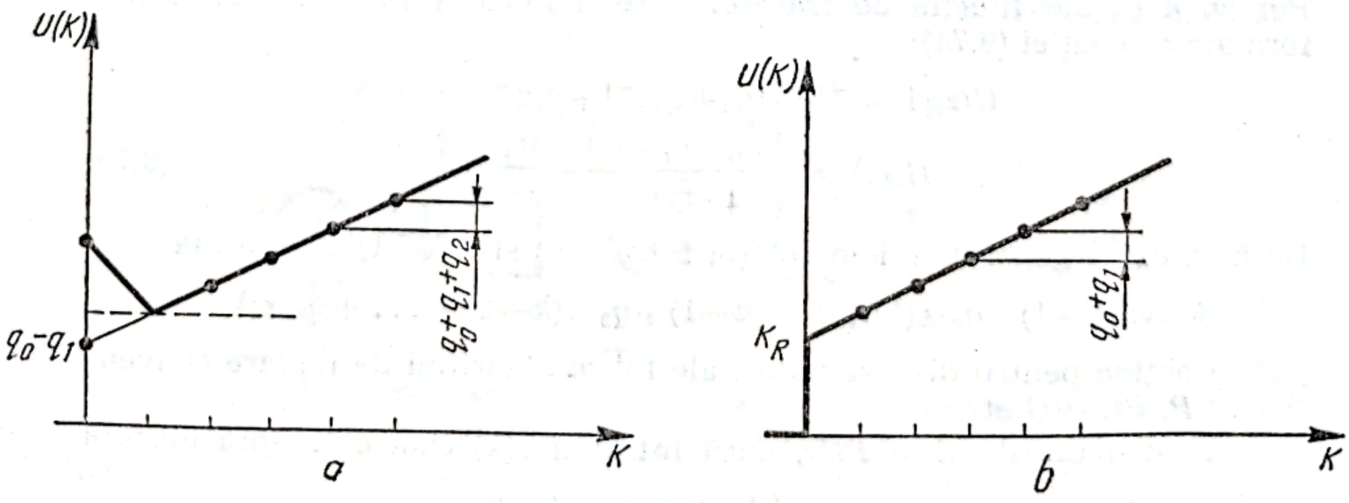


Fig. 9.29. Răspunsul indicial al regulatoarelor cu acțiune discretă:
a — răspunsul regulatorului *PID*; *b* — răspunsul regulatorului *PI*.

Scanned with OKEN Scanner

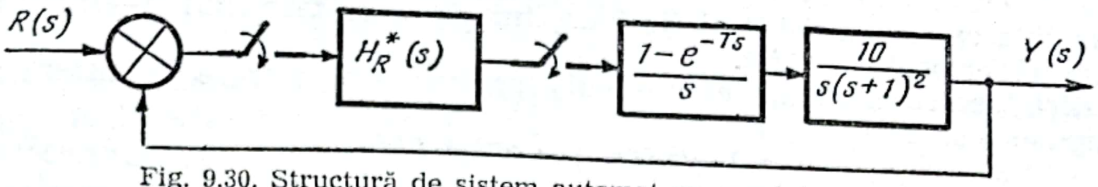


Fig. 9.30. Structură de sistem automat cu regulator numeric.

al sistemului. Un *răspuns minimal* (sau un răspuns dead beat) este acel răspuns care asigură:

— eroare staţionară nulă pentru o intrare dată;

— timpul de creştere egal cu un număr minim de perioade de eşantionare;

— timpul de răspuns (de stabilizare) este limitat;

— toate modelele elementelor componente ale sistemului trebuie să fie fizic realizabile.

Algoritmul de alegere şi acordare a regulatorului numeric pentru asigurarea unui răspuns minimal are următoarele etape:

1. Se alege o funcţie $H_0(z)$ care să asigure performanţele impuse cu condiţia realizării fizice a regulatorului.

2. Pentru o funcţie $H_F(z)$ a părţii fixe se determină $H_R(z)$, care asigură eroarea staţionară nulă pentru o intrare dată.

3. Se verifică realizabilitatea fizică a regulatorului. Pentru o structură de sistem cu regulator numeric (fig. 9.30), funcţia de transfer a regulatorului rezultă

$$H_R(z)=\frac{H_0(z)}{1-H_0(z)}\cdot\frac{1}{H_F(z)}, \tag{9.77}$$

unde $H_0(z)$ reprezintă funcţia de transfer impusă întregului sistem.

Pentru o intrare de tipul $r(t)=t^m$, se obţine eroare nulă în regim staţionar numai dacă funcţia de transfer $H_0(z)$ are o anumită expresie.

Eroarea sistemului se defineşte cu relaţia

$$\varepsilon(z)=\frac{R(z)}{1+H_d(z)}=R(z)[1-H_0(z)], \tag{9.78}$$

unde $H_d(z)=H_R(z)\cdot H_F(z)$ reprezintă funcţia de transfer a sistemului deschis.

Ţinînd seama de relaţia de calcul al erorii în regim staţionar, condiţia ca aceasta să fie zero este

$$\varepsilon_{st}=\lim_{z\to 1}[(1-z^{-1})]R(z)\cdot[1-H_0(z)]=0. \tag{9.79}$$

Pentru o intrare de tipul menţionat, din tabelul transformatelor în z rezultă

$$R(z)=\frac{A(z)}{[1-z^{-1}]^n}, \tag{9.80}$$

unde $n=m+1$ şi $A(z)$ este un polinom în z^{-1} fără zerouri la $z=1$.

Înlocuind relaţia (9.80) în (9.79), se obţine

$$\varepsilon_{st}=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\frac{A(z)}{[1-z^{-1}]^n}\cdot[1-H_0(z)]=0. \tag{9.81}$$

Scanned with OKEN Scanner

Condiția ca relația (9.81) să fie îndeplinită este ca termenul $[1—H_0(z)]$ să conțină factorul $[1—z^{-1}]^n$.
Astfel, pentru a obține eroare nulă pentru orice intrare în sistem se impune ca

$$1—H_0(z)=[1—z^{-1}]^n \cdot F(z), \tag{9.82}$$

unde $F(z)$ este un polinom în z^{-1} fără zerouri la $z=1$, polinom ce urmează a fi ales arbitrar.
Pentru eroare nulă din relația (9.82) rezultă expresia lui $H_0(z)$

$$H_0(z)=\frac{z^n-(z-1)^n F(z)}{z^n}. \tag{9.83}$$

Ecuația caracteristică a sistemului cu eroare nulă în regim staționar fiind de forma $z^n=0$, rezultă numărul de perioade după care răspunsul sistemului se stabilizează.

Pentru a obține un răspuns minimal alegem $F(z)=1$, ceea ce conduce la o expresie a lui $H_0(z)$ sub forma

$$H_0(z)=\frac{z^n-(z-1)^n}{z^n}. \tag{9.84}$$

În cazul unei intrări rampă $n=2$ iar expresia lui $H_0(z)$ devine

$$H_0(z)=2z^{-1}—z^{-2}.$$

Realizabilitatea fizică a funcției $H_0(z)$ rezultă dacă $H_R(z)$ și $H_F(z)$ sînt fizic realizabile.

Exemplul 9.10

Să considerăm că funcția de transfer a părții continui a sistemului are forma

$$H_F(z)=\frac{z^{-2}}{1-z^{-1}-z^{-2}}.$$

Se cere alegerea unui regulator numeric pentru obținerea unui răspuns minimal la o intrare treaptă unitară ($n=1$).

Ținînd seama că puterea cea mai mare din dezvoltarea în serie de puteri după z^{-1} a lui $H_F(z)$ este doi, rezultă că cel mai rapid se obține eroare staționară nulă după două perioade:

$$H_0(z)=\frac{H_R(z)\cdot H_F(z)}{1+H_R(z)\cdot H_F(z)};$$

$$H_R(z)=\frac{1}{H_F(z)}\cdot\frac{H_0(z)}{1-H_0(z)}.$$

Dacă alegem $H_0(z)=z^{-1}$ rezultă un regulator fizic nerealizabil

$$H_R(z)=\frac{1-z^{-1}-z^{-2}}{z^{-2}}\cdot\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}=\frac{1-z^{-1}-z^{-2}}{z^{-1}-z^{-2}}.$$

Dacă alegem $H_0(z)=z^{-2}$ rezultă un regulator fizic realizabil

$$H_R(z)=\frac{1-z^{-1}-z^{-2}}{z^{-2}}\cdot\frac{z^{-2}}{1-z^{-2}}=\frac{1-z^{-1}-z^{-2}}{1-z^{-2}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru funcția $F(z)$ rezultă în acest din urmă caz următoarea expresie

$$F(z)=\frac{1-H_0(z)}{1-z^{-1}}=1+z^{-1}.$$

Pentru cazul în care $H_F(z)$ nu conține nici o întîrziere iar zerourile sînt situate în interiorul cercului de rază unitate, funcția $F(z)$ se poate alege egală cu unitatea.

În aceste condiții expresia lui $H_0(z)$ care conduce la răspuns minimal pentru diferite tipuri de intrări este:

$H_0(z)=z^{-1}$ pentru intrare treaptă;

$H_0(z)=2z^{1-}-z^{-2}$ pentru intrare rampă;

$H_0(z)=3z^{-1}-3z^{-2}+z^{-3}$ pentru intrare parabolă.

Este clar faptul că alegerea unui regulator numeric care asigură un răspuns minimal este dependentă de tipul semnalului de intrare. Astfel, alegerea unui regulator pentru intrare treaptă poate fi total necorespunzător pentru intrare rampă sau parabolă (asigurarea erorii staționare zero depinde de tipul intrării).

Se poate spune că sistemul este „acordat" pentru un anumit semnal de intrare și nu răspunde în mod satisfăcător la nici un alt tip de mărime de intrare. Acesta reprezintă unul din neajunsurile metodei de alegere și acordare a regulatoarelor pentru asigurarea unui răspuns minimal.

În esență, această metodă permite alegerea funcției de transfer a regulatorului astfel încît polii și zerourile sale să elimine polii și zerourile nedorite ale lui $H_F(z)$, iar polii funcției $H_0(z)$ să se găsească în originea planului z.

Prezența polului de ordin multiplu al funcției de transfer în circuit închis situat în origine constituie un neajuns al metodei, dată fiind sensibilitatea mare a acestuia la variația oricărui parametru al sistemului. Astfel, un sistem cu răspuns minim este extrem de sensibil la variațiile parametrilor.

Exemplul 9.11

Să se proiecteze un algoritm de reglare numerică care asigură un răspuns cu timp minim, avînd în regim staționar o eroare egală cu zero la intrare rampa unitară, pentru structura prezentată în figura 9.30

$$H_F(z)=\mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot\frac{10}{s(s+1)^3}\right]=\frac{(z+2{,}34)(z+0{,}16)}{(z-1)(z-0{,}368)^2}.$$

De observat că cea mai mică putere a lui $H_F(z)$ este z^{-1}, ceea ce implică ca $H_0(z)$ să conțină pe z^{-1} ca cea mai mică putere. $H_F(z)$ conține un zero în afara cercului de rază unitate ($z=-2{,}34$), acesta trebuind să fie conținut și în $H_0(z)$. Astfel rezultă următoarea formulă pentru $H_0(z)$

$$H_0(z)=(1+2{,}34z^{-1})\cdot[a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+a_3z^{-3}+\ldots],$$

unde valorile coeficienților a_i trebuie determinate. Numărul acestor coeficienți este limitat prin condiția impusă de a obține un răspuns minim în timp.

Pentru ca sistemul să răspundă cu eroare zero la o intrare rampă trebuie îndeplinită condiția

$$1-H_0(z)=[(1-z^{-1})]^2\cdot[1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\ldots]=(1-z^{-1})^2\cdot F(z).$$

Ținînd seama de restricțiile impuse de obținerea unui răspuns minimal, rezultă:

$$H_0(z)=(1+2{,}34z^{-1})(a_1z^{-1}+a_2z^{-2})$$

și

$$1-H_0(z)=(1-z^{-1})^2(1+b_1z^{-1}).$$

Din aceste două relații, prin identificarea coeficienților se obține:

$$-a_1=b_1-2;$$

$$-a_2-2{,}34a_1=1-2b_1;$$

$$-2{,}34a_3=b_1.$$

Prin rezolvarea acestui sistem de ecuații rezultă:

$$a_1=0{,}81;\ a_2=-0{,}51 \text{ și } b_1=1{,}19.$$

Cu aceste valori introduse în expresia lui $H_0(z)$ rezultă expresia funcției de transfer care asigură răspunsul minimal

$$H_0(z)=(1+2{,}34z^{-1})(0{,}81z^{-1}-0{,}51z^{-2})=0{,}81z^{-1}+1{,}38z^{-2}-1{,}19z^{-3}.$$

Regulatorul numeric ce se recomandă în acest caz este caracterizat prin relația

$$H_R(z)=\frac{1}{H_F(z)}\cdot\frac{H_0(z)}{1-H_0(z)}=\frac{(1-z^{-1})\ (1-0{,}368z^{-1})^2}{(1+2{,}34z^{-1})\ (1+0{,}16z^{-1})\ z^{-1}}\cdot$$

$$\cdot\frac{(1+2{,}34z^{-1})\ (0{,}81z^{-1}-0{,}51z^{-2})}{(1-z^{-1})^2\ (1+1{,}19z^{-1})};$$

$$H_R(z)=\frac{0{,}81-1{,}106z^{-1}+0{,}485z^{-2}-0{,}069z^{-3}}{1+0{,}35z^{-1}-1{,}15z^{-2}-0{,}190z^{-3}}.$$

Acest algoritm este fizic realizabil.

Ieșirea sistemului în acest caz se calculează cu relația

$$Y(z)=H_0(z)\cdot R(z)=\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}[\cdot 0{,}81z^{-1}+1{,}38z^{-2}-1{,}19z^{-3}]$$

și are forma prezentată în figura 9.31.

Acordarea unui regulator numeric presupune determinarea valorilor numerice ale parametrilor de acord astfel încît să se asigure comportarea dorită a sistemului. În funcție de modelul matematic al procesului se pot utiliza criterii integrale pentru acordarea regulatorului similar cu cele definite în capitolul 6.

Scanned with OKEN Scanner

Cele mai uzuale criterii integrale utilizate la proiectarea sistemelor numerice au forma:

$$I_1=\sum_0^\infty \varepsilon(k)=\text{minim};$$

$$I_2=\sum_0^\infty [\varepsilon(k)]^2=\text{minim};$$

$$I_3=\sum_0^\infty |\varepsilon(k)|=\text{minim}; \qquad (9.85)$$

$$I_4=\sum_0^\infty k|\varepsilon(k)|=\text{minim};$$

$$I_5=\sum_0^\infty \varepsilon^2(k)+\rho u^2(k)=\text{minim}.$$

Utilizarea primelor trei criterii I_1, I_2 și I_3 asigură un regim tranzitoriu bun în cazul în care eroarea staționară este nulă. Utilizarea criteriului I_5 pentru determinarea comenzii optimale $u(t)$ asigură satisfacerea unui regim tranzitoriu și staționar dorit, dar în același timp și un minim al consumului de energie.

Adoptarea unui criteriu sau a altuia se va face în funcție de aplicație, de tipul sistemului.

Diferența esențială ce apare la acordarea regulatoarelor numerice față de cele analogice constă în faptul că trebuie luată în considerare și valoarea perioadei de eșantionare.

Lopez [40, 39] a dezvoltat o metodă de acordare optimă a regulatoarelor numerice pe baza unor criterii integrale.

În tabelele 9.1 și 9.2 sînt date rezultatele privind parametrii de acord ai regulatoarelor numerice obținuți pentru diverse criterii integrale la variația perturbației și la variația referinței sub formă de treaptă pentru un proces care conține timp mort τ și o constantă de timp T_f.

În tabelul 9.3 sînt prezentate valorile optime ale parametrilor de acord folosind criteriul Ziegler-Nichols, care asigură amortizarea în sfert de perioadă, și valorile indicate de Cohen și Coon [62].

Pentru variația referinței, parametrii de acord pot fi calculați cu relațiile prezentate în tabelul 9.2.

Acordarea optimă a unui regulator se va face avînd în vedere tipul procesului, caracterul perturbațiilor ce intervin în proces și frecvența de modificare a intrării și a perturbației.

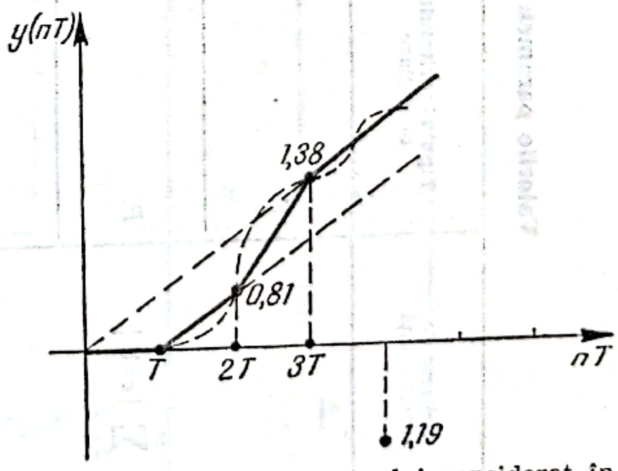


Fig. 9.31. Răspunsul sistemului considerat în exemplul 9.11.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 9.1

Valorile parametrilor de acord pentru diverse criterii integrale și diverse perturbații

Criteriu de performanță	Tipul algoritmului de reglare	Parametrii de acord		
		K_R	T_f/T_t	T_d/T_f
$\sum_{K=0}^{\infty} \lvert \varepsilon(k) \rvert$	*P*	$\frac{0,902}{K_f}\left(\frac{\tau}{T_f}\right)^{-0,985}$	–	–
	PI	$\frac{0,894}{K_f}\left(\frac{\tau}{T_f}\right)^{-0,986}$	$0,608\left(\frac{\tau}{T_f}\right)^{-0,707}$	–
	PID	$\frac{1,435}{K_f}\left(\frac{\tau}{T_f}\right)^{-0,921}$	$0,878\left(\frac{\tau}{T_f}\right)^{-0,749}$	$0,482\left(\frac{\tau}{T_f}\right)^{1,137}$
$\sum_{0}^{\infty}[\varepsilon(k)]^2$	*P*	$\frac{1,411}{K_f}\left(\frac{\tau}{T_f}\right)^{-0,906}$	–	–
	PI	$\frac{1,305}{K_f}\left(\frac{\tau}{T_f}\right)^{-0,959}$	$0,492\left(\frac{\tau}{T_f}\right)^{-0,739}$	–
	PID	$\frac{1,495}{K_f}\left(\frac{\tau}{T_f}\right)^{-0,945}$	$1,101\left(\frac{\tau}{T_f}\right)^{-0,771}$	$0,56\left(\frac{\tau}{T_f}\right)^{1,006}$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 9.2

Valorile parametrilor de acord pentru diverse criterii integrale și diverse referințe

Criteriul de performanță	Tipul algoritmului de reglare	Parametrii de acord		
		K_R	T_ε/T_t	T_d/T_ε
$\sum_0^\infty [\varepsilon(k)]$	*PI*	$\frac{0{,}758}{K_f}\left(\frac{\tau}{T_f}\right)^{-0{,}861}$	$1{,}02-0{,}323\left(\frac{\tau}{T_f}\right)$	—
	PID	$\frac{1{,}086}{K_f}\left(\frac{\tau}{T_f}\right)^{-0{,}869}$	$0{,}74-0{,}13\left(\frac{\tau}{T_f}\right)$	$0{,}348\left(\frac{\tau}{T_f}\right)^{0{,}914}$
$\sum_0^\infty K[\varepsilon(k)]$	*PI*	$\frac{0{,}586}{K_f}\left(\frac{\tau}{T_f}\right)^{-0{,}916}$	$1{,}03-0{,}165\left(\frac{\tau}{T_f}\right)$	—
	PID	$\frac{0{,}965}{K_f}\left(\frac{\tau}{T_f}\right)^{-0{,}855}$	$0{,}796-0{,}147\left(\frac{\tau}{T_f}\right)$	$0{,}308\left(\frac{\tau}{T_f}\right)^{0{,}929}$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 9.3

Valorile optime ale parametrilor de acord după criteriul Ziegler-Nichols

Tipul algoritmului de reglare	Ziegler-Nichols	Cohen-Coon
P	$K_R=\left(\frac{\tau}{T_f}\right)^{-1,0}\cdot\frac{1}{K_f}$	$K_R=\left(\frac{\tau}{T_f}\right)^{-1,0}+0,333$
PI	$K_R=0,9\left(\frac{\tau}{T_f}\right)^{-1,0}\cdot\frac{1}{K_f}$ $\frac{T_i}{T_f}=3,33\left(\frac{\tau}{T_f}\right)$	$K_R=0,9\left(\frac{\tau}{T_f}\right)^{-1,0}+0,082$ $\frac{T_i}{T_f}=\frac{3,33\left(\frac{\tau}{T_f}\right)\left[1+\frac{\tau}{T_f}/11,0\right]}{1,0+2,2\tau/T_f}$
PID	$K_R=1,2\left(\frac{\tau}{T_f}\right)^{-1,0}\cdot\frac{1}{K_f}$ $\frac{T_i}{T_f}=2,0\left(\frac{\tau}{T_f}\right)$ $\frac{T_d}{T_f}=0,5\left(\frac{\tau}{T_f}\right)$	$K_R=1,35\left(\frac{\tau}{T_f}\right)^{-1,0}+0,270$ $\frac{T_i}{T_f}=\frac{2,5\left(\frac{\tau}{T_f}\right)\cdot\left[1,0+\frac{\tau}{T_f}/5,0\right]}{1,0+0,6\tau/T_f}$ $\frac{T_d}{T_f}=\frac{0,37\,\tau/T_f}{1,0+0,2\tau/T_f}$

Dacă într-un sistem apar schimbări frecvente atît ale intrării cît și ale perturbației, atunci se impune utilizarea unor algoritmi modificați.

O structură de reglare numerică cu un algoritm de reglare la care mărimea de comandă este obținută atît funcție de eroare cît și funcție de ieșire este prezentată în figura 9.32.

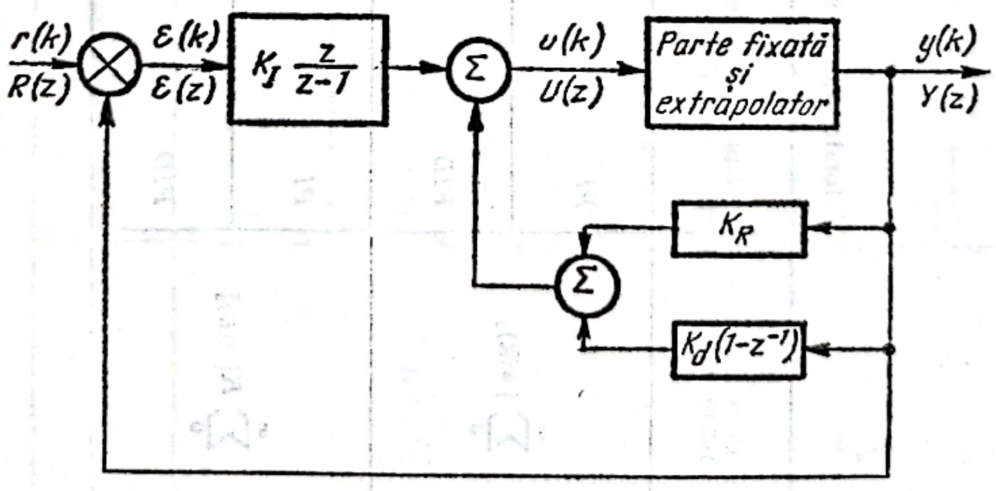


Fig. 9.32. Schema generală a unui sistem automat cu regulator *PID* numeric.

Scanned with OKEN Scanner

Algoritmul de reglare numerică poate fi scris în acest caz sub forma

$$u(k)=K_I\sum_0^{\infty}\varepsilon(i)-K_R y(k)-K_d[y(k)-y(k-1)]\cdot \qquad (9.86)$$

Astfel, componenta integrală a regulatorului *PID* este plasată pe calea directă aşa încît pentru intrare treaptă se obţine eroare staţionară nulă, iar componentele derivativă şi proporţională sînt plasate în reacţie avînd ca intrare numai mărimea reglată.

Prezenţa acestor componente pe calea de reacţie asigură performanţele dorite în regim tranzitoriu (stabilitate, viteză de răspuns), fără a introduce în instalaţie şocurile determinate de variaţiile de tip treaptă ale mărimii de intrare.

Dacă partea fixată a sistemului este caracterizată printr-un vector de stare $\mathbf{x}(k)$, care are aceeaşi semnificaţie ca vectorul de stare $\mathbf{x}(t)$ pentru procesele continue însă este definit numai pentru momente discrete de timp, se poate utiliza un algoritm de reglare combinat după eroare şi după stare

$$u(k)=K_I\sum_0^{k}[r(i)-y(i)]-\sum_1^{n}K_i x_i(k), \qquad (9.87)$$

unde K_i reprezintă componentele unei matrice linie care asigură reacţia după stare.

Utilizarea reacţiei după stare (fig. 9.33) asigură o comportare dinamică impusă sistemului prin alegerea corespunzătoare a componentelor K_i.

În cazul în care starea procesului nu este măsurabilă se poate construi un estimator de stare, care pe baza informaţiilor de la intrarea şi ieşirea procesului estimează starea $\hat{\mathbf{x}}(k)$ a acestuia.

Structura unui sistem de reglare numerică cu estimator de stare este prezentată în figura 9.34.

Utilizarea unor algoritmi evoluaţi de reglare numerică conduce la obţinerea unor performanţe superioare atît în regim staţionar cît şi în regim tranzitoriu.

Implementarea acestor algoritmi pe microcalculatoare sau minicalculatoare face posibilă realizarea unor structuri de sisteme de reglare numerică, ale căror performanţe sînt superioare în comparaţie cu structurile de reglare convenţionale analogice.

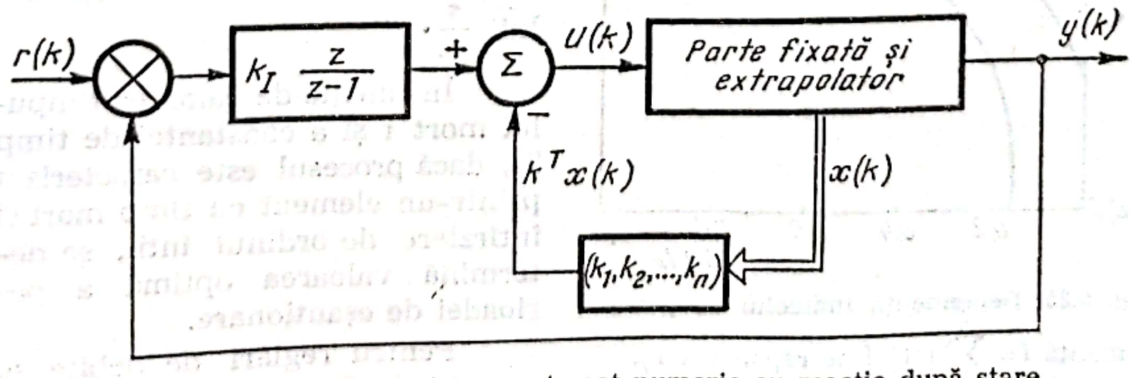


Fig. 9.33. Schema unui sistem automat numeric cu reacţie după stare.

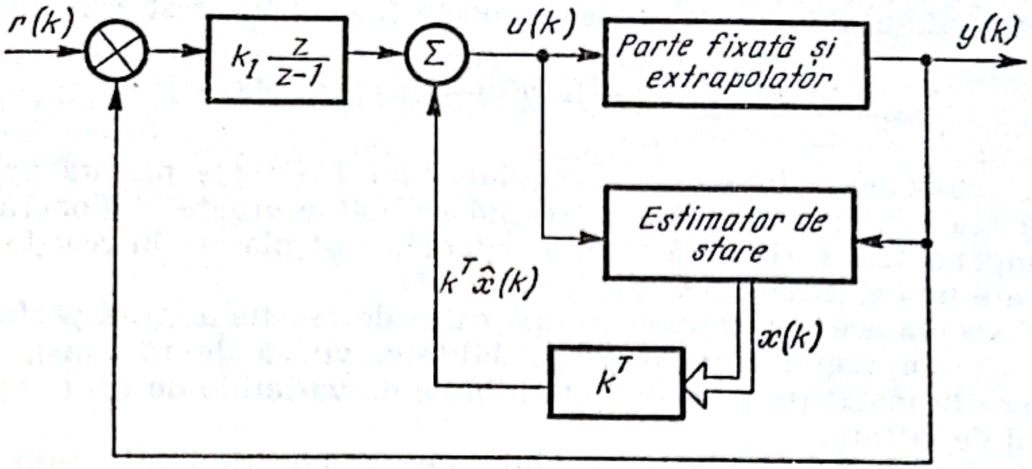


Fig. 9.34. Schema unui sistem automat numeric cu reacție după stare și cu estimator de stare.

În funcție de complexitatea procesului, de cerințele de performanță impuse, se adoptă o structură mai redusă sau mai complexă, algoritmi de reglare convenționali sau evoluați.

Odată cu dezvoltarea microprocesoarelor a devenit posibilă și eficientă soluția de reglare și conducere numerică a proceselor industriale.

În capitolul 13 sînt prezentate structuri de sisteme de conducere numerică cu microcalculatoare, minicalculatoare și calculatoare de proces.

Adoptarea soluției de reglare numerică sau a soluției de reglare cu impulsuri modulate implică rezolvarea problemei privind alegerea perioadei de eșantionare T. Pentru cei mai mulți algoritmi de reglare, valorile reduse ale perioadei de eșantionare conduc la performanțe îmbunătățite ale răspunsului sistemului.

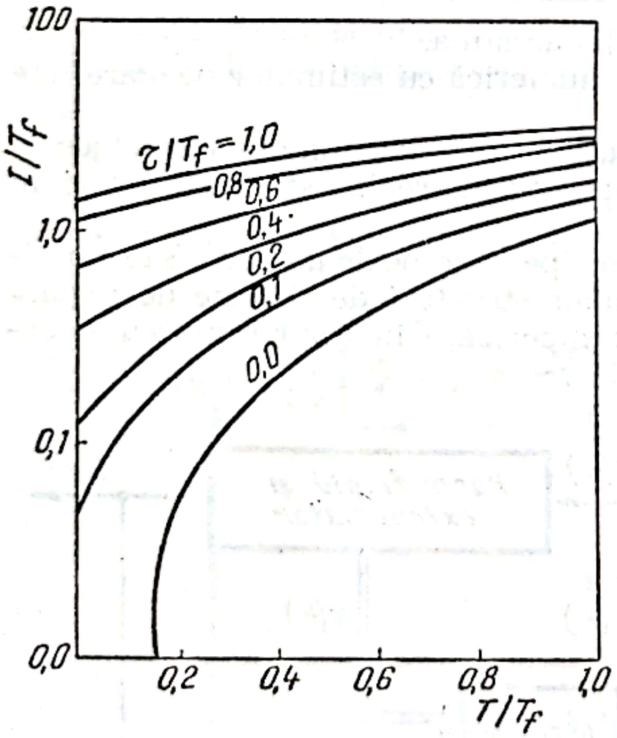


Fig. 9.35. Dependența indicelui de performanță $I=\sum_0^\infty |\varepsilon(k)|$ de raportul τ/T_f.

Efectul perioadei de eșantionare asupra valorii unui criteriu integral de tipul $I=\sum_0^\infty |\varepsilon(k)|$ [39] este prezentat grafic în figura 9.35, pentru diverse valori ale raportului $\frac{\tau}{T_f}$.

În funcție de valoarea timpului mort τ și a constantei de timp T_f, dacă procesul este caracterizat printr-un element cu timp mort și întîrziere de ordinul întîi, se determină valoarea optimă a perioadei de eșantionare.

Pentru reglări de debite se recomandă $T=1$ s, pentru reglări

Scanned with OKEN Scanner

de nivel și presiune se recomandă $T=5$ s, iar pentru reglări de temperatură se recomandă $T=20$ s.

Pentru sistemele cu eșantionare, performanțele sînt determinate atît de raportul $\frac{\tau}{T_f}$ cît și de raportul $\frac{T}{T_f}$, deci un parametru esențial ce influențează performanțele acestor sisteme este $\frac{\tau}{T_f}+\frac{T}{{}_fT}$.

O alegere necorespunzătoare a perioadei de eșantionare determină pe de o parte o pierdere de informație prin eșantionare, iar pe de altă parte performanțele sistemului pot fi sensibil diferite de valorile optime.

Pentru alegerea optimă a perioadei de eșantionare se impune cunoașterea timpului mort și a constantei de timp a procesului tehnologic.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 10

SISTEME AUTOMATE NELINIARE

10.1. GENERALITĂŢI. TIPURI DE NELINIARITĂŢI

Modelele matematice utilizate în capitolele precedente pentru studiul sistemelor continue şi cu eşantionare permit analiza şi sinteza sistemelor automate cu un anumit grad de precizie, aceste modele fiind deduse în anumite ipoteze simplificatoare.

Astfel există sisteme care, deşi proiectate riguros pe baza teoriei generale a sistemelor liniare, prezintă instabilitate sau performanţe staţionare şi tranzitorii diferite de valorile obţinute prin calcul.

Aceste fenomene de autooscilaţie şi comportare în general diferită faţă de regimul rezultat din analiza şi sinteza pe baza teoriei liniare sînt determinate de faptul că modelele matematice care trebuie utilizate sînt în realitate neliniare.

Adoptarea unor modele matematice liniare pentru caracterizarea funcţionării sistemelor de reglare automată implică introducerea unor erori ale căror valori trebuie calculate. Marea majoritate a sistemelor întîlnite în tehnică au un grad mai mare sau mai redus de neliniaritate.

În cazul în care modelul matematic poate fi liniarizat fără ca erorile făcute prin liniarizare să depăşească anumite valori limită, poate fi utilizat un model liniar pentru caracterizarea sistemului; în caz contrar se impune utilizarea modelului matematic neliniar.

Alegerea corespunzătoare a punctului static de funcţionare în jurul căruia se face liniarizarea şi utilizarea dezvoltării în serie Taylor permite obţinerea unor modele aproximative, ce pot fi utilizate numai pentru un domeniu restrîns de variaţie a variabilelor dependente.

În cazul în care eroarea ce se face prin aproximarea modelului matematic cu un model liniar depăşeşte o limită admisibilă sau în cazul în care nu se poate obţine un model liniarizat, pentru caracterizarea sistemului se adoptă un model matematic neliniar.

Există multe sisteme al căror model matematic este neliniar, sub forma unor ecuaţii diferenţiale neliniare. Un sistem automat neliniar (SAN) este un sistem descris de ecuaţii diferenţiale neliniare, un sistem

al cărui model matematic nu poate fi liniarizat. Acestor sisteme nu li se poate aplica principiul superpoziției.

Structural un sistem automat poate conține unul sau mai multe elemente neliniare, elemente a căror funcționare este descrisă de modelele matematice neliniare.

Neliniaritățile într-un sistem pot fi inerente, determinate de caracteristicile reale ale elementelor componente, dar pot fi și neliniarități introduse intenționat în scopul îmbunătățirii performanțelor sistemului. Introducerea unor neliniarități în mod intenționat poate conduce la performanțe îmbunătățite sau la obținerea unor algoritmi de conducere care asigură realizarea anumitor criterii de performanță impuse.

Procesele neliniare cu caracteristică statică extremală sînt conduse prin intermediul unor elemente neliniare care asigură funcționarea în jurul extremului.

O particularitate a sistemelor neliniare o constituie noțiunea de stabilitate, care este diferită față de sistemele liniare.

Există sisteme neliniare caracterizate printr-un regim oscilant (oscilații întreținute), unde oscilațiile sînt o proprietate a funcționării normale a sistemului. Stabilitatea într-o anumită regiune (deci nu numai într-un punct) este de mai mare importanță pentru sistemele neliniare; sistemul revine într-o regiune specificată cînd acțiunea externă dispare.

Neliniaritățile care apar într-un sistem pot fi statice sau dinamice, după cum modelul matematic neliniar este staționar sau dinamic. Spunem că neliniaritatea este statică dacă între ieșirea și intrarea unui element există o relație neliniară de forma

$$y=f(u). \tag{10.1}$$

Forma cea mai generală a modelului matematic a unui sistem neliniar este

$$y^{(n)}=f\left[y, \dot{y}, \ldots y^{(n-1)}, u, \dot{u}, \ldots u^{(m)}, t\right] \tag{10.2}$$

sau în formă vectorială, dacă evidențiem vectorul de stare $\mathbf{x}(t)$, vectorul intrărilor $\mathbf{u}(t)$ și vectorul ieșirilor $\mathbf{y}(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t)&=\mathbf{h}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t_0, t)]; \\ \mathbf{y}(t)&=\mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t_0, t)]. \end{aligned} \tag{10.3}$$

Oricare dintre aceste modele evidențiază faptul că funcțiile **f**, **g** și **h** sînt neliniare; coeficienții ecuațiilor diferențiale sînt funcție de variabilele dependente și derivatele lor.

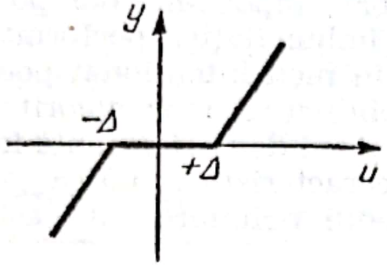
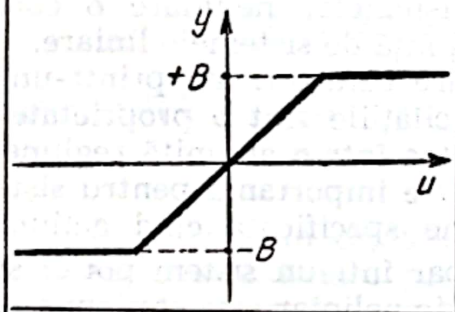
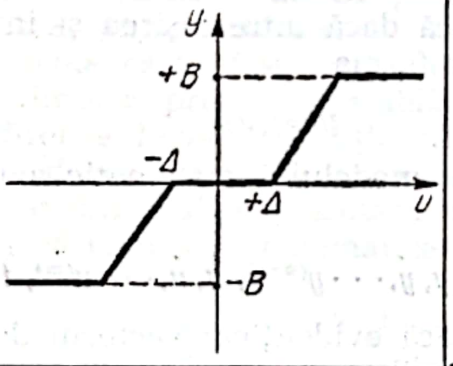
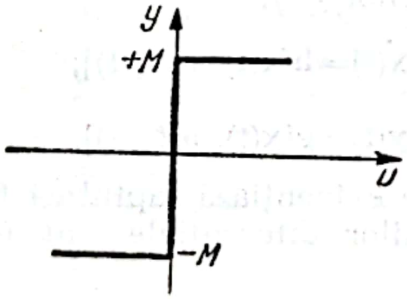
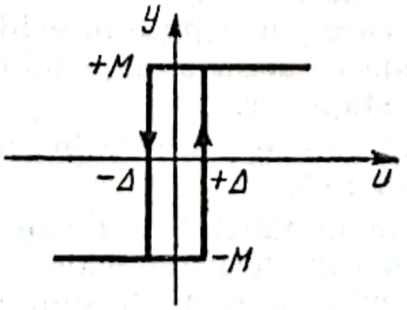
Dacă neliniaritățile sistemului apar în regim staționar spunem că sistemul conține neliniarități care pot fi puse în evidență prin intermediul caracteristicilor statice neliniare, acestea exprimînd dependențele neliniare dintre mărimi în regim staționar.

Principalele neliniarități statice întîlnite în cadrul sistemelor automate sînt prezentate în tabelul 10.1.

Neliniaritățile prezentate în tabelul 10.1 sînt întîlnite în structura unor sisteme neliniare și pot caracteriza funcționarea procesului tehnologic, a elementului de execuție, a regulatorului sau sînt introduse în

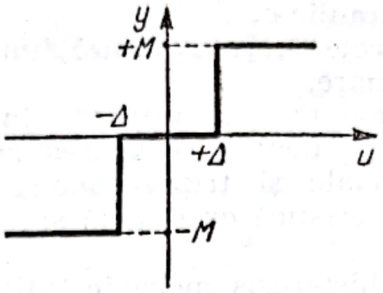
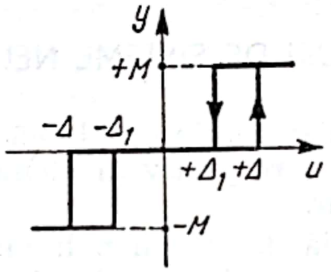
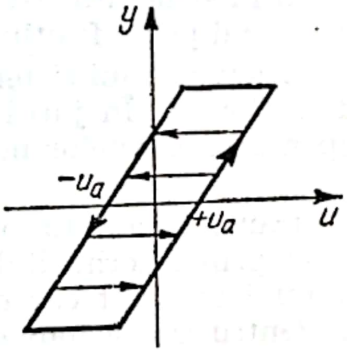
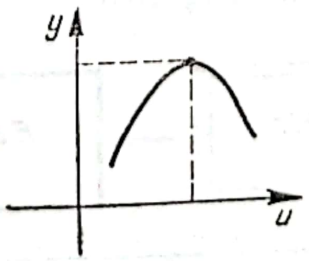
Scanned with OKEN Scanner

Tipuri de neliniarităţi *Tabelul 10.1*

Denumirea neliniarităţii	Caracteristica statică	Modelul matematic
1	2	3
Zonă de insensibilitate		$y=0$ pt. $\lvert u\rvert \leqslant \Delta$ $y=k(u-\Delta)$ pt. $\Delta \rhd u$ $y=k(u+\Delta)$ pt. $u \lhd -\Delta$
Saturaţie		$y=ku$ pt. $\lvert u\rvert \leqslant \frac{B}{k}$ $y=B$ pt. $u \geqslant B/K$ $y=-B$ pt. $u \leqslant -B/K$
Insensibilitate şi saturaţie		$y=0$ pt. $\lvert u\rvert \leqslant \Delta$ $y=k(u-\Delta)$ pt. $\Delta \leqslant u \leqslant \frac{B}{K+\Delta}$ $y=B$ pt. $u \geqslant B/K+\Delta$ $y=K(u+\Delta)$ pt. $-B/K+\Delta \leqslant u \leqslant -\Delta$ $y=-B$ pt. $u \leqslant -B/K+\Delta$
Releu ideal		$y=M$ sign u
Releu cu histerezis		$y=+M$ pt. $-\Delta < u < \infty$ $y=-M$ pt. $-\infty < u < +\Delta$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 10.1 (continuare)

1	2	3
Releu cu zonă de insensibilitate		$y=M$ sign u pt. $\lvert u\rvert \geqslant \Delta$ $y=0$ pt. $-\Delta < u < +\Delta$
Releu cu zonă de insensibilitate şi histerezis		$y=M$ sign. u pt. $\lvert u\rvert > \Delta_1$ $y=0$ pt. $\lvert u\rvert < \Delta_1$
Histerezis mecanic		$\dot{y}=k\dot{u}$ pt $\begin{cases}\dot{u}>0 \text{ şi } v=ku_a\\ \dot{u}<0 \text{ şi } v=-ku_a\end{cases}$ $y=0$ pt $\begin{cases}\dot{u}>0 \text{ şi } -ku_a \leqslant v < ku_a\\ \dot{u}>0 \text{ şi } -ku_a < v \leqslant ku_a\end{cases}$ $v=ku-y$
Element cu caracteristica extremală		$y=au^2+bu+c$

Scanned with OKEN Scanner

mod intenţionat în sistem pentru a realiza o anumită comportare a sistemului.

Neliniaritatea de tip saturaţie prezintă regulatorul electronic sau elementul de execuţie, pe cînd zona de insensibilitate mai mult sau mai puţin pronunţată prezintă traductorul de pe calea de reacţie, elementul de execuţie pneumatic şi hidraulic etc.

Caracteristicile de tip releu caracterizează funcţionarea elementelor cu mai multe stări în funcţionare.

În general aceste elemente sînt utilizate în mod intenţionat în structuri de sisteme automate pentru realizarea anumitor performanţe.

Regulatoarele bipoziţionale şi tripoziţionale, dispozitivele de comandă a proceselor cu caracteristică extremală sînt introduse intenţionat în sistemul automat.

O neliniaritate de tip histerezis mecanic întîlnim inerent în funcţionarea unor sisteme hidraulice sau a unor transmisii mecanice unde intervin forţe de frecare uscată.

10.2. STRUCTURI DE SISTEME NELINIARE

Un sistem automat neliniar conţine pe lîngă elementele neliniare şi un grup al elementelor liniare, respectiv al elementelor al căror model matematic este considerat liniar.

Astfel, o schemă generală de sistem neliniar va cuprinde pe de o parte grupul elementelor neliniare iar pe de altă parte grupul elementelor liniare (fig. 10.1), dacă cele două categorii de elemente pot fi grupate şi separate între ele. În cazul în care neliniarităţile nu pot fi separate, ele apărînd în diferite poziţii în structura sistemului, evident schema simplificată dată în figura 10.1 nu mai poate fi utilizată.

În figura 10.2 se prezintă structura unui sistem la care neliniaritatea apare în cadrul elementelor de acţionare. În jurul acestui element se introduce o corecţie pentru compensarea efectelor neliniarităţii asupra performanţelor sistemului.

Această schemă poate fi transformată ţinînd seama de faptul că elementele liniare pot fi descrise prin intermediul funcţiilor de transfer $H_1(s)$, $H_2(s)$, $H_3(s)$ şi $H_R(s)$, obţinînd în acest caz o structură similară cu structura dată în figura 10.3. Pentru un sistem care conţine elementul neliniar pe calea de reacţie (fig. 10.4), se poate reduce schema la una echivalentă, grupînd elementele liniare şi neliniare.

În fiecare din exemplele prezentate se poate scrie o funcţie de transfer echivalentă a părţii liniare (fig. 10.5).

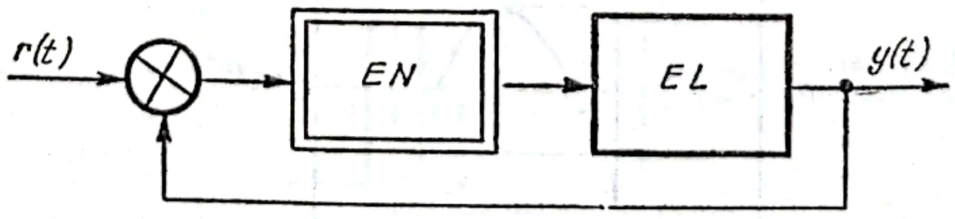


Fig. 10.1. Schema generală a unui sistem neliniar.

Scanned with OKEN Scanner

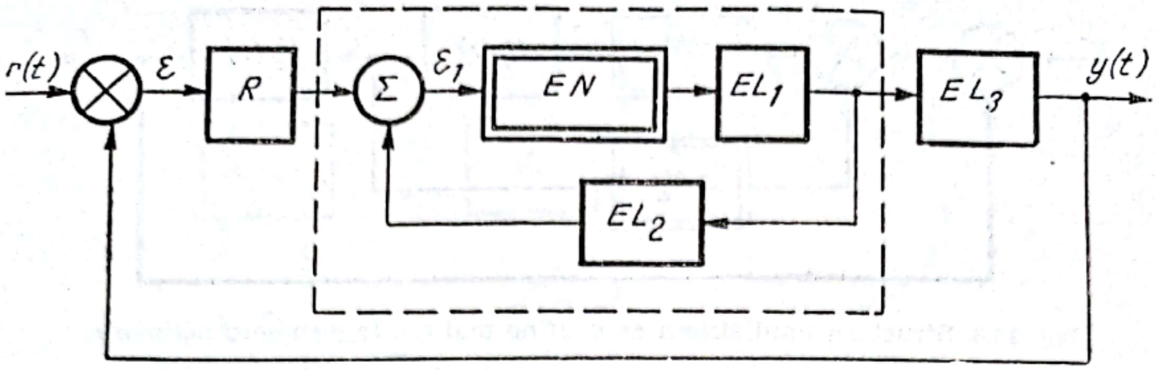


Fig. 10.2. Schema unui sistem neliniar cu elementul de execuție neliniar.

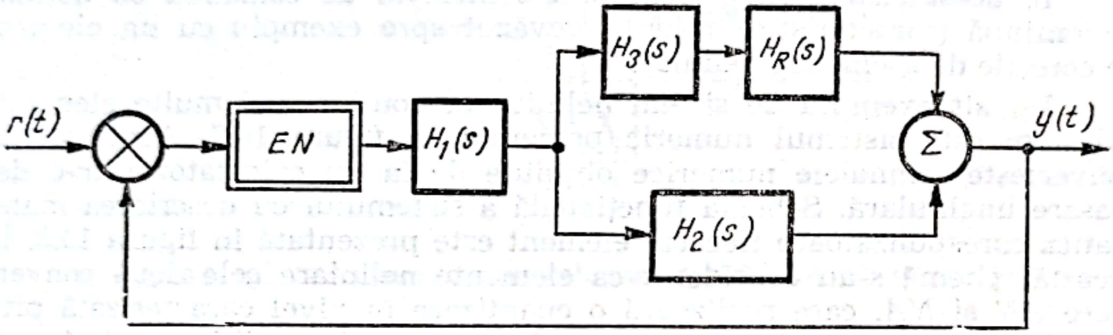


Fig. 10.3. Schema unui sistem neliniar cu regulatorul neliniar.

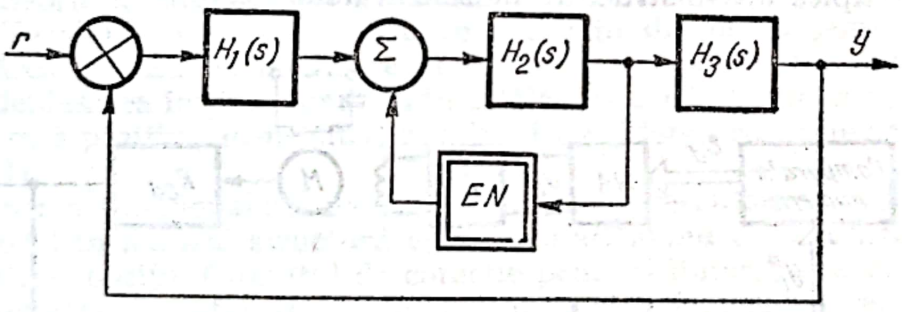


Fig. 10.4. Schema unui sistem neliniar cu element neliniar pe calea de reacție.

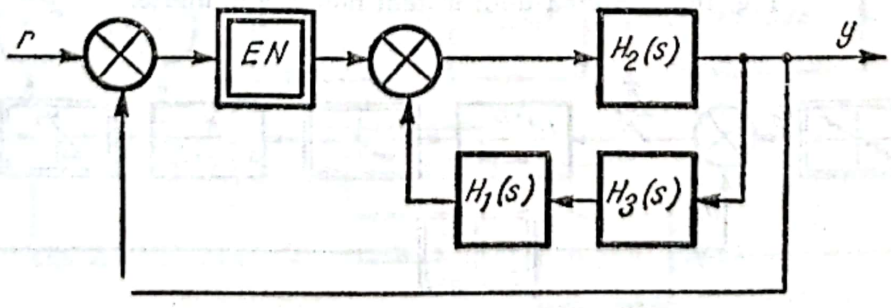


Fig. 10.5. Schema echivalentă a unui sistem neliniar dat în fig. 10.4.

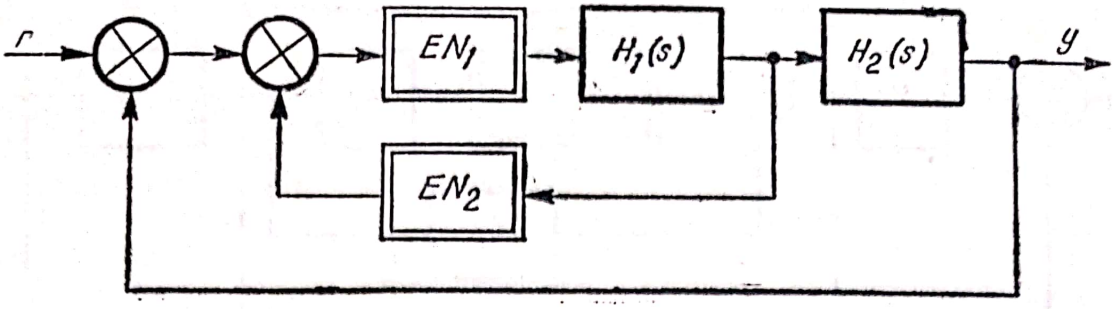


Fig. 10.6. Structura unui sistem ce conţine mai multe elemente neliniare.

O structură de sistem care conţine mai multe neliniarităţi este prezentată în figura 10.6.

În acest sistem EN_1 reprezintă elementul de comandă cu acţiune discontinuă (caracteristică releu), prevăzut spre exemplu cu un element de corecţie de asemenea neliniar.

Un alt exemplu de sistem neliniar ce conţine mai multe elemente neliniare este sistemul numeric prezentat în figura 10.7. Acest sistem converteşte semnalele numerice obţinute de la un calculator într-o deplasare unghiulară. Schema funcţională a sistemului cu descrierea matematică corespunzătoare fiecărui element este prezentată în figura 10.8. În această schemă s-au considerat ca elemente neliniare cele două convertoare *AN* şi *NA*, care realizează o cuantizare în nivel caracterizată prin salturi şi segmente orizontale între ele precum şi amplificatorul *A* care prezintă saturaţie şi transmisia mecanică *Red* caracterizată prin frecare uscată şi prin histerezis mecanic. Acest sistem ilustrează cum apar neliniarităţile tipice într-o structură de sistem numeric.

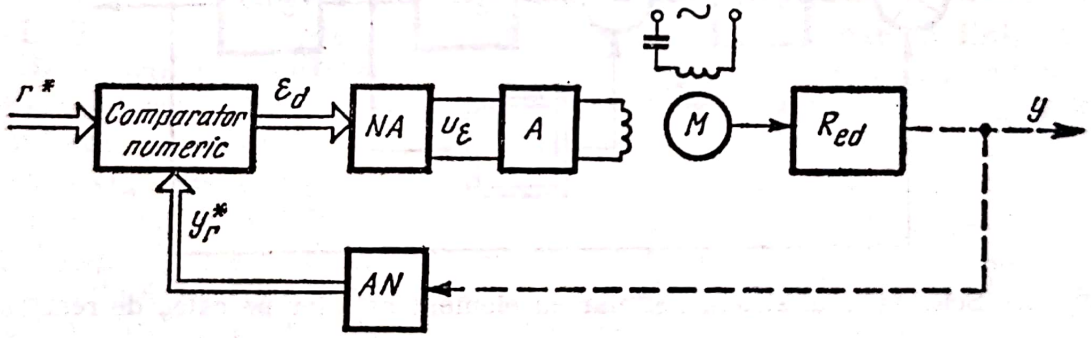


Fig. 10.7. Schema unui sistem neliniar numeric.

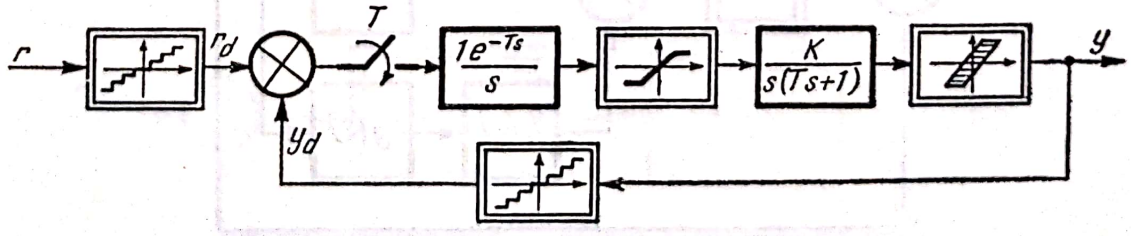


Fig. 10.8. Schema funcţională a sistemului neliniar numeric.

Scanned with OKEN Scanner

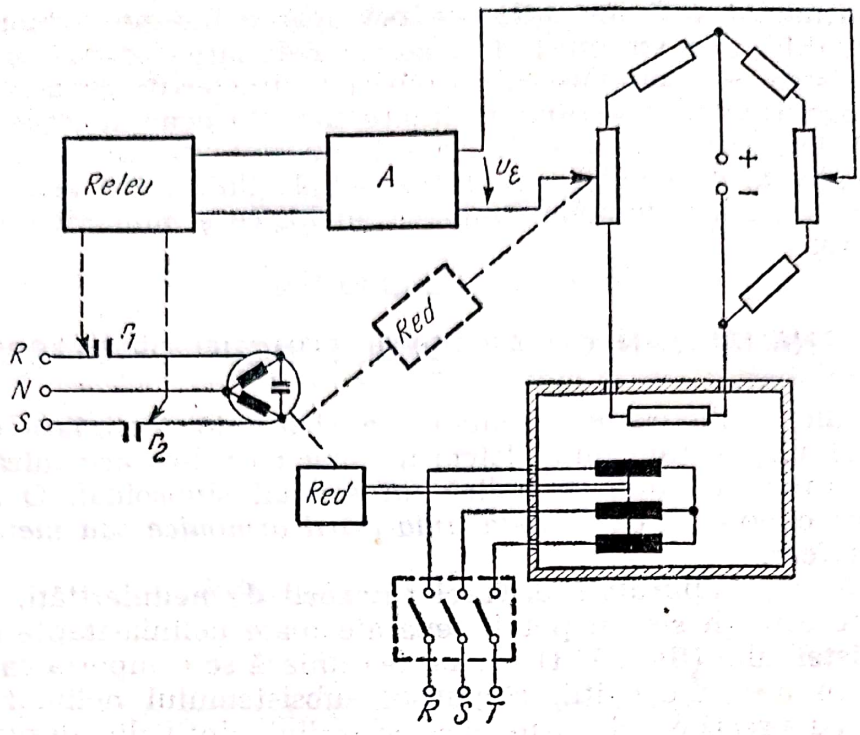


Fig. 10.9. Structura unui sistem neliniar cu regulator de tip releu.

O structură de sistem neliniar cu regulator de tip releu este prezentată în figura 10.9.

Reglarea temperaturii în cuptor se realizează prin modificarea poziției cursorului autotransformatorului AT antrenat de un motor bifazat M. Tensiunea de dezechilibru ce apare în diagonala punții permite anclanșarea releului și închiderea circuitului de alimentare a motorului pentru deplasarea într-un sens sau în celălalt sens după cum semnalul abaterii u_ε este pozitiv sau negativ, rezultînd închiderea contactelor r_1 sau r_2 (v. cap. 1).

Schema funcțională a acestui sistem este prezentată în figura 10.10. Regulatorul în această structură este neliniar, avînd caracteristică de tip releu cu trei poziții. Circuitul de corecție poate fi liniar, caracterizat printr-o funcție de transfer $H_c(s)$, sau neliniar. Traductorul de reacție principală în această schemă este termorezistența Tr, a cărei funcție de transfer este $G(s)$.

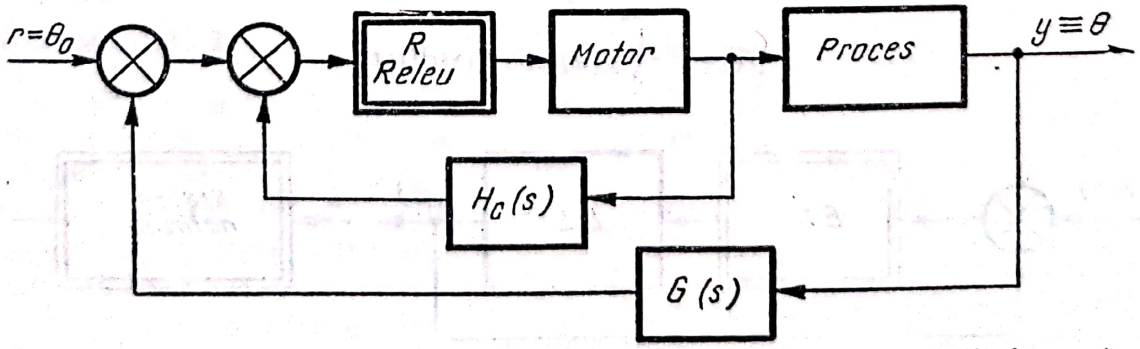


Fig. 10.10. Schema funcțională a sistemului de reglare a temperaturii în cuptor.

Multitudinea neliniarităților ce pot apărea într-un sistem automat precum și diferitele structuri de sisteme neliniare fac ca metodele de studiu al sistemelor neliniare să nu aibă un caracter de generalitate, metodele de rezolvare a ecuațiilor neliniare fiind în general legate de tipul neliniarităților. Ținînd seama de acest lucru sînt utilizate metode specifice de studiu al sistemelor neliniare: metoda liniarizării armonice, metoda planului fazelor, metoda simulării analogice și numerice a sistemelor neliniare.

10.3. ANALIZA SAN CU AJUTORUL FUNCȚIEI DE DESCRIERE

Una dintre metodele de analiză a sistemelor neliniare constă în aproximarea răspunsului unui sistem neliniar cu prima armonică în cazul cînd la intrarea acestuia se aplică un semnal sinusoidal. O asemenea metodă este cunoscută ca *metoda liniarizării armonice* sau *metoda funcției de descriere.*

Metoda este aplicabilă oricărei categorii de neliniarități, în condițiile în care într-un sistem pot fi separate toate neliniaritățile de partea liniară a sistemului (fig. 10.11), iar partea liniară se comportă ca un filtru trece jos. În aceste condiții, răspunsul subsistemului neliniar poate fi aproximat cu precizie prin armonica de ordinul întîi din dezvoltarea în serie Fourier a ieșirii subsistemului neliniar, avînd la intrare o funcție sinusoidală.

Pentru sistemul neliniar (fig. 10.11) la o intrare sinusoidală se obține la ieșire o funcție a cărei dezvoltare în serie Fourier este:

$$u=U_m \sin \omega t; \tag{10.4}$$

$$y=y_0+\sum_{k=1}^{\infty} y_{pk} \sin k\omega t+\sum_{k=1}^{\infty} y_{qk} \cos k\omega t.$$

Coeficienții seriei Fourier se calculează cu relațiile cunoscute [46]:

$$y_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y(u)\mathrm{d}(\omega t);$$

$$y_{pk}=\frac{1}{7\pi}\int_0^{2\pi} y(u) \sin k\omega t\mathrm{d}(\omega t); \tag{10.5}$$

$$y_{kq}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(u) \cos k\omega t\mathrm{d}(\omega t).$$

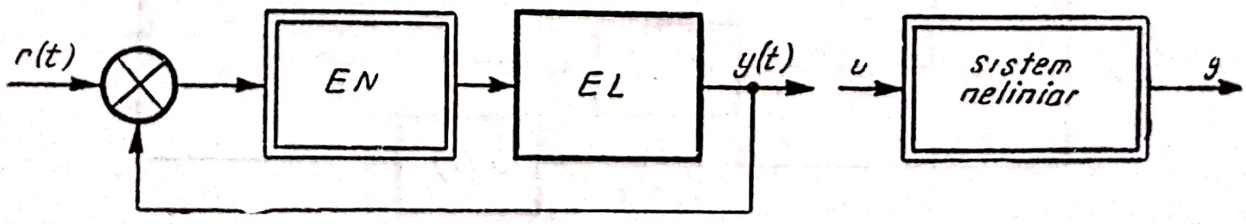


Fig. 10.11. Schema echivalentă a unui sistem neliniar.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru neliniaritățile simetrice față de origine coeficientul y_0 din dezvoltarea în serie Fourier este egal cu zero.

În baza metodei liniarizării armonice se neglijează toate armonicele de frecvență superioară din dezvoltarea în serie Fourier aproximînd ieșirea elementului neliniar prin

$$y(t) \simeq y_{p1} \sin \omega t + y_{q1} \cos \omega t$$

sau

$$y(t) \simeq \mathrm{Im}[(y_{p1} + jy_{q1}) e^{j\omega t}]. \tag{10.6}$$

Pentru elementul liniar cu intrare sinusoidală de frecvență ω și ieșirea $y(t)$ de aceeași frecvență, dată prin relația (10.6), se definește o *funcție de descriere* de forma

$$N(U_m, j\omega) = \frac{Y_{m1}}{U_m} \cdot e^{j\Phi_n (U_m j\omega)}$$

sau

$$N(U_{m1}, j\omega) = |N(U_m, j\omega)| \cdot e^{j\Phi_n (U_m, j\omega)}, \tag{10.7}$$

unde

$$|N(U_m, j\omega)| = \frac{\sqrt{y_{p1}^2 + y_{q1}^2}}{U_m}; \qquad \psi_n = \text{arctang.} \frac{y_{q1}}{y_{p1}}.$$

Funcția de descriere poate fi scrisă în mod similar ca funcția de transfer în domeniul frecvențelor, cu observația că atît partea reală cît și partea imaginară depind de amplitudinea semnalului sinusoidal de la intrare. Partea imaginară a funcției de descriere apare numai pentru neliniarități de tipul histerezis. Cunoașterea funcției de descriere pentru un sistem neliniar permite analiza performanțelor sistemului prin metode cunoscute din analiza sistemelor liniare.

Metoda liniarizării armonice fiind o metodă aproximativă va conduce la obținerea performanțelor sistemelor neliniare cu un grad de precizie limitat. Cu cît partea liniară a sistemului are o comportare de filtru trece jos mai bună cu atît rezultatele obținute sînt mai apropiate de valorile lor reale.

Exemplul 10.1

Pentru a ilustra modul de obținere a funcției de descriere pentru un sistem neliniar, considerăm o neliniaritate de tipul saturației (fig. 10.12).

Pentru o intrare sinusoidală, ieșirea elementului

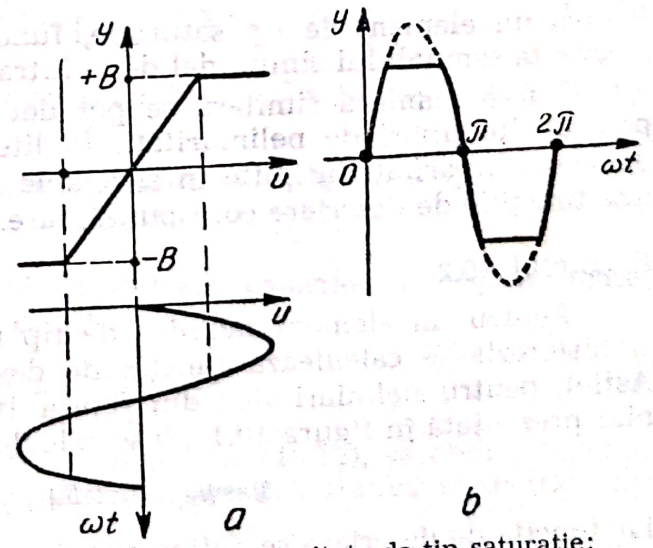


Fig. 10.12. Neliniaritate de tip saturație:
a — caracteristica statică; *b* — răspunsul la un semnal sinusoidal.

neliniar are forma dată în figura 10.12. Prima armonică din dezvoltarea în serie Fourier a acestei funcții $y(t)$ este definită prin relația

$$y(t)=y_{p_1}\sin\omega t,$$

unde y_{p_1} se calculează cu relația

$$y_{p_1}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}y(u)\sin\omega t\,d(\omega t)=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}y(u)\sin\omega t\,d(\omega t). \qquad (10.8)$$

Dacă ținem seama de cele două porțiuni distincte pentru care s-a definit ieșirea elementului neliniar $[y(u)]$, relația (10.8) devine

$$y_{p_1}=\frac{4}{\pi}\left[\int_0^{\omega t_1}kU_m\sin^2\omega t\,d(\omega t)+\int_{\omega t_1}^{\frac{\pi}{2}}B\sin\omega t\,d(\omega t)\right]. \qquad (10.9)$$

Momentul cînd elementul intră în zona neliniară se calculează cu ajutorul relației $B=KU_m\sin\omega t_1$.

Prin rezolvarea integralei (10.9) și ținînd seama de valoarea lui ωt_1, se obține

$$y_{p_1}=\frac{2KU_m}{\pi}\arcsin\frac{B}{KU_m}+\frac{2B}{\pi}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{B}{KU_m}\right)^2}. \qquad (10.10)$$

Funcția de descriere se obține ca raportul între amplitudinea primei armonici din dezvoltarea în serie Fourier și amplitudinea semnalului de intrare

$$N(U_m)=\frac{y_{p1}}{U_m}=\frac{2K}{\pi}\arcsin\frac{B}{\pi U_m}+\frac{2B}{\pi U_m}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{B}{KU_m}\right)^2}. \qquad (10.11)$$

Pentru un element de tip saturație, funcția de descriere nu depinde de frecvența semnalului sinusoidal de la intrare.

Într-o manieră similară se pot determina funcțiile de descriere și pentru alte tipuri de neliniarități. În literatură [46, 3], pentru cele mai uzuale neliniarități întîlnite în sistemele automate sînt calculate și tabelate funcțiile de descriere corespunzătoare.

Exemplul 10.2

Pentru un element neliniar de tip releu cu zonă de insensibilitate și histerezis se calculează funcția de descriere într-o manieră similară. Astfel, pentru neliniaritatea din figura 10.13, *a* ieșirea elementului neliniar prezentată în figura 10.13, *b* se calculează cu relația

$$y=y_{p_1}\sin\omega t+y_{q_1}\cos\omega t,$$

iar funcția de descriere se definește prin

$$N=P_n+jQ_n, \qquad (10.12)$$

Scanned with OKEN Scanner

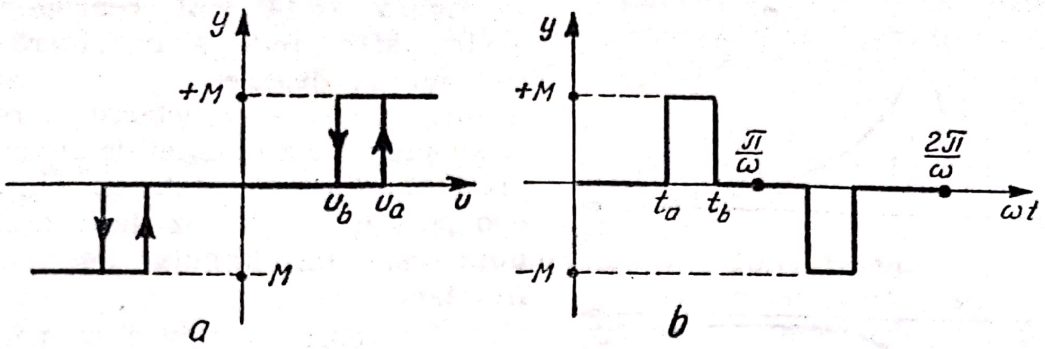


Fig. 10.13. Neliniaritate de tip releu:
a — caracteristica statică; *b* — răspunsul la un semnal sinusoidal.

unde

$$P_n=\frac{y_{p1}}{U_m} \quad \text{și} \quad Q_n=\frac{y_{q1}}{U_m}.$$

Ținînd seama de zona de insensibilitate și de lățimea histerezisului se definește:

$$u_a=U_m \sin \omega t_a ;$$

$$u_b=U_m \sin \left(\frac{\pi}{\omega}-t_b\right)\omega ; \tag{10.13}$$

$$P_n=\frac{y_{p1}}{U_m}=\frac{2}{\pi}\int_{\omega t_a}^{\omega t_b} M \sin \omega t \mathrm{d}(\omega t)=\frac{2M}{U_m}[\cos \omega t_a - \cos \omega t_b]. \tag{10.14}$$

Partea reală a funcției de descriere se obține dacă în (10.14) includem (10.13)

$$P_n(U_m)=\frac{2M}{\pi U_m}\left[\sqrt{1-\left(\frac{u_a}{U_m}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{u_b}{U_m}\right)^2}\right]. \tag{10.15}$$

În mod similar se obține și partea imaginară $Q_n(U_m)$ a funcției de descriere

$$Q_n(U_m)=\frac{y_{q1}}{U_m}=\frac{1}{\pi U_m}\int_0^{2\pi} y(u) \cos \omega t \mathrm{d}(\omega t)=\frac{2}{\pi U_m}\int_{\omega t_a}^{\omega t_b} M \cos \omega t \mathrm{d}(\omega t)$$

sau după efectuarea integralei și înlocuirea valorilor corespunzătoare pentru funcția sin ωt_a și sin ωt_b, se obține

$$Q_n(U_m)=\frac{2M}{\pi U_m^2}(u_a-u_b). \tag{10.16}$$

Combinînd (10.15) în (10.16) conform cu relația (10.12), se obține funcția de descriere a sistemului neliniar cu caracteristica statică prezentată în figura 10.13, *a*

$$N(U_m)=\frac{2M}{\pi U_m}\left[\sqrt{1-\left(\frac{u_a}{U_m}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{u_b}{U_m}\right)^2}\right]-\mathrm{j}\,\frac{2M}{\pi}\cdot\frac{u_a-u_b}{U_m^2}. \tag{10.17}$$

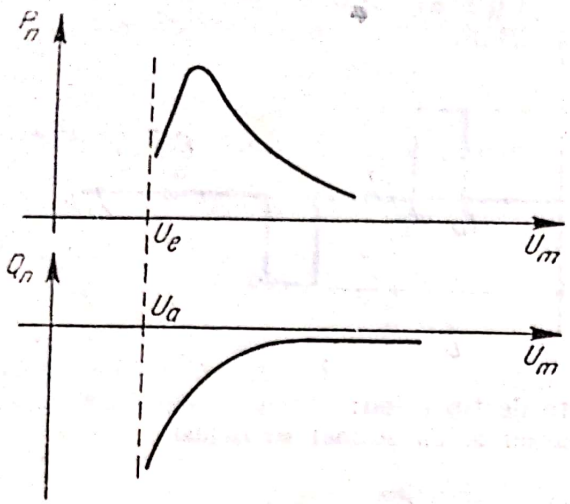


Fig. 10.14. Reprezentarea părții reale și imaginare a funcției de descriere.

În figura 10.14 sînt reprezentate grafic părțile reală și imaginară ale funcției de descriere pentru acest element. Aceste caracteristici reală și imaginară ale funcției de descriere prezintă discontinuități la $U_m=u_a$, deoarece în acest caz ieșirea obținută este un impuls de durată finită.

De remarcat faptul că pentru un releu ideal funcția de descriere se obține din (10.17) dacă se înlocuiește $u_a=u_b=0$

$$N(U_m)=\frac{2M}{\pi U_m}. \qquad (10.18)$$

Pentru un releu cu zonă de insensibilitate și fără histerezis se obține numai partea reală a funcției de descriere, iar $u_b=0$ conduce la expresia

$$N(U_m)=\frac{2M}{\pi U_m}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{u_a}{U_m}\right)^2}. \qquad (10.19)$$

De observat că funcția de descriere este definită în raport cu amplitudinea intrării și parametrii caracteristici ai neliniarității. O formă normalizată a funcției de descriere în unele aplicații este preferată.

Pentru elementul cu caracteristică tip releu se definesc următoarele mărimi caracteristice:

$$\lambda=\frac{u_b}{u_a};\qquad \alpha=\frac{M}{u_a}\quad \text{și}\quad \beta=\frac{U_m}{u_a},$$

în raport cu care se scrie forma normalizată a funcției de descriere

$$N(\beta)=\alpha\cdot N_0(\beta), \qquad (10.20)$$

unde

$$N_0(\beta)=\frac{2}{\pi\cdot\beta^2}\left[\sqrt{\beta^2-1}+\sqrt{\beta^2-\lambda^2}-j(1-\lambda)\right]. \qquad (10.21)$$

Dacă $U_m=u_a$ atunci $\beta=1$, iar (10.21) devine

$$N_0(1)=\frac{2}{\pi}\left[\sqrt{1-\lambda^2}-j(1-\lambda)\right].$$

În aceste condiții partea reală și partea imaginară au expresiile:

$$P_{n0}(1)=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-\lambda^2};\qquad Q_{n0}=-\frac{2}{\pi}(1-\lambda);$$

$$P_{n0}^2(1)+Q_{n0}^2(1)=-\frac{4}{\pi}Q_{n0}(1)$$

sau

$$P_{n0}^2(1)+\left[Q_{n0}(1)+\frac{2}{\pi}\right]^2=\left(\frac{2}{\pi}\right)^2. \qquad (10.22)$$

Scanned with OKEN Scanner

Relaţia (10.22) evidenţiază faptul că locul punctelor lui $N_0(\beta)$ corespunzătoare lui $\beta=1$, la diferite valori ale lui λ, este un cerc cu centrul pe axa imaginară iar coordonatele centrului sînt $\left(0, -j\frac{2}{\pi}\right)$.

Pentru diverse valori ale amplitudinii mărimii de intrare U_m şi diverşi parametri caracteristici ai neliniarităţii se poate defini un loc de transfer propriu neliniarităţii, loc care luat invers şi cu semnul schimbat permite a aprecia stabilitatea sistemelor neliniare.

Dacă într-un sistem automat neliniar (fig. 10.1), partea liniară este descrisă prin funcţia de transfer $H(s)$ iar partea neliniară prin funcţia de descriere $N(U_m, j\omega)$, se defineşte în domeniul frecvenţelor funcţia de transfer generală a sistemului sub forma

$$H_0(U_m, j\omega)=\frac{N(U_m, j\omega)\cdot H(j\omega)}{1+N(U_m, j\omega)\cdot H(j\omega)}. \qquad (10.23)$$

Condiţia pentru apariţia oscilaţiilor întreţinute în sistem este obţinută din ecuaţia

$$1+N(U_m, j\omega)\cdot H(j\omega)=0$$

sau

$$H(j\omega)=-\frac{1}{N(U_m, j\omega)}=\overline{N}(U_m, j\omega), \qquad (10.24)$$

în care $\overline{N}(U_m, j\omega)$ poartă denumirea de loc invers al funcţiei de descriere.

Intersecţia locului invers cu locul de transfer al sistemului liniar determină instabilitatea sistemului automat.

Prezentarea grafică a locului de transfer şi a locului invers în planul complex (fig. 10.15) permite a verifica stabilitatea sistemelor automate neliniare descrise prin modele liniarizate obţinute prin metoda liniarizării armonice.

În figura 10.15 punctele *1* şi *2* de intersecţie a celor două locuri determină autooscilaţii în sistem cu amplitudine şi frecvenţă corespunzătoare ω_1^c, A_1^c şi ω_2^c, A_2^c. De remarcat faptul că punctul *1* corespunde unor autooscilaţii instabile, iar punctul *2* corespunde unor autooscilaţii stabile. În punctul *1* de pe locul de transfer oscilaţiile ce apar ca urmare a intersecţiei celor două locuri de transfer vor avea o amplitudine mai mare odată cu creşterea amplitudinii U_m a semnalului sinusoidal. Prin creşterea lui U_m se intră în zona de instabilitate a sistemului.

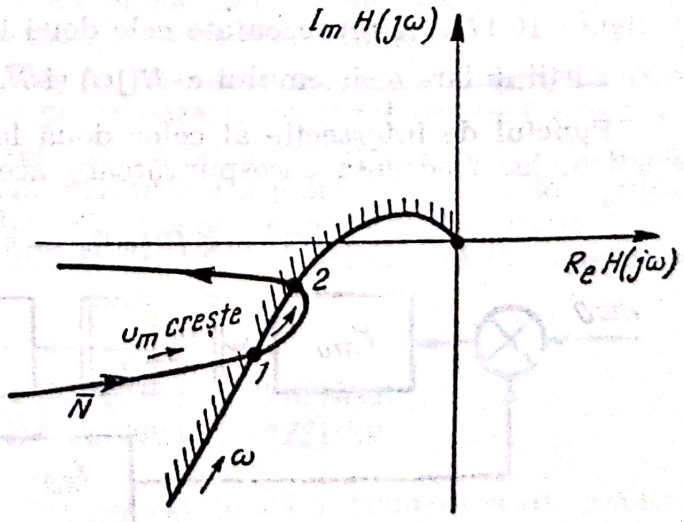


Fig. 10.15. Intersecţia locului de transfer cu locul critic invers.

Condiţia necesară şi suficientă ca un sistem

neliniar să fie stabil (respectiv existența și stabilitatea soluțiilor periodice) este ca locul invers să nu intersecteze locul de transfer al părții liniare a sistemului, impunîndu-se a fi plasat în stînga acestuia cînd este parcurs de la frecvențe joase înspre frecvențe înalte.

Exemplul 10.3

Pentru a ilustra modul de utilizare a funcției de descriere pentru aprecierea stabilității considerăm sistemul prezentat în figura 10.16.

Se consideră un sistem de reglare a temperaturii cu regulator de tip releu (fig. 10.16) avînd următoarele caracteristici: $K_{m_u}=1$ V/grad; $u_a=0{,}1$ V; $M=6$ V; $K_A=5$; $T_A=0{,}2$ s; $K_m=300$ grade/Vs; $T_m=2$ s; $i_{RG}=7{,}500$ (raportul de transmisie).

Modelul matematic al părții liniare a sistemului este dat prin relația

$$H(s)=\frac{K_{mu}\cdot K_A\cdot K_m\cdot 1/i_{RG}}{s(T_Ms+1)\,(T_As+1)}=\frac{K}{s(T_Ms+1)\,(T_As+1)},$$

unde $K=K_{mu}\cdot K_A\cdot K_m\left(\frac{1}{i_{RG}}\right)=0{,}2\ s^{-1}$ reprezintă factorul total de amplificare al sistemului.

Funcția de descriere pentru elementul neliniar are expresia

$$N=\frac{2M}{\pi U_m}\sqrt{1-\left(\frac{u_a}{U_m}\right)^2}=\frac{2}{\pi}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{\beta^2}\sqrt{\beta^2-1},$$

unde:

$$\alpha=\frac{M}{u_a};\qquad \beta=\frac{U_m}{u_a};\qquad \alpha=\frac{6}{0{,}1}=60;$$

$$N_0(\beta)=\frac{2}{\pi\cdot\beta^2}\cdot\sqrt{\beta^2-1}\ ;$$

$$N(\beta)=\alpha\cdot N_0(\beta).$$

În figura 10.17 sînt reprezentate cele două locuri de transfer corespunzătoare părții liniare a sistemului $\alpha\cdot H(j\omega)$ și $\overline{N}_0(\beta)=-\frac{1}{N_0(\beta)}$.

Punctul de intersecție al celor două locuri este situat pe axa reală negativă, iar frecvența corespunzătoare acestui punct se determină din relația

$$\arg H(j\omega^c)=-\pi,$$

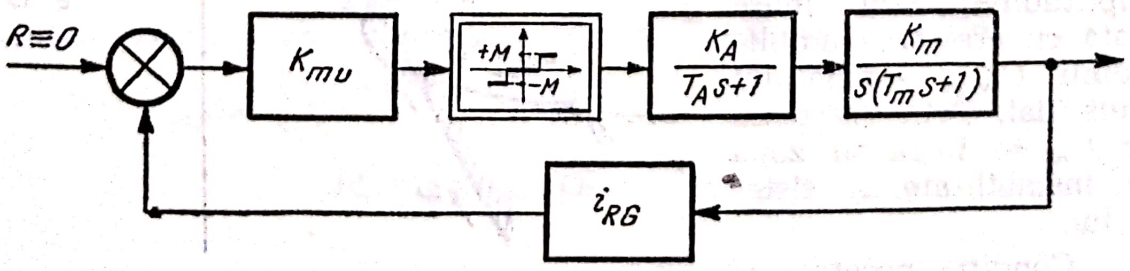


Fig. 10.16. Schema unui sistem de reglare a temperaturii cu regulator de tip releu.

Scanned with OKEN Scanner

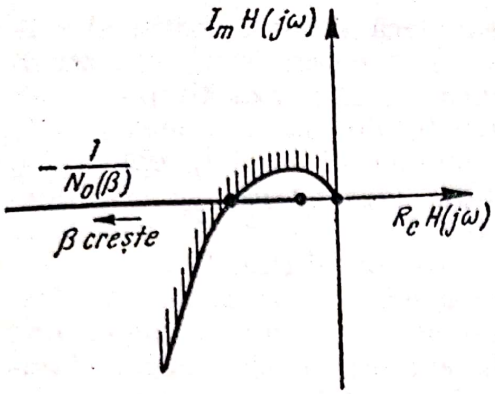


Fig. 10.17. Reprezentarea locului de transfer și a locului critic invers pentru sistemul considerat în exemplul 10.3.

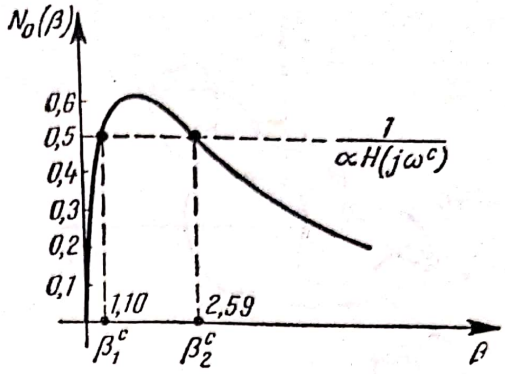


Fig. 10.18. Reprezentarea grafică a funcției $N_0(\beta)$.

de unde rezultă:

$$\frac{\pi}{2}+\text{arctg } 0{,}2\ \omega^c+\text{arctg } 2{,}0\ \omega^c=-\pi;$$

$$\omega^c=1{,}58\ s^{-1}.$$

Pentru determinarea amplitudinii autooscilațiilor se folosește locul de transfer corespunzător vectorului $\alpha H(j\omega^c)$ și $N(\beta)$ din condiția de opoziție a autooscilațiilor:

$$1+\alpha N_0(\beta)\cdot H(j\omega)=0;$$

$$\alpha H(j\omega)=-\frac{1}{N_0(\beta)}=\overline{N}_0(\beta).$$

Reprezentarea grafică a funcției $N_0(\beta)$ și intersecția acesteia cu valoarea $\frac{1}{\alpha H(j\omega^c)}$ permite, de asemenea, a determina valorile β_1^c și β_2^c care conduc la instabilitatea sau stabilitatea sistemului neliniar (fig. 10.18).

Amplitudinea mai mică $\beta_1^c=1{,}10$ corespunde unor oscilații instabile, iar amplitudinea mai mare corespunde oscilațiilor stabile.

Pentru aprecierea celorlalte performanțe ale unui sistem neliniar folosind funcția de descriere, se procedează ca în cazul sistemelor liniare.

Metoda are un grad de precizie limitat, fiind bazată pe aproximarea răspunsului elementului neliniar prin prima armonică, însă poate fi aplicată cu bune rezultate la analiza sistemelor neliniare. Cu ajutorul locului invers se pot determina condițiile ca sistemul neliniar să fie stabil sau instabil.

10.4. ANALIZA SISTEMELOR NELINIARE PRIN METODA PLANULUI FAZELOR

Orice sistem dinamic este caracterizat în orice moment printr-o stare internă, stare care, așa cum s-a arătat în subcapitolul 2.3, permite a determina evoluția sistemului dacă se cunoaște intrarea pe intervalul de timp

Scanned with OKEN Scanner

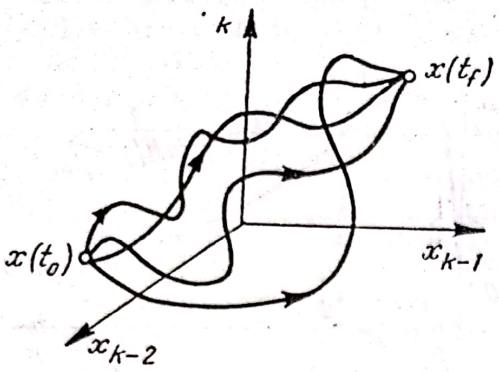


Fig. 10.19. Traiectorii de stare în spațiul stărilor.

considerat. Dacă într-un spațiu al stărilor asociem fiecărei stări un punct pentru fiecare moment de timp și unim aceste puncte de la momentul inițial t_0 la momentul final t_f, obținem o reprezentare geometrică a evoluției stării sistemului, denumită *traiectorie de stare* a sistemului (fig. 10.19).

Cunoașterea unor asemenea traiectorii de stare permite a determina modul de evoluție a sistemului și implicit performanțele acestuia. Dacă reducem acest spațiu la două dimensiuni iar sistemul considerat este de ordinul doi avem de operat cu *planul stărilor* (sau *planul fazelor* și respectiv cu *traiectorii de fază*).

Metoda care permite calculul performanțelor unor sisteme liniare sau neliniare pe baza reprezentării topologice (traiectorii de fază) poartă denumirea de *metoda planului fazelor*.

Metoda planului fazelor este aplicabilă cu bune rezultate la analiza sistemelor de ordinul doi autonome cu soluții unice. Cînd un sistem este comandat cu o intrare sau cînd este variant în timp, traiectoriile se vor intersecta și vor depinde de mai mulți parametri, iar analiza performanțelor devine dificilă. Modelul matematic al unui sistem neliniar de ordinul doi autonom (intrarea este zero) are forma

$$a_2(y, \dot{y})\ddot{y}+a_1(y, \dot{y})\dot{y}+a_0(y, \dot{y})y=0 \qquad (10.25)$$

sau dacă alegem ca variabile de fază y și $\dot{y}$ și presupunem că reprezintă poziția și viteza punctului material, a cărei mișcare este descrisă prin ecuația (10.25), se obține:

$$\dot{x}_1=x_2;$$
$$x_2=-a_0(x_1, x_2)x_1-a_1(x_1, x_2)x_2 \cdot \frac{1}{a_2(x_1, x_2)}. \qquad (10.26)$$

În cazul general modelul matematic al unui sistem neliniar de ordinul doi se poate scrie sub forma:

$$\dot{x}_1=f_1(x_1, x_2);$$
$$\dot{x}_2=f_2(x_1, x_2). \qquad (10.27)$$

Pentru a obține traiectoria de fază trebuie rezolvat sistemul (10.27) eliminînd variabila independentă, timpul. Tangenta unghiului traiectoriei de fază în raport cu axa x_1 a planului se obține din relația

$$\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1}=\frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}. \qquad (10.28)$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (10.28) rezultă că punctul de echilibru de coordonate x_{1e}, x_{2e}, care determină $f_1[x_{1e}, x_{2e}]=0$ și $f_2[(x_{1e}, x_{2e}]=0$, este un punct singular în planul fazelor. În aceste puncte singulare, direcția traiectoriei este nedefinită $\left(\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1}=\frac{0}{0}\right)$.

Numărul de puncte singulare depinde de forma specifică a ecuațiilor:

$$f_1(x_1, x_2)=0;$$

$$f_2(x_1, x_2)=0.$$

Traiectoria de fază care definește evoluția în timp a sistemului prin intermediul succesiunii în timp a punctelor de coordonate $[x_1, x_2]$ este complet determinată prin cunoașterea coordonatelor x_1 și x_2 și a pantei corespunzătoare punctului de pe traiectorie.

De observat faptul că pentru un sistem caracterizat prin modelul (10.25), atunci cînd $x_2=0$ și $f_2(x_1, x_2)\neq 0$, unghiul sub care traiectoria de fază intersectează axa abscisei este egal cu $90°\left(\text{tag } \alpha=\frac{f_2(x_1, x_2)}{x_2}=\infty\right)$.

Deducerea expresiei traiectoriei de fază prin eliminarea variabilei independente timpul, din ecuațiile de stare ale sistemului presupune integrarea ecuațiilor (10.27). Această integrare se poate face analitic, grafic sau numeric, sau cu ajutorul calculatoarelor analogice sau numerice, în funcție de complexitatea acestor ecuații.

Pentru cazul în care referința sistemului este diferită de zero, deci sistemul este neautonom, modelul matematic care caracterizează funcționarea sistemului este:

$$\dot{x}_1=f_1(x_1, x_2, r);$$

$$\dot{x}_2=f_2(x_1, x_2, r).$$

Panta traiectoriei de fază în acest caz este dată de relația

$$\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{f_1(x_1, x_2, r)}{f_2(x_1, x_2, r)},$$

fiind funcție atît de coordonatele x_1, x_2 cît și de referința sistemului $r(t)$ dacă aceasta este variabilă în timp, sau are o anumită valoare constantă.

10.4.1. TRAIECTORIILE DE FAZĂ PENTRU UN SISTEM DE ORDINUL DOI

Pentru un sistem de ordinul doi autonom descris prin ecuația

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\zeta\omega_n\frac{dy}{dt}+\omega_n^2y=0$$

sau

$\frac{d^2y}{d\tau^2}+2\zeta\frac{dy}{d\tau}+y=0$ (dacă se notează $\tau=\omega_n t$), se pot trasa traiectorii de fază pentru diverse valori ale factorului de amortizare.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $\zeta=0$, ecuațiile de stare ale sistemului au forma:

$$\dot{x}_1=x_2=\dot{y};$$
$$\dot{x}_2=-x_1=-y,$$

iar prin integrare se obține ecuația traiectoriei de fază

$$x_1^2+x_2^2=K. \tag{10.29}$$

Ecuația (10.29) reprezintă o familie de cercuri concentrice cu centrul în origine iar raza dependentă de condițiile inițiale ale sistemului (fig. 10.20).

Punctul singular $x_1=x_2=0$ se numește *centru* și este asociat cu echilibrul neutru.

Pentru $\zeta>1$, rădăcinile ecuației caracteristice a sistemului sînt:

$$p_1=-\zeta\oplus\sqrt{\zeta^2-1};$$
$$p_2=-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1},$$

iar răspunsul liber al sistemului se obține ca o sumă a două exponențiale.

Funcția de transfer a sistemului de ordinul doi în acest caz este echivalentă cu funcția de transfer a două elemente de ordinul întîi legate în serie.

Ținînd seama că raportul celor două constante de timp $T_1=-\frac{1}{p_1}$, $T_2=-\frac{1}{p_2}$ corespunzătoare celor două rădăcini ale ecuației caracteristice crește puternic cu creșterea lui ζ, se poate aproxima comportarea sistemului de ordinul doi cu un sistem al cărui model are forma

$$H(s)\simeq\frac{1}{T_1s+1}, \tag{10.30}$$

în ipoteza $T_1\gg T_2$.

Ecuația izoclinei unei drepte de pantă constantă pentru acest caz $\zeta>1$ este de forma

$$\varkappa=-\frac{x_1-2\zeta x_2}{x_2}, \tag{10.31}$$

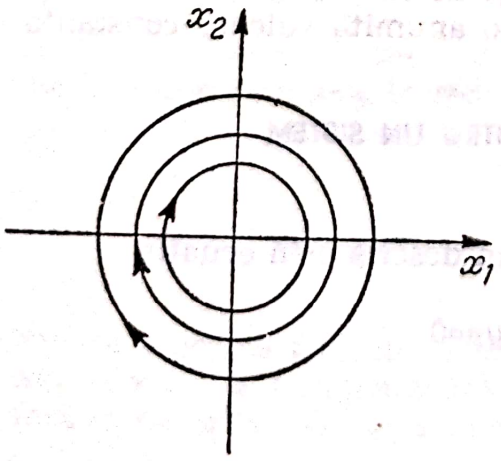


Fig. 10.20. Traiectorii de fază în formă de cercuri obținute pentru un sistem de ordinul doi cu $\zeta=0$.

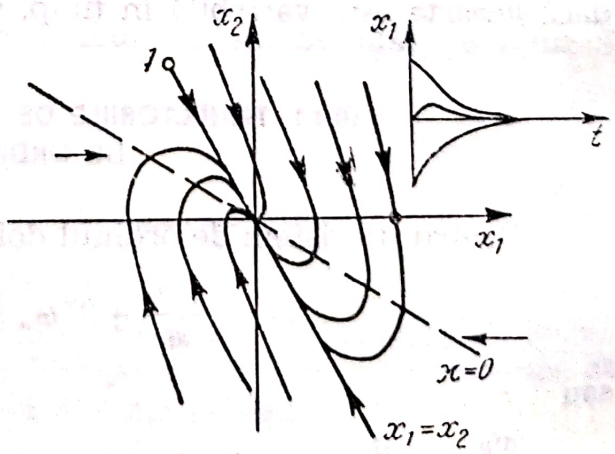


Fig. 10.21. Traiectoriile de fază pentru un sistem de ordinul doi cu $\zeta\geqslant1$.

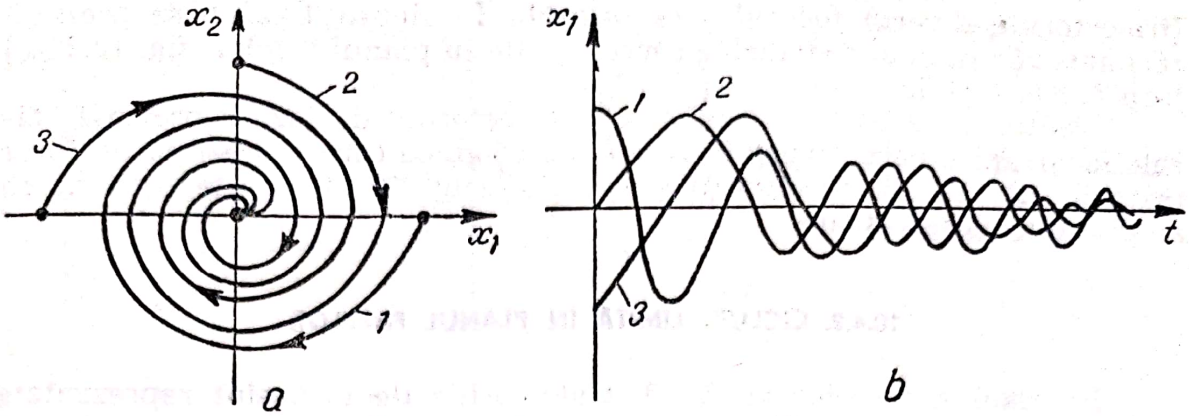


Fig. 10.22. Răspuns liber oscilant amortizat:
a — traiectoriile de fază pentru un sistem de ordinul doi cu $0<\zeta<1$; *b* — răspunsul oscilant amortizat al unui sistem de ordinul doi cu excitație egală cu zero; *1, 2, 3* — diferite traiectorii și răspunsuri.

ceea ce evidențiază că izoclinele reprezintă drepte care trec prin originea planului fazelor.

Forma traiectoriilor de fază pentru sistemul de ordinul doi este prezentată în figura 10.21.

Asimptota corespunzătoare aproximării sistemului cu un sistem de ordinul întîi se obține prin reprezentarea în planul fazelor a ecuației $x_2=\varkappa_1$, $x_1=\varkappa_2 x_1$.

De remarcat faptul că originea planului fazelor este un punct de echilibru al sistemului, iar traiectoriile converg spre acest punct de stabilitate denumit *nod stabil*. În cazul în care traiectoriile diverg dintr-un asemenea punct singular, sistemul este instabil iar punctul respectiv se numește *nod instabil*.

Pentru $1>\zeta>0$, corespunzător unui răspuns liber oscilant amortizat, ecuația traiectoriei evidențiază o spirală logaritmică (fig. 10.22). Punctul singular în acest caz este originea și este cunoscută sub denumirea de *focar*.

Dacă traiectoriile de fază converg spre acest punct singular spunem că sistemul are un punct de echilibru iar *focarul este stabil*; în caz contrar

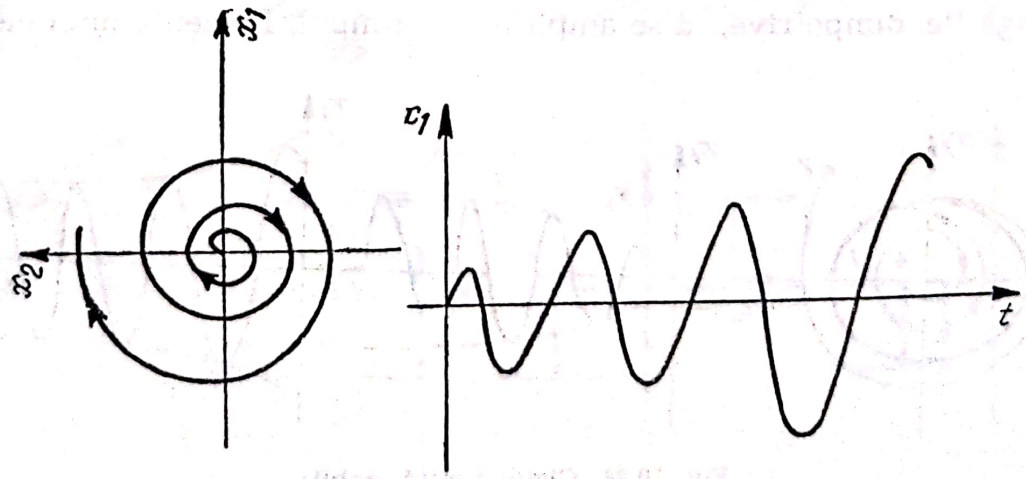


Fig. 10.23. Traiectoria de fază și răspunsul pentru un sistem instabil:
a — traiectorie de fază care diverge; *b* — răspunsul sistemului instabil.

(traiectoriile diverg) *focarul este instabil.* În figura 10.22, *b* se prezintă răspunsul în timp al sistemelor caracterizate în planul fazelor (fig. 10.22, *a*) prin focare stabile.

Pentru un sistem instabil $\zeta < 0$, traiectoriile de fază reprezintă spirale logaritmice care diverg în raport cu originea care reprezintă un focar instabil (fig. 10.23). Răspunsul sistemului (fig. 10.23, *b*) este oscilant cu amplitudinea crescătoare.

10.4.2. CICLURI LIMITĂ ÎN PLANUL FAZELOR

În cazul sistemelor cu $\zeta = 0$, traiectoriile de fază sînt reprezentate prin curbe închise, amplitudinea oscilațiilor întreținute într-un asemenea sistem fiind dependentă de condițiile inițiale ale sistemului. În unele cazuri sistemele reale neliniare prezintă autooscilații stabile, a căror amplitudine nu depinde de condițiile inițiale.

Traiectoria de fază închisă, care caracterizează o stare limită, o mișcare oscilatorie întreținută, de amplitudine și frecvență constante, se denumește *ciclul sau traiectorie limită.* Un *ciclu limită stabil* este prezentat în figura 10.24. Variația mărimii de ieșire este prezentată în figura 10.24, *a* și respectiv în figura 10.24, *b*, corespunzător unor stări inițiale situate în interiorul și exteriorul ciclului limită.

Pornind din orice punct al planului fazelor din afara sau din interiorul ciclului limită, traiectoriile de fază tind a se confunda cu această curbă închisă. Acest ciclu limită este cunoscut ca ciclu limită stabil, deoarece el caracterizează autooscilațiile întreținute stabile cu care se încheie regimul tranzitoriu periodic, independent de condițiile inițiale.

În afară de ciclurile limită stabile există și cicluri limită instabile, cicluri de la care traiectoriile de fază se depărtează atunci cînd timpul tinde spre infinit. Asemenea cicluri limită instabile caracterizează o mare varietate de sisteme neliniare cunoscute ca sisteme „stabile în mic" și „instabile în mare" (v. subcap. 10.6). Aceste sisteme au un răspuns ca cel din figura 10.25, *a* și o traiectorie de fază ca în figura 10.25, *b*.

Un asemenea sistem nu poate oscila stabil pe un ciclu, deoarece o deviere cît de mică de pe acest ciclu face ca oscilațiile sistemului fie să se stingă fie, dimpotrivă, să se amplifice cu timpul. Prezența unui element

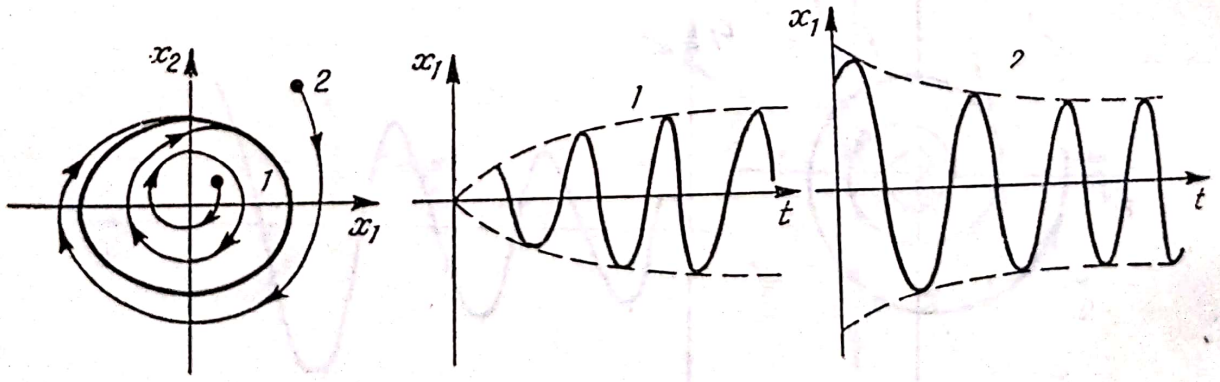


Fig. 10.24. Ciclul limită stabil:
1 — traiectorie ce converge în interiorul ciclului; 2 — traiectorie ce converge în exteriorul ciclului limită.

Scanned with OKEN Scanner

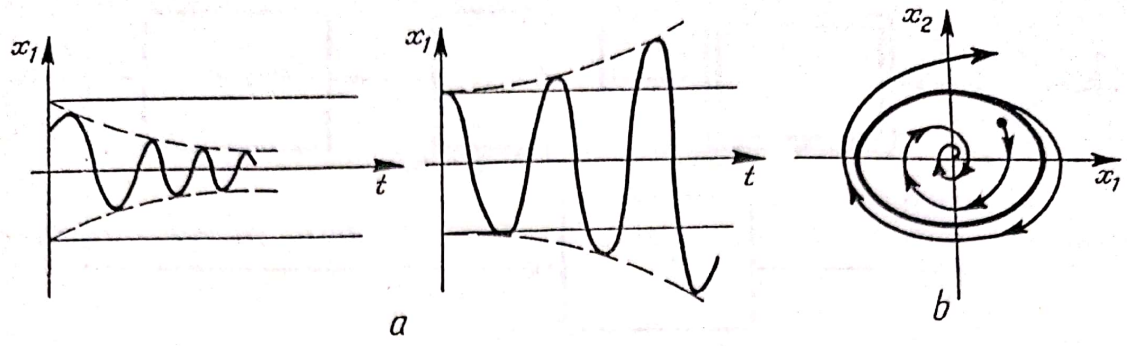


Fig. 10.25. Răspunsul și ciclul limită pentru un sistem instabil:
a — răspunsul sistemului pornind din interiorul și exteriorul ciclului limită; *b* — ciclul limită instabil.

neliniar de tip saturație poate conduce la o funcționare a sistemului după un asemenea ciclu limită. Astfel, dacă abaterile în sistem sînt mici, elementul de corecție lucrează în zona sa liniară asigurînd stingerea oscilațiilor, pe cînd dacă abaterile sînt mari elementul de corecție se saturează și pierde capacitatea de a face sistemul stabil, oscilațiile amplificîndu-se cu timpul.

10.5. ANALIZA SISTEMELOR DE REGLARE CU REGULATOARE BIPOZIȚIONALE ȘI TRIPOZIȚIONALE

Regulatoarele bipoziționale și tripoziționale sînt frecvent utilizate în structuri de sisteme de reglare, datorită simplității lor constructive și performanțelor acceptabile ce se asigură în special pentru procese lente.

● Caracteristica statică a unui regulator bipozițional este prezentată în figura 10.26, *a*, iar caracteristica statică a unui regulator tripozițional este prezentată în figura 10.26, *b*.

Structura unui sistem de reglare cu regulator bipozițional sau tripozițional este dată în figura 10.27.

Ca exemplu considerăm reglarea temperaturii într-un cuptor încălzit electric. În acest caz ieșirea din sistem este temperatura θ, iar referința este valoarea dorită θ_0 a acesteia.

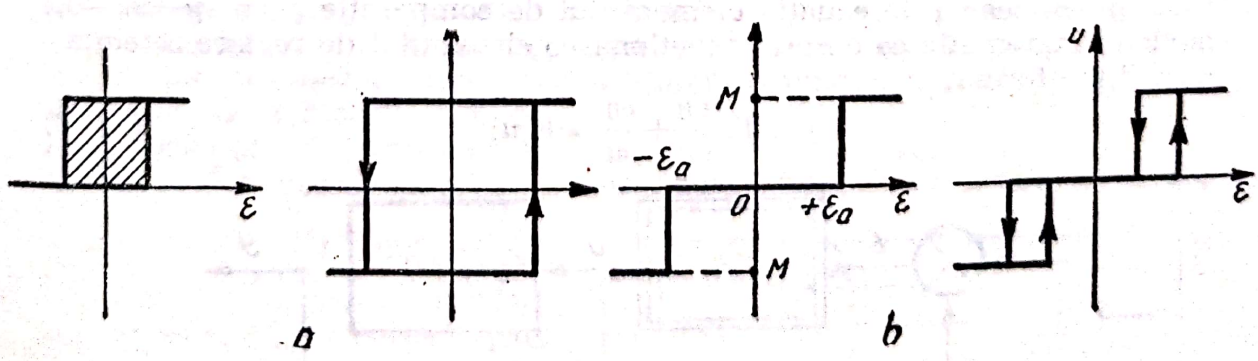


Fig. 10.26. Caracteristicile statice ale regulatorului neliniar:
a — regulatoare bipoziționale; *b* — regulatoare tripoziționale.

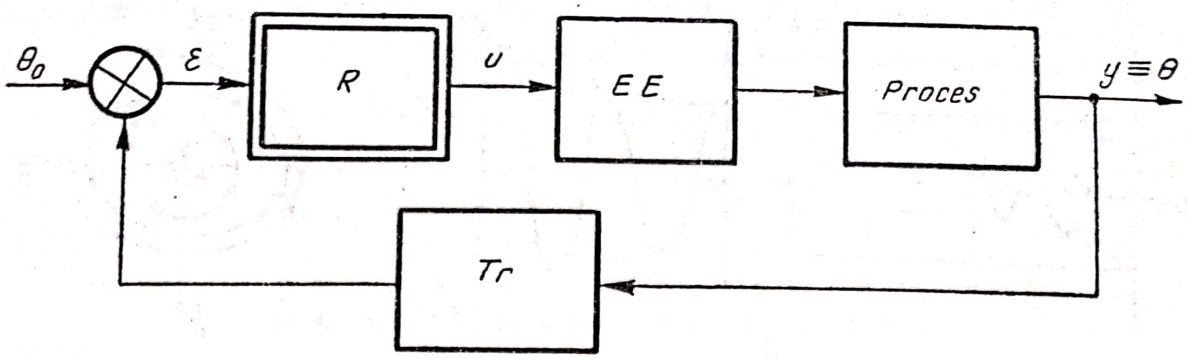


Fig. 10.27. Structura unui sistem de reglare cu regulator neliniar.

Utilizarea unui regulator bipoziţional determină pentru elementul de execuţie două valori ale mărimii de comandă, deci elementul de execuţie are două regimuri de funcţionare determinate de cele două valori fixe ale comenzii. Spre deosebire de reglarea bipoziţională, un regulator tripoziţional este caracterizat prin trei valori fixe ale comenzii şi corespunzător trei regimuri de lucru pentru elementul de execuţie.

Traiectoriile de fază pentru sistemele cu regulatoare bipoziţionale şi tripoziţionale pot fi trasate dacă se ţine seama de funcţia de transfer a părţii liniare a sistemului.

Considerînd că procesul este caracterizat printr-o constantă mare de timp T_f şi un coeficient de transfer K_{tT}, că elementul de execuţie are constante de timp neglijabile în raport cu constanta procesului, fiind un element integral cu coeficientul de transfer K_m, iar traductorul de temperatură este un element proporţional, schema sistemului de reglare are forma dată în figura 10.28.

Funcţia de transfer a părţii liniare a sistemului în condiţiile menţionate are forma

$$K_f(s)=\frac{K_m \cdot K_{tT}}{s\,(T_f s+1)}=\frac{K_f}{s\,(T_f s+1)}, \qquad (10.32)$$

iar algoritmul de reglare este definit prin relaţia:

$$u=\pm M \quad \text{pentru } |\varepsilon|\geqslant\varepsilon_a;$$
$$u=0 \quad \text{pentru } |\varepsilon|<\varepsilon_a.$$

Dacă ţinem seama de ecuaţia elementului de comparaţie $\varepsilon=r-y=\theta_0-\theta_e$, modelul matematic ce descrie funcţionarea sistemului de reglare a temperaturii are forma:

$$T_g\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{d\theta}{dt}=K_f u; \qquad (10.33)$$

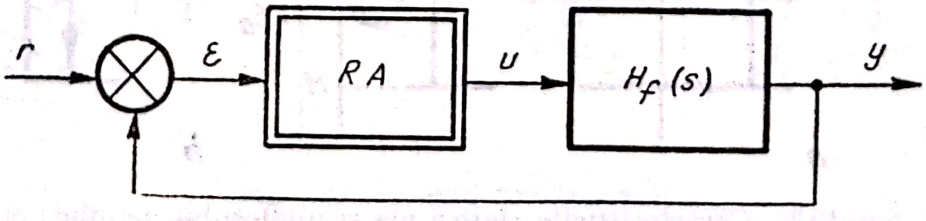


Fig. 10.28. Schema simplificată a sistemului de reglare cu regulator neliniar.

Scanned with OKEN Scanner

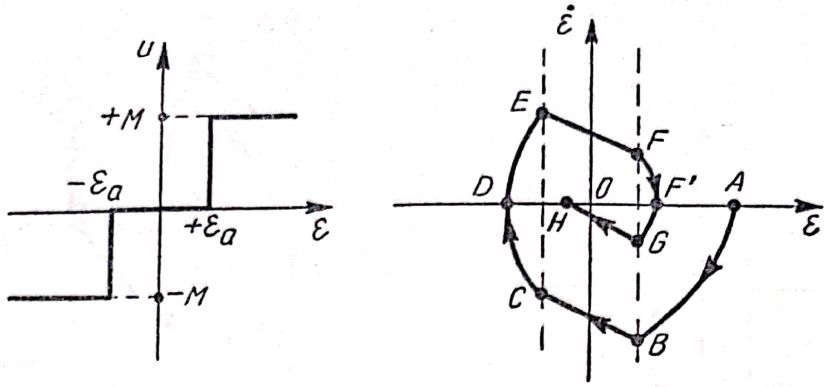


Fig. 10.29. Caracteristica statică a regulatorului neliniar şi traiectoria de fază pentru sistemul neliniar de reglare a temperaturii.

$$u=\pm M \quad \text{pentru} \quad |\varepsilon|\geqslant\varepsilon_a;$$
$$u=0 \quad \text{pentru} \quad |\varepsilon|<\varepsilon_a$$

sau:

$$T_f\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}+\frac{d\varepsilon}{dt}=K_fM \quad \text{pentru} \quad \varepsilon\leqslant-\varepsilon_a; \tag{10.34}$$

$$T_f\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}+\frac{d\varepsilon}{dt}=0 \quad \text{pentru} \quad -\varepsilon_a<\varepsilon<\varepsilon_a; \tag{10.35}$$

$$T_f\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}+\frac{d\varepsilon}{dt}=-K_fM \quad \text{pentru} \quad \varepsilon\geqslant\varepsilon_a. \tag{10.36}$$

Într-o manieră similară se defineşte modelul sistemului în cazul utilizării unui regulator bipoziţional.

Traiectoriile de fază pentru acest sistem sînt trasate în figura 10.29, *b*, corespunzător celor trei ecuaţii ce descriu funcţionarea sistemului (fig. 10.29, *a*). Astfel traiectoriile de fază au forma unor spirale logaritmice în afara zonei pentru $|\varepsilon|>\varepsilon_a$ şi sînt drepte pentru $|\varepsilon|<\varepsilon_a$.

Elementul de execuţie este deconectat în punctul *B*. Dacă, datorită inerţiei, poziţia de echilibru este depăşită cu valoarea $-\varepsilon_a$ (punctul *C*), are loc comanda elementului de execuţie în sens invers (porţiunea *C*—*E*). Porţiunea traiectoriilor *B*—*C*, *E*—*F* şi *G*—*H* corespunde situaţiei de repaus a elementului de execuţie.

Pentru un regulator bipoziţional (fig. 10.30, *a*) ce comandă acelaşi element de execuţie şi acelaşi proces, traiectoriile de fază ale sistemului au forma din figura 10.30, *b*.

Comutarea regimului de lucru al elementului de execuţie are loc cînd eroarea faţă de starea neutră a atins valoarea negativă $-\varepsilon_\delta$ (punctul *B*). Datorită inerţiei, eroarea creşte pînă în *C* iar apoi scade. Comanda de reversare a motorului se transmite numai cînd eroarea a atins valoarea ε_δ corespunzătoare zonei de histerezis. Traiectoria de fază pentru acest sistem se închide într-un ciclu limită.

Pentru diferite condiţii iniţiale pot fi obţinute în planul fazelor diverse traiectorii care alcătuiesc portretul de fază al sistemului.

Scanned with OKEN Scanner

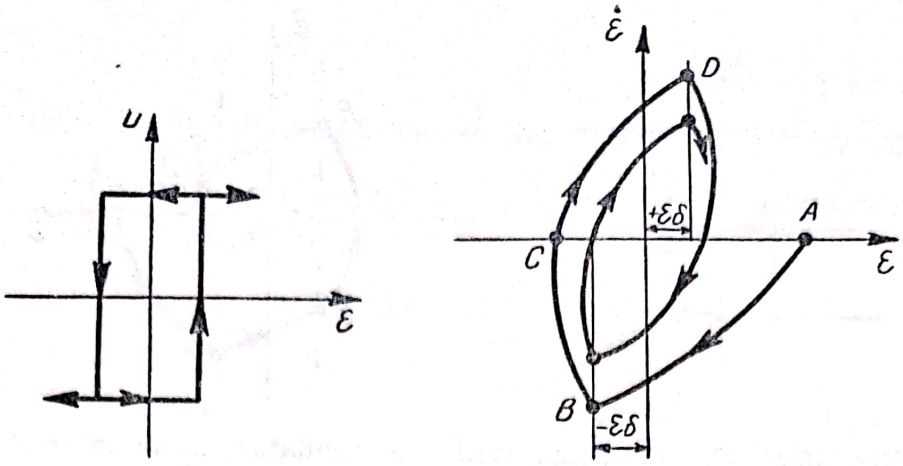


Fig. 10.30. Caracteristica statică a regulatorului bipoziţional şi traiectoria de fază pentru sistemul de reglare a temperaturii.

Este de remarcat faptul că parametrii sistemului, atît ai părţii liniare cît şi a părţii neliniare, determină forma traiectoriilor de fază. Cunoaşterea acestor traiectorii de fază permite a determina performanţele sistemelor. Spre exemplu, pentru sistemul cu regulator tripoziţional, din forma traiectoriei de fază se poate determina răspunsul sistemului şi implicit performanţele acestuia (fig. 10.31).

Pentru a analiza răspunsul unui sistem de reglare cu regulator bipoziţional considerăm un proces de ordinul întîi caracterizat prin constanta de timp T şi coeficientul de amplificare K_{iT}. Elementul de execuţie are două poziţii, închis complet sau deschis complet. Răspunsul sistemului al cărui model este dat în figura 10.32 este reprezentat în figura 10.33.

Mărimea de intrare în regulator este determinată de valoarea mărimii y şi de referinţa fixată. Spre exemplu, dacă procesul automatizat este un cuptor încălzit electric, conectarea la reţea a rezistenţei de încălzire determină creşterea temperaturii în cuptor după o exponenţială cu constantă de timp T. Decuplarea rezistenţei se realizează prin intermediul regulatorului care, primind de la intrare un semnal mai mare sau egal cu zona de histerezis, generează o comandă de deconectare.

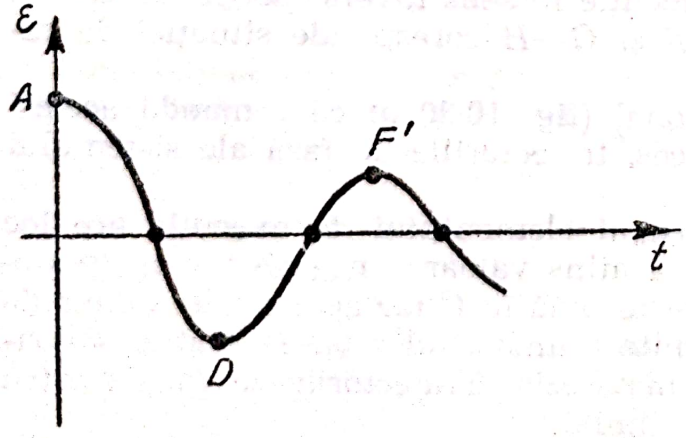


Fig. 10.31. Variaţia erorii în timp dedusă din traiectoria de fază.

La deconectarea rezistenţei, temperatura în cuptor scade după o exponenţială pînă la atingerea pragului de comutare, cînd regulatorul comandă conectarea la reţeaua electrică a rezistenţelor de încălzire. Astfel, în jurul valorii de referinţă a temperaturii, temperatura în cuptor oscilează cu o amplitudine determinată de zona de histerezis, a regulatorului.

Semnalul de comandă în acest caz prezintă o succesiune

Scanned with OKEN Scanner

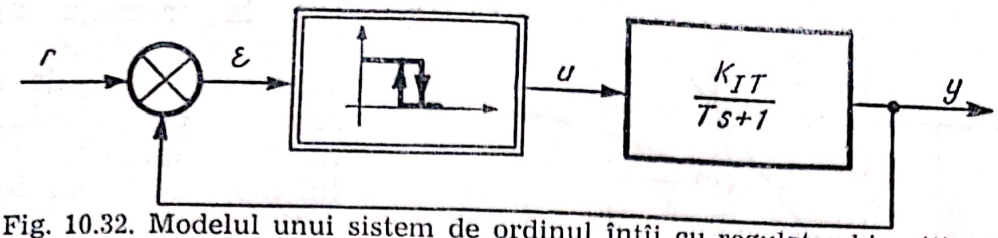


Fig. 10.32. Modelul unui sistem de ordinul întîi cu regulator bipoziţional.

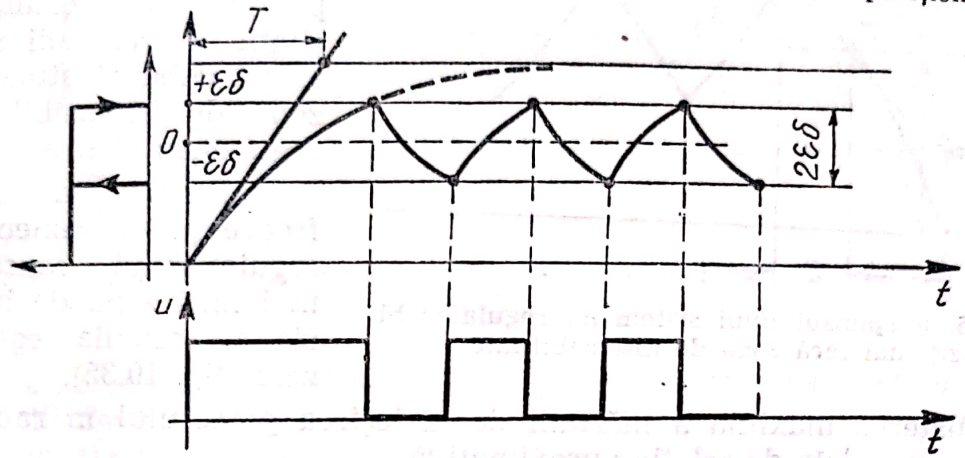


Fig. 10.33. Răspunsul sistemului cu regulator bipoziţional.

de impulsuri cu durată constantă, în afară de primul impuls a cărei durată este determinată de constanta de timp a procesului şi de zona de histerezis a regulatorului. Precizia de reglare este limitată, mărimea reglată fiind menţinută între două limite. Dacă zona de histerezis a regulatorului este redusă, evident precizia de reglare se îmbunătăţeşte, însă frecvenţa de conectare a regulatorului creşte.

Frecvenţa de conectare a regulatorului este sensibil influenţată de constanta de timp a procesului şi anume cu cît constanta de timp este mai mică cu atît frecvenţa de conectare este mai mare. La procese fără întîrziere, frecvenţa de conectare a regulatorului devine foarte mare, determinînd o uzură inadmisibilă.

Dacă considerăm un proces cu timp mort τ, variaţia mărimii de la ieşire (a temperaturii în cuptor) are forma din figura 10.34.

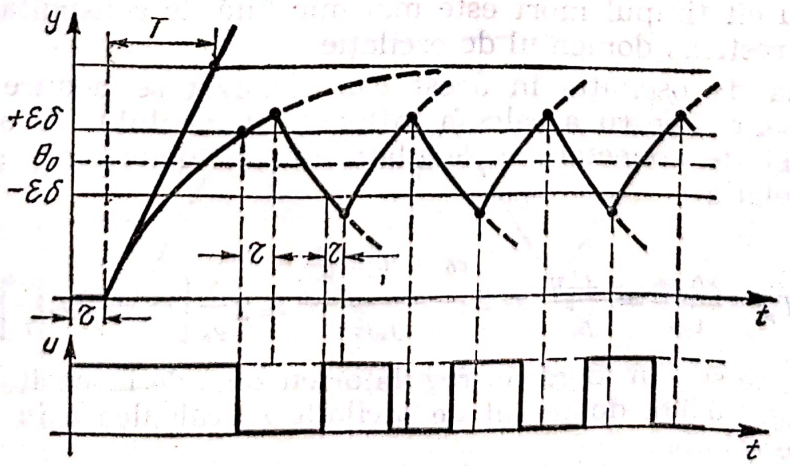


Fig. 10.34. Răspunsul sistemului cu regulator bipoziţional pentru un proces de ordinul întîi şi timp mort.

Scanned with OKEN Scanner

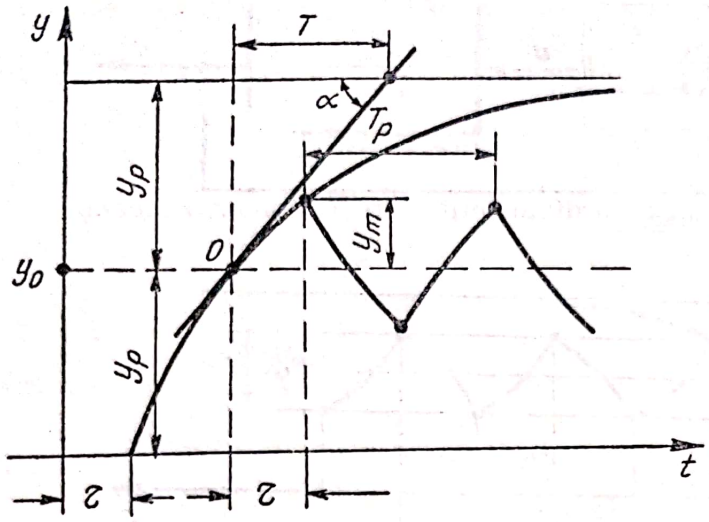


Fig. 10.35. Răspunsul unui sistem cu regulator bipoziţional fără zonă de insensibilitate.

În prezenţa timpului mort mărimea reglată depăşeşte zona de histerezis a regulatorului, dat fiind că datorită timpului mort mărimea de execuţie este resimţită după parcurgerea acestuia. Oscilaţii ale mărimii reglate există chiar şi atunci cînd zona de insensibilitate a regulatorului este zero.

Pentru a calcula frecvenţa de conectare a regulatorului considerăm mai întîi zona de histerezis a acestuia egală cu zero (fig. 10.35).

Abaterea maximă a mărimii de la ieşirea procesului în raport cu referinţa este dată de relaţia aproximativă

$$y_m \simeq \tau \cdot \operatorname{tg} \alpha. \tag{10.37}$$

Dacă aproximăm răspunsul în punctul O prin tangentă, rezultă

$$y_m \approx y_p \cdot \frac{\tau}{T}; \tag{10.38}$$

Domeniul de oscilaţie al mărimii de ieşire în acest caz este

$$\Delta y = 2y_m = 2y_p \cdot \frac{\tau}{T}. \tag{10.39}$$

De remarcat faptul că acest domeniu de oscilaţie se obţine în cazul în care rezerva de putere este de 100%, adică mărimea de execuţie are o valoare de două ori mai mare decît aceea necesară pentru menţinerea constantă a mărimii de la ieşirea procesului de conectare permanentă. Rezultă că cu cît timpul mort este mai mic faţă de constanta de timp cu atît este mai restrîns domeniul de oscilaţie.

Perioada de oscilaţie în acest caz idealizat se deduce uşor, fiind egală cu $T_p = 4\tau$. Pentru a calcula influenţa domeniului de oscilaţie asupra frecvenţei de conectare a regulatorului se determină perioada de oscilaţie cu relaţia

$$T_p \simeq \frac{2\Delta y\, \varphi}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{2\Delta y}{y_m/\tau} = 2\,\frac{\varepsilon_\delta + 2y_0 \cdot \frac{\tau}{T}}{y_m/\tau} = 2\,\frac{\tau}{y_m}\left[\varepsilon_\delta + 2y_0 \frac{\tau}{T}\right].$$

În cazul în care se consideră un regulator cu zona de insensibilitate (histerezis), ε_δ (fig. 10.36), domeniul de oscilaţie se calculează în mod similar şi este dat de relaţia

$$\Delta y = 2\varepsilon_\delta + 2y_m = 2\varepsilon_\delta + 2y_p \cdot \frac{\tau}{T}; \tag{10.40}$$

Scanned with OKEN Scanner

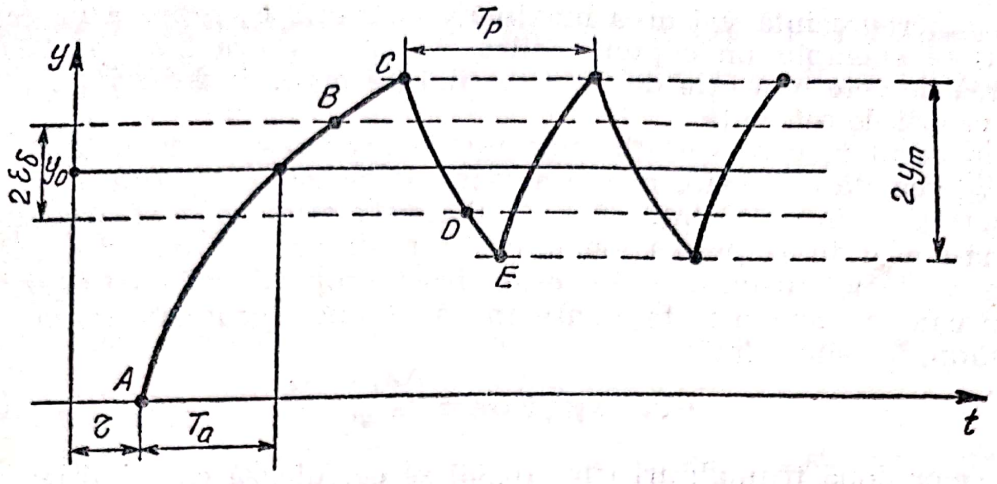


Fig. 10.36. Răspunsul unui sistem neliniar cu regulator bipoziţional cu zonă de insensibilitate.

Perioada de oscilaţie T_p în acest caz creşte ca urmare a prezenţei zonei de insensibilitate a regulatorului.

Variaţia mărimii de la ieşire în punctele de trecere dintre ramura ascendentă şi cea descendentă are o formă rotunjită datorită trecerii treptate a mărimii reglate din domeniul timpului mort în domeniul caracterizat prin intermediul constantei de timp. Ţinînd seama de acest răspuns real al sistemului, domeniul de oscilaţie este întotdeauna mai mic decît rezultatul obţinut cu ajutorul relaţiei (10.40).

Dacă rezerva de putere este diferită de 100%, domeniul de oscilaţie se modifică (fig. 10.37).

Aproximînd curbele de variaţie a mărimii de ieşire cu tangentele în punctul de intersecţie cu dreapta ce reprezintă referinţa, rezultă domeniul de oscilaţie sub forma

$$\Delta y = 2\varepsilon_\delta + y_{max}\frac{\tau}{T}, \qquad (10.41)$$

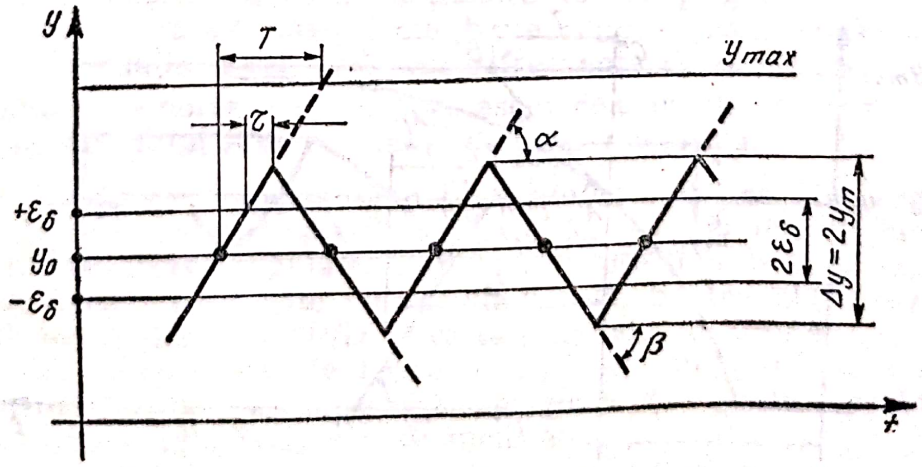


Fig. 10.37. Modificarea domeniului de oscilaţie funcţie de rezerva de putere a sistemului.

Scanned with OKEN Scanner

unde y_{max} reprezintă valoarea maximă a mărimii de ieşire a procesului.

Spre exemplu un cuptor realizează temperatura maximă 800°, iar valoarea de referinţă este de 500°. Oscilaţiile mărimii de ieşire au loc în jurul valorii de referinţă.

În cazul în care variaţia mărimii de ieşire este nesimetrică ($y_0 \leqslant 0{,}5\ y_{max}$) rezultă o valoare medie a mărimii de ieşire diferită de valoarea de referinţă şi în consecinţă apare o abatere staţionară. Valoarea abaterii staţionare este direct proporţională cu timpul mort al procesului, avînd în vedere că domeniul de oscilaţie este direct proporţional cu timpul mort. Pentru calculul abaterii staţionare în cazul unei încărcări nesimetrice a procesului, folosim relaţia

$$\Delta y_a = y_0 - y_{med} = \frac{\Delta A_1 - \Delta A_2}{T_p} \tag{10.42}$$

Ariile celor două triunghiuri (fig. 10.38) se calculează cu relaţiile:

$$\Delta A_1 = \frac{1}{2} y_{m1}\ (\tau + T'); \qquad \Delta A_2 = \frac{1}{2} y_{m2}\ (\tau + T''). \tag{10.43}$$

Dar din asemănarea triunghiurilor ABC şi $AE'D'$, respectiv DEF şi $A'B'C'$ rezultă:

$$T' = y_{m1} \cdot \frac{T}{y_0 + y_{m1}}; \qquad T'' = y_{m2} \cdot \frac{T}{y_{max} - y_0}. \tag{10.44}$$

Introducînd pe (10.43) şi (10.44) în (10.42) rezultă expresia abaterii staţionare

$$\Delta y_a = \left(y_0 - \frac{y_{max}}{2} \right) \frac{\tau}{T}. \tag{10.45}$$

Abaterea staţionară este cu atît mai mare cu cît raportul $\frac{\tau}{T}$ este mai mare şi evident cu cît diferenţa între valoarea medie a mărimii de ieşire

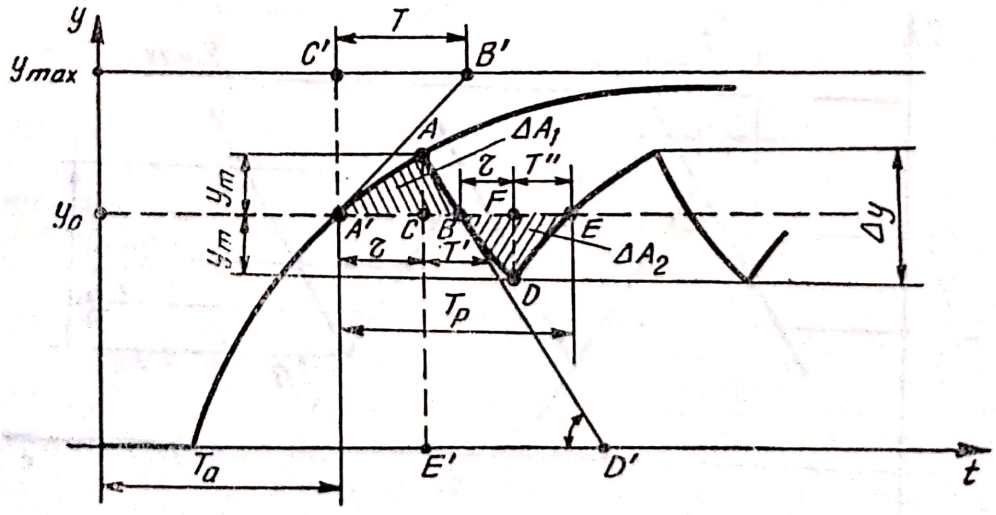


Fig. 10.38. Calculul erorii staţionare pentru un sistem neliniar cu regulator bipoziţional.

Scanned with OKEN Scanner

și valoarea de referință este mai mare. Dacă rezerva de încărcare a procesului tehnologic este 100%, $y_0=\frac{y_{max}}{2}$, rezultă o abatere staționară egală cu zero.

O altă performanță a sistemului de reglare bipozițională influențată de modul de încărcare a procesului este timpul de amorsare T_a (fig. 10.38), respectiv timpul care trece pînă cînd după conectarea procesului se atinge în circuitul de reglare, pentru prima dată, valoarea de referință. Valoarea acestui timp de amorsare este cu atît mai mică cu cît rezerva de putere este mai mare. Performanțele ce trebuie urmărite la o reglare bipozițională sînt:

— domeniul de oscilație al mărimii de ieșire Δy;

— perioada de oscilație a sistemului T_p sau durata unui ciclu de reglare;

— frecvența de conectare $f_c=\frac{1}{T_p}$, care reprezintă numărul de conectări sau deconectări în unitatea de timp;

— timpul de amorsare T_a;

— eroarea staționară sau abaterea staționară care reprezintă abaterea medie a valorii reglate a ieșirii față de valoarea prescrisă (referință).

Performanțele unui sistem de reglare bipoziționat sînt influențate atît de caracteristicile regulatorului (zona de histerezis) cît și de caracteristicile procesului, timp mort, constantă de timp, încărcare (rezerva de putere).

Zona de histerezis a regulatorului influențează amplitudinea oscilațiilor mărimii de la ieșire. O reducere a zonei de histerezis determină o reducere a amplitudinii oscilațiilor dar o creștere a frecvenței de conectare a regulatorului. De aceea, micșorarea zonei de histerezis este condiționată de valoarea admisibilă a frecvenței de conectare a regulatorului.

Raportul dintre timpul mort al procesului și constanta de timp $\left(\frac{\tau}{T}\right)$ influențează valoarea abaterii staționare direct proporțional. Valoarea redusă a acestui raport are efecte bune asupra erorii staționare, însă perioada de oscilație scade deci crește frecvența de comutare.

Timpul de amorsare T_a este, de asemenea, influențat direct de timpul mort al procesului și de constanta de timp a acestuia.

O categorie importantă de procese tehnologice sînt reglate cu performanțe bune, utilizînd regulatoarele cu acțiune discontinuă (neliniare). Printre aceste regulatoare neliniare prezintă interes regulatoarele tripoziționale prevăzute cu reacție locală, pentru obținerea diverselor legi de reglare *PI*, *PID*. Aceste regulatoare primesc la intrare semnalul de eroare și dau la ieșire un semnal sub formă de impulsuri modulate în durată. Din această categorie fac parte regulatoarele ELC 132, regulatoarele Teleperm, Siemens etc.

Structura unui sistem de reglare prevăzut cu un regulator discontinuu cu ieșire sub formă de impulsuri modulate în durată și element de execuție de tip integral este prezentată în figura 10.39.

Scanned with OKEN Scanner

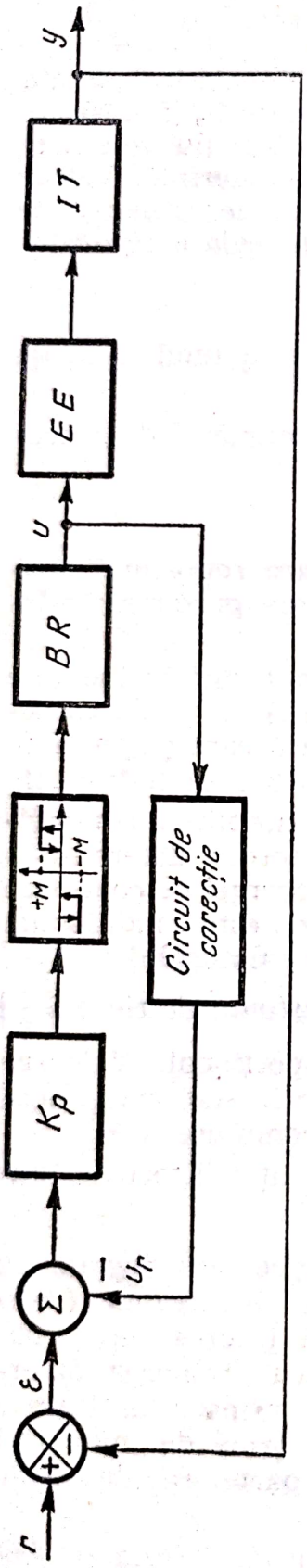


Fig. 10.39. Structura unui sistem de reglare cu regulator cu ieșire cu impulsuri modulate în durată.

Prin alegerea corespunzătoare a circuitului de corecție și pentru un anumit tip de element de execuție se obține o anumită lege de reglare a procesului tehnologic.

Circuitul de corecție primește la intrare o tensiune constantă prin comutarea unuia dintre cele două relee electromagnetice ce compun blocul de relee *BR*. Releele sînt conectate în funcție de starea regulatorului tripozițional, stare determinată de amplitudinea și polaritatea semnalului de eroare.

Printre avantajele utilizării unui asemenea tip de regulator notăm:

— Realizarea unor circuite de corecție *RC* cu valori ale rezistențelor și capacităților mai reduse ca la regulatoarele continue.

— Posibilitatea utilizării elementelor de execuție de tip integral (motor electric), care împreună cu regulatoarele cu ieșire în impulsuri realizează legea de reglare *PI*.

— Comutarea de la regimul automat la cel manual se poate face direct fără echilibrare prealabilă ca în cazul regulatoarelor cu acțiune continuă. Aceasta este posibilă deoarece ieșirea regulatorului înaintea comutării (poziția unghiulară a axului elementului de execuție) este „memorată" chiar de către elementul de execuție care va acționa apoi corespunzător comenzii manuale pornind din poziția pe care o avea înaintea comutării.

— La defectarea unui asemenea regulator, ieșirea din regulator devenind nulă, elementul de execuție rămîne în poziția pe care o avea în momentul apariției defectului, trecîndu-se ușor la comanda manuală.

— În general aceste regulatoare au o construcție modulară, ușor accesibilă pentru depanare și înlocuire.

Aceste regulatoare nu pot fi utilizate pentru reglarea unor procese foarte rapide; un rol important în limitarea constantelor de timp ale proceselor ce pot fi reglate îl joacă constanta de timp a elementului de execuție. Mărimea de comandă variază în trepte, iar comportarea *PI* a regulatorului se obține prin aproximarea deplasării elementului de execuție cu o dreaptă care reprezintă o valoare medie a mărimii de comandă.

Scanned with OKEN Scanner

La aceste regulatoare, deşi se asigură o lege de reglare *PI*, în regim staţionar va exista o eroare staţionară datorită zonei de insensibilitate. Acordarea acestor regulatoare se face în cele mai multe cazuri pe cale experimentală.

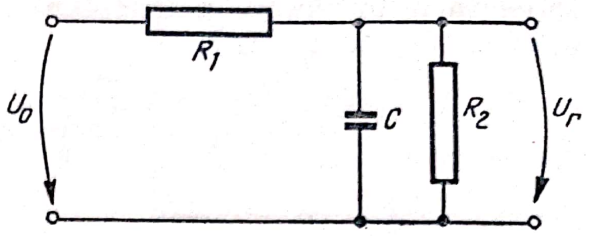


Fig. 10.40. Circuit de corecţie locală.

Utilizarea reacţiei negative în jurul regulatorului tripoziţional conduce la o îmbunătăţire a performanţelor sistemului de reglare, micşorarea substanţială a amplitudinii oscilaţiilor parametrului reglat făcînd posibilă aproximarea răspunsului cu o funcţie continuă.

Pentru un circuit de corecţie de tipul celui prezentat în figura 10.40, funcţia de transfer are forma

$$H_c(s)=\frac{U_r(s)}{U_0(s)}=\frac{\left(R_2\cdot\frac{1}{Cs}\right)\Big/\left(R_2+\frac{1}{Cs}\right)}{R_1+\left(R_2\cdot\frac{1}{Cs}\right)\Big/\left(R_2+\frac{1}{Cs}\right)}=\frac{\frac{R_2}{R_1+R_2}}{\frac{R_1\cdot R_2}{R_1+R_2}Cs+1} \qquad (10.46)$$

sau

$$H_c(s)=\frac{K}{T_1s+1}, \qquad (10.47)$$

unde

$$K=\frac{R_2}{R_1+R_2} \quad \text{şi} \quad T_1=\frac{R_1\cdot R_2}{R_1+R_2}\cdot C.$$

Admiţînd că se închide releul corespunzător deplasării înainte a servomotorului, deci ieşirea regulatorului este $+M$, semnalul de reacţie ce se aplică la intrarea regulatorului, datorită faptului că $u_0(t)$ (tensiunea aplicată la intrarea circuitului de reacţie) este o treaptă $u_0(t)=M$, are forma

$$u_r(t)=K\,M\,(1-e^{-t/T_1}). \qquad (10.48)$$

Această tensiune se aplică la intrarea regulatorului în opoziţie cu mărimea abaterii ε_0. Astfel, intrarea în regulator va scădea de la valoarea ε_0 pînă cînd se va atinge valoarea pragului de declanşare Δ_1. La acest moment se poate scrie relaţia

$$v(t_{a0})=\varepsilon_0-u_r(t_{a0})=\Delta_1. \qquad (10.49)$$

Timpul la care are loc declanşarea se obţine uşor, ţinînd seama de relaţiile (10.48) şi (10.49)

$$t_{a0}=T_1\ln\cdot\frac{K\cdot M}{K\cdot M+\Delta_1-\varepsilon_0}: \qquad (10.50)$$

Relaţia (10.50) permite calculul duratei primului impuls. La momentul t_{a0} regulatorul cu trei poziţii va bascula din starea „1" în starea „0", iar releele electromagnetice sînt declanşate. Condensatorul de pe calea de reacţie se va descărca prin rezistenţa R_2, cu constanta de timp $T_2=R_2C$,

Scanned with OKEN Scanner

astfel încît în timpul pauzei tensiunea de reacție va scădea de la valoarea $u_r(t_{a0})$ după relația

$$u_r(t)=u_r(t_{a0})e^{\frac{t-t_{a0}}{T_2}}$$

sau

$$u_r(t)=(\varepsilon_0-\Delta_1)e^{\frac{t-t_{a0}}{T_2}}, \tag{10.51}$$

iar tensiunea de intrare a regulatorului va crește pînă în momentul $t=t_1$, cînd se îndeplinește condiția de anclanșare a releului

$$v(t_1)=\Delta=\varepsilon_0-u_r(t_1). \tag{10.52}$$

Înlocuind (10.51) în (10.52) și explicitînd pe t_1, se obține

$$t_1=t_{a0}+T_2 \ln \frac{\varepsilon_0-\Delta_1}{\varepsilon_0-\Delta}, \tag{10.53}$$

iar durata pauzei este dată de relația

$$t_p=t_1-t_{a0}=T_2 \ln \frac{\varepsilon_0-\Delta_1}{\varepsilon_0-\Delta}. \tag{10.54}$$

Prin anclanșarea regulatorului electronic cu trei poziții și conectarea la intrarea circuitului de reacție a treptei de tensiune $u_0(t)=+M$, semnalul de reacție va crește exponențial cu constanta de timp T_1, dar pornind de la valoarea inițială $u_r(t_1)$

$$u_r(t)=u_r(t_1)\, e^{-\frac{t-t_1}{T_1}}+K\cdot M\,(1-e^{-\frac{t-t_1}{T_1}}),$$

sau

$$u_r(t)=(\varepsilon_0-\Delta)\, e^{-\frac{t-t_1}{T_1}}+K\cdot M\,(1-e^{-\frac{t-t_1}{T_1}});$$

$$u_r(t)=K\cdot M+(\varepsilon_0-\Delta-K\cdot M)\, e^{-\frac{t-t_1}{T_1}}. \tag{10.55}$$

Impulsul va dura începînd din momentul t_1 pînă în momentul t_2, cînd se va atinge valoarea pragului de declanșare Δ_1

$$v(t_2)=\varepsilon_0-u_r(t_2)=\Delta_1.$$

Ținînd seama de relația (10.55) rezultă

$$t_2=t_1+T_1 \ln \frac{K\cdot M+\Delta-\varepsilon_0}{K\cdot M+\Delta_1-\varepsilon_0}, \tag{10.56}$$

iar durata impulsului este dată de relația

$$t_a=t_2-t_1=T_1 \ln \frac{K\cdot M+\Delta-\varepsilon_0}{K\cdot M+\Delta_1-\varepsilon_0}. \tag{10.57}$$

În continuare procesul se va repeta, mărimea $v(t)$ oscilînd între limitele de basculare Δ și Δ_1, iar durata impulsurilor și a pauzelor se menține constantă. Rezultă că prin aplicarea la intrarea regulatorului a unei

Scanned with OKEN Scanner

trepte de valoare ε_0, la ieşire vom obţine un prim impuls, mai lung de durată t_{a0}, iar apoi impulsurile şi pauzele se succed periodic cu perioada

$$T=T_1 \ln \frac{K\cdot M+\Delta-\varepsilon_0}{K\cdot M+\Delta_1-\varepsilon_0}- \\ -T_2 \ln \frac{\varepsilon_0-\Delta_1}{\varepsilon_0-\Delta}. \qquad (10.58)$$

Amplitudinea impulsurilor la ieşirea din regulator este constantă şi semnalul de comandă are forma unei succesiuni de impulsuri modulate în durată (fig. 10,41, *b*).

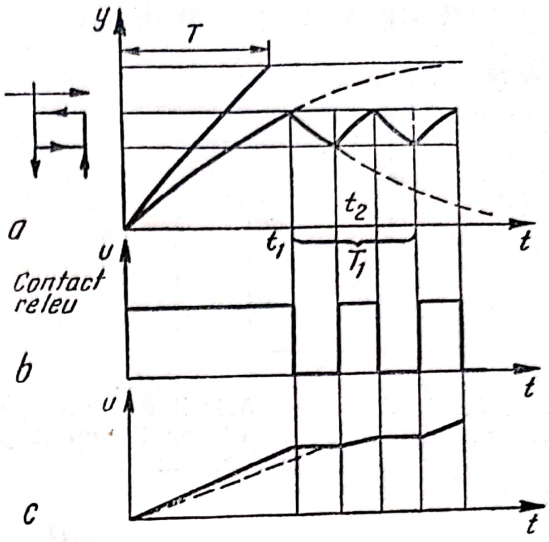


Fig. 10.41. Răspunsul unui sistem de reglare cu regulator cu ieşire sub formă de impulsuri:
a — variaţia mărimii de ieşire; b — variaţia mărimii de comandă; *c* — variaţia mărimii de execuţie.

Valoarea medie a ieşirii regulatorului evidenţiază o comportare de tip *PD*, primul impuls lung reprezintă efectul derivativ, iar succesiunea de impulsuri mai scurte şi egale între ele avînd un anumit coeficient de umplere reprezintă efectul proporţional. Combinînd această comportare cu acţiunea integrală a elementului de execuţie rezultă în ansamblu o comportare de tip *PI*. Pentru valoarea negativă a intrării regulatorului ($-\varepsilon_0$) fenomenele se petrec la fel însă în relaţiile de calcul deduse intervin valorile $-\varepsilon_0$ şi $-M$, elementul de execuţie deplasîndu-se în sens invers.

De remarcat faptul că parametrii regulatorului: Δ, Δ_1, M, şi parametrii circuitului de reacţie K, T_1, precum şi valoarea treptei aplicate la intrarea regulatorului ε_0, determină durata impulsurilor şi a pauzelor, respectiv performanţele sistemului. Dacă $\Delta=\Delta_1$ (lipseşte histerezisul) durata impulsului este zero şi schema pierde capacitatea de lucru (10.57). Durata primului impuls este sensibil influenţată de amplitudinea treptei aplicată la intrarea regulatorului (10.50).

Parametrii de acord ai unui regulator *PI* cu ieşire în formă de impulsuri modulate în amplitudine se pot determina din figura 10.42. Linia punctată reprezintă răspunsul unui regulator *PI* continuu cu parametrii K_R şi T_i în cazul în care la intrare se aplică semnalul ε_0.

Din figura 10.42 se vede că $\Delta ABC \sim \Delta CDE$ iar $\Delta OBC \sim \Delta EFD$, putîndu-se scrie relaţiile:

$$\frac{T_i+t_{a0}}{t_p+t_a}=\frac{BC}{DE}; \qquad (10.59)$$

$$\frac{t_{a_0}}{t_a}=\frac{BC}{DE}$$

sau

$$\frac{T_i+t_{a_0}}{t_p+t_a}=\frac{t_{a_0}}{t_a}.$$

Scanned with OKEN Scanner

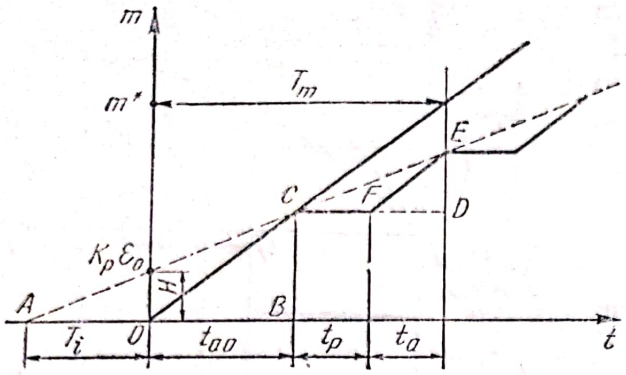


Fig. 10.42. Variația mărimii de execuție pentru un sistem cu regulator PI cu impulsuri modulate în durată.

Constanta echivalentă a acțiunii integrale este dată de relația

$$T_i = \frac{t_p}{t_a} \cdot t_{a_0} \; . \qquad (10.60)$$

Pentru determinarea lui K_p echivalent ținem seama, de asemenea, de figura 10.42 și observăm că $\Delta AOH \sim \Delta CED$ și $\Delta OBC \sim \Delta EFD \sim \Delta OC'H'$. Din aceste asemănări rezultă:

$$\frac{K_R\varepsilon_0}{T_i} = \frac{ED}{t_p + T_a};$$

$$\frac{ED}{t_a} = \frac{BC}{OB} = \frac{m^*}{T_m}, \qquad (10.61)$$

unde m^* reprezintă întreaga cursă a elementului de execuție parcursă în timpul T_m.

Din relațiile (10.61) și (10.60) rezultă expresia factorului de amplificare

$$K_R = \frac{m^*}{T^m} \cdot \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{t_p \cdot t_{a_0}}{t_p + t_a} = K_M \cdot \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{t_{a_0}}{1 + \frac{t_a}{t_p}}, \qquad (10.62)$$

unde $K_M = \frac{m^*}{T_m}$ reprezintă o mărime caracteristică a servomotorului. Rezultă că factorul de amplificare al regulatorului este determinat de domeniul de variație al mărimii de execuție m^*, de nivelul intrării precum și de durata impulsurilor t_{a_0} și t_a și durata pauzei t_p. Expresiile lui K_R și T_i funcție de parametrii regulatorului se obțin înlocuind în relațiile (10.60) și (10.62) expresiile lui t_{a_0}, t_a și t_p:

$$K_R = K_M \cdot \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{T_1 \cdot \ln \frac{K \cdot M}{K \cdot M + \Delta_1 - \varepsilon_0}}{1 + \frac{T_1 \cdot \ln \frac{K \cdot M + \Delta - \varepsilon_0}{K \cdot M + \Delta_1 - \varepsilon_0}}{T_2 \ln \frac{\varepsilon_0 - \Delta_1}{\varepsilon_0 - \Delta}}}; \qquad (10.63)$$

$$T_i = T_2 \cdot \ln \frac{\varepsilon_0 - \Delta_1}{\varepsilon_0 - \Delta} : \frac{\ln \frac{K \cdot M}{K \cdot M + \Delta_1 - \varepsilon_0}}{\ln \frac{K \cdot M + \Delta - \varepsilon_0}{K \cdot M + \Delta_1 - \varepsilon_0}}, \qquad (10.64)$$

Acordarea acestor regulatoare implică alegerea corespunzătoare a parametrilor Δ, Δ_1, K, T_1, T_2, pentru care răspunsul sistemului este cel dorit. Această acordare în cele mai multe cazuri se face, practic, în funcție de nivelul intrării și de tipul procesului. Pentru $\varepsilon_0 \in [5\Delta, 20\Delta]$, $T_1 \simeq T_2$ iar

Scanned with OKEN Scanner

acordarea parametrului T_i se face prin modificarea rezistenței R_2 din circuitul de corecție al regulatorului.

Pentru regulatorul ELC 132 acordarea se face prin încercări succesive, cu sistemul de reglare în funcțiune. Algoritmul ce trebuie urmat pentru acordarea unui regulator *PI* cuprinde următoarele etape:

— se fixează banda de proporționalitate *BP* și timpul integral T_i la valorile maxime;

— se scade treptat *BP* pînă cînd parametrul reglat începe să oscileze;

— se mărește de 1,5 ... 2 ori *BP* pentru a se anula oscilațiile parametrului reglat;

— se scade treptat T_i pînă cînd se obține regimul tranzitoriu dorit;

— pentru perturbații de scurtă durată în proces, se fixează o temporizare la anclanșare astfel încît să se asigure filtrarea acestor perturbații.

Pentru un regulator *PID* etapele acordării experimentale sînt:

— se fixează timpul de derivare T_d la valoarea zero;

— se acordă regulatorul *PI* ca mai sus pînă se obține un răspuns aperiodic;

— se crește apoi T_d pînă se obține răspunsul dorit.

Problemele legate de alegerea și acordarea regulatoarelor neliniare se rezolvă de la caz la caz în funcție de tipul procesului, de valoarea timpului mort și evident de cerințele de performanță impuse sistemului.

La regulatoarele bipoziționale și tripoziționale, deși asigură performanțe mai scăzute pentru sistem, avantajele oferite prin simplitatea constructivă, prețul de cost redus, întreținerea și depanarea ușoară reprezintă argumente ce trebuie avute în vedere la alegerea soluției de automatizare.

Analiza răspunsului în timp al sistemelor neliniare cu regulatoare bipoziționale și al anumitor sisteme cu regulatoare tripoziționale evidențiază un regim permanent de oscilații, a căror amplitudine este determinată atît de caracteristicile dinamice ale procesului (τ, T) cît și de caracteristicile regulatoarelor (Δ, Δ_1', M). Acest regim de funcționare este cunoscut din punctul de vedere al stabilității ca *stabilitate a autooscilațiilor* spre deosebire de *stabilitatea de echilibru.*

Conceptul de stabilitate a sistemelor neliniare este diferit față de sistemele liniare, acesta depinzînd de nivelul abaterilor față de starea de echilibru, de prezența sau absența acțiunilor externe (subcap. 10.6).

Alegerea și acordarea regulatoarelor neliniare trebuie să se facă ținînd seama de gradul de stabilitate impus. Amplitudinea oscilațiilor ce caracterizează în acest caz un regim staționar al sistemului trebuie să se încadreze într-un domeniu de variație admisibil, domeniu ce asigură *stabilitatea autooscilațiilor* sistemului.

10.6. STABILITATEA SISTEMELOR NELINIARE

Conceptul de stabilitate a sistemelor neliniare diferă esențial de conceptul de stabilitate a sistemelor liniare. Astfel, stabilitatea unui sistem neliniar este dependentă de intrarea acestuia și de starea lui inițială, spre

Scanned with OKEN Scanner

deosebire de cazul liniar unde stabilitatea este o proprietate intrinsecă a sistemului, independentă de intrarea acestuia; starea unui sistem liniar stabil va atinge originea spaţiului stării independent de amplitudinea stării iniţiale x_0.

Există în literatură [33] mai multe metode care permit a verifica stabilitatea sistemelor neliniare şi mai multe definiţii pentru conceptul de stabilitate a sistemelor neliniare.

În cele ce urmează vom considera numai sistemele autonome caracterizate prin ecuaţia de stare de forma

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathrm{f}[\mathbf{x}(t)].$$

Dacă $\mathbf{x}_e$ este o stare de echilibru, adică f este zero pentru $\mathbf{x}=\mathbf{x}_e$ (mişcarea încetează), spunem că $\mathbf{x}_e$ este stabilă dacă o soluţie începînd de la $\mathbf{x}(t_0)$ aproape de $\mathbf{x}_e$ rămîne aproape sau atinge pe $\mathbf{x}_e$ şi instabilă dacă o asemenea soluţie se depărtează de starea $\mathbf{x}_e$.

Stabilitatea locală poate fi definită astfel. Un sistem este local stabil dacă, fiind supus unei mici perturbaţii, el tinde să rămînă în cadrul unei regiuni R reduse în jurul stării de echilibru $\mathbf{x}_e$. Dacă în cadrul acestei zone starea sistemului tinde spre $\mathbf{x}_e$, spunem că sistemul este asimptotic stabil.

Pentru a ilustra cele două concepte privind *stabilitatea locală* şi *stabilitatea asimptotică*, în figura 10.43 se prezintă traiectoriile de fază pentru un sistem stabil şi un sistem asimptotic stabil. Cînd starea de echilibru a sistemului este originea, spunem că un sistem este stabil în origine dacă pentru orice stare $\mathbf{x}(t_0)$ care este suficient de

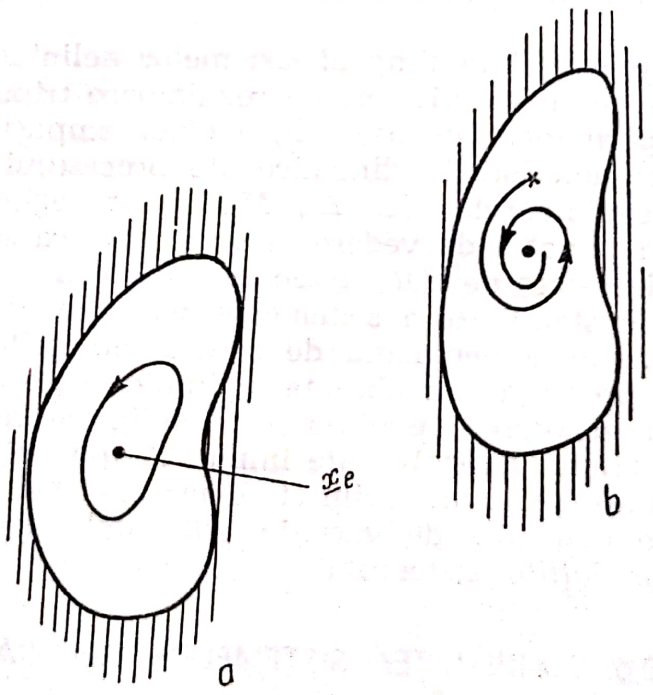


Fig. 10.43. Traiectorii de stare pentru a ilustra conceptul de stabilitate în sens Leapunov:
a — stabilitate locală; *b* — stabilitate asimptotică.

Scanned with OKEN Scanner

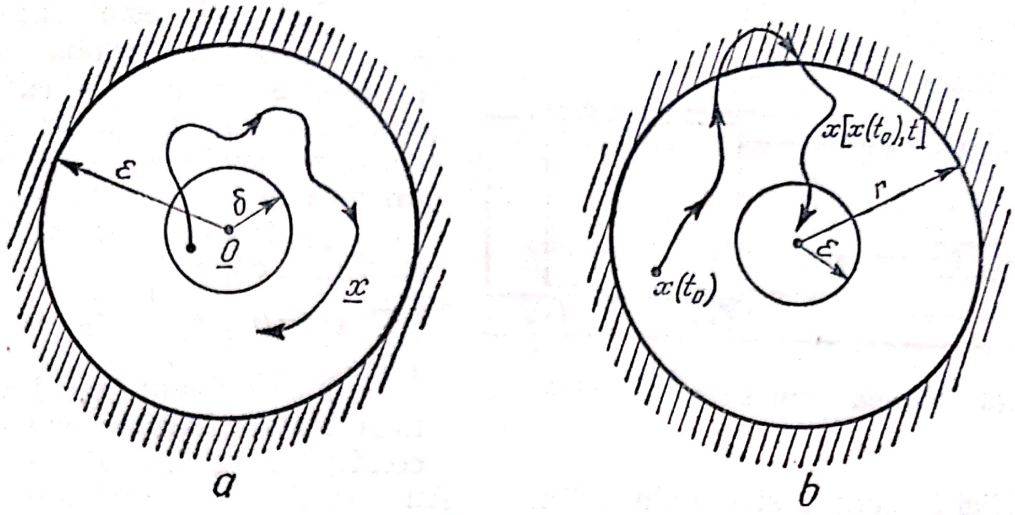


Fig. 10.44. Reprezentarea traiectoriilor de stare pentru a defini stabilitatea in sens Leapunov:
a — stabilitate; *b* — stabilitate asimptotică.

aproape de origine, soluţia $\mathbf{x}[\mathbf{x}(t_0), t]$ rămîne aproape de origine pentru toate valorile timpului. Sistemul este asimptotic stabil dacă

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}[\mathbf{x}(t_0), t] \longrightarrow 0.$$

În cazul general al spaţiului stărilor, stabilitatea şi stabilitatea asimptotică pot fi evidenţiate ca în figura 10.44.

În figura 10.44, *a*, soluţia $\mathbf{x}[\mathbf{x}(t_0), t]$ rămîne într-o zonă delimitată de raza ε atunci cînd $t \longrightarrow \infty$, iar în figura 10.44, *b* soluţia tinde asimptotic spre punctul de echilibru care în acest caz este originea spaţiului stărilor.

Pentru a cunoaşte comportarea sistemului sub acţiunea unor perturbaţii mari sau sub acţiunea unor intrări de amplitudine mare, se defineşte *stabilitatea asimptotică în sens larg*.

Un sistem este asimptotic stabil în sens larg dacă este asimptotic stabil pentru orice stare iniţială $\mathbf{x}(t_0)$, indiferent cît de aproape sau cît de departe este de origine.

Dacă considerăm că regiunea R este o sferă în spaţiul n-dimensional al variabilelor de stare putem defini stabilitatea, respectiv stabilitatea asimptotică şi stabilitatea globală (stabilitatea în sens larg) astfel:

Un sistem este *stabil* la origine dacă pentru orice număr real $\varepsilon > 0$ există un număr real $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît

$$\left[\sum_{j=1}^{n} x_j^2\,(t_0)\right]^{1/2} \leqslant \delta \text{ implică } \left\{\sum_{j=1}^{n} x_j^2\,[x(t_0), t]\right\}^{1/2} \leqslant \varepsilon \text{ pentru } t \geqslant t_0.$$

Sistemul este *asimptotic stabil* la origine dacă este stabil şi dacă există un număr $r > 0$, şi pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr real $T(\varepsilon) > 0$, astfel încît

$$\left[\sum_{j=1}^{n} x_j^2\,(t_0)\right]^{1/2} \leqslant r \text{ implică } \left\{\sum_{j=1}^{n} x_j^2\,[\mathbf{x}(t_0), t_0]\right\}^{1/2} \leqslant \varepsilon$$

pentru $t \geqslant T + t_0$ (fig. 10.44, *b*).

Scanned with OKEN Scanner

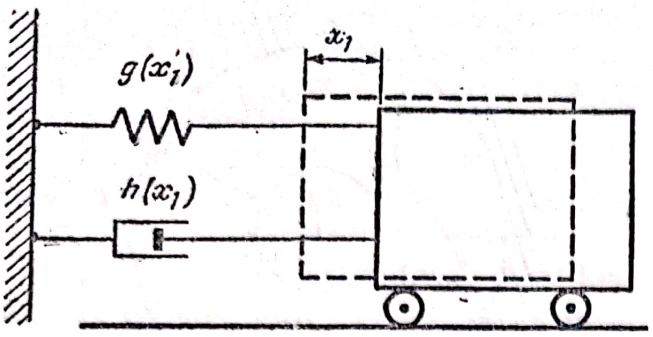


Fig. 10.45. Schema unui sistem mecanic neliniar.

Sistemul este *stabil în sens larg* sau global stabil dacă este stabil pentru orice stare inițială $\mathbf{x}(t_0)$, iar pentru orice număr real $\varepsilon>0$ există un număr real $T[\mathbf{x}(t_0), \varepsilon]$, astfel încît pentru $t\geqslant T+t_0$ să fie îndeplinită condiția

$$\left\{\sum_1^n \mathbf{x}_j^2\,[x_j(t_0), t]\right\}^{1/2}\leqslant\varepsilon.$$

Este evident faptul că verificarea stabilității pe baza acestor condiții necesare și suficiente este dificilă, pentru sistemele neliniare. Au fost elaborate mai multe metode și criterii pentru aprecierea stabilității sistemelor neliniare.

Metoda a II-a Leapunov permite a determina dacă un sistem este stabil cînd pentru acel sistem se poate găsi o funcție caracteristică care să se bucure de anumite proprietăți. Pentru a ilustra care este semnificația unei asemenea funcții considerăm sistemul neliniar mecanic prezentat în figura 10.45.

Ecuația de mișcare a masei unitare pentru cazul în care se consideră că factorul de frecare vîscoasă $h(y)$ este funcție de deplasare iar forța elastică $g(y)$, de asemenea, este dependentă de poziția masei, este dată sub forma:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+h(y)\frac{dy}{dt}+g(y)=0 \qquad (10.65)$$

sau dacă variabilele de stare sînt: $x_1=y$, $x_2=\dot{y}$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}+h(x_1)\frac{dx_1}{dt}+g(x_1)=0. \qquad (10.66)$$

Pentru acest sistem se poate defini energia la un moment dat ca sumă a energiei cinetice și potențiale

$$V(x_1, x_2)=\frac{x_2^2}{2}+\int_0^{x_1} g(x)\,dx \qquad (10.67)$$

în care $V(\mathbf{x})>0$, $x\neq 0$ (deoarece $V(x)$ reprezintă energia sistemului), și $V(0)=0$.

Ecuațiile de stare ce caracterizează sistemul evidențiază faptul că originea planului fazelor este un punct de echilibru:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2;\\ \dot{x}_2&=-g(x_1)-x_2\,h(x_1).\end{aligned} \qquad (10.68)$$

Pentru a vedea cum se schimbă energia sistemului în timp, calculăm derivata acestuia

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial V}{\partial x_2}\cdot\frac{dx_2}{dt},$$

Scanned with OKEN Scanner

iar după înlocuirea lui $\dot{x}_1$ și x_2 cu expresiile (10.68) obținem

$$\frac{dV}{dt} = g(x_1)x_2 + x_2[-g(x_1) - x_2 h(x_1)] = \\ = -x_2^2 h(x_1). \qquad (10.69)$$

Presupunînd că $h(x_1) > 0$ pentru toți x_1, deci amortizarea sistemului este pozitivă dacă forța exercitată de amortizor se opune mișcării, $\frac{dV}{dt} < 0$ cu excepția punctelor unde viteza x_2 este zero și unde $\frac{dV}{dt} = 0$. Aceasta ilustrează faptul că energia sistemului nu poate crește și nu poate rămîne constantă cu excepția stării de echilibru. Dacă $h(x_1) = 0$, sistemul este neamortizat și ecuația (10.69) arată că este conservativ, adică energia rămîne constantă. Dacă $h(x_1) < 0$, sistemul este neamortizat iar energia sa va crește totdeauna, neatingînd o stare de echilibru, deci este instabil.

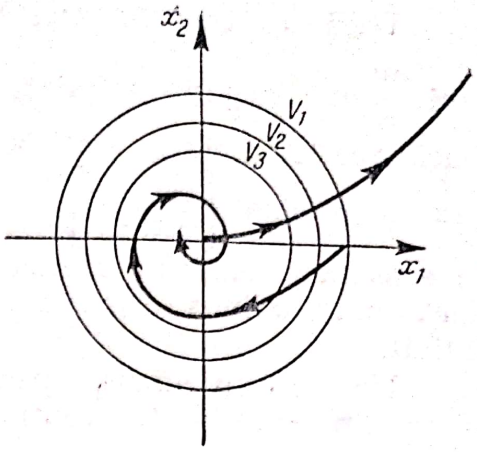


Fig. 10.46. Variația energiei sistemului mecanic în planul fazelor.

O interpretare geometrică a acestor observații asupra energiei sistemului este dată în figura 10.46.

Astfel, dacă considerăm $g(x_1) = Kx_1$, reprezentarea în planul fazelor a funcției $V(x_1, x_2)$ conduce la o familie de elipse centrate în origine. Traiectoria de fază pentru un sistem stabil intersectează elipsele de la exterior spre interior, de la energie mai mare la energie mai mică. În cazul în care $h(x_1) < 0$, traiectoria intersectează familia de elipse dinspre interior spre exterior. Dacă $h(x_1) = 0$ traiectoria de stare reprezintă o curbă închisă constituind un ciclu limită, dat fiind că energia trebuie menținută constantă în timp. Astfel, pentru acest sistem neliniar, cunoașterea funcției $V(x_1, x_2)$ și a proprietăților acesteia ne permite a aprecia dacă sistemul este sau nu stabil fără a rezolva ecuația de stare. Funcția $V(x_1, x_2)$ poartă denumirea de *funcție Leapunov*.

Determinarea unei funcții Leapunov pentru un sistem $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}(t))$ care să aibă proprietățile:

$$V(\mathbf{x}) > 0; \quad x \neq 0;$$

$$V(0) = 0;$$

$$\left[\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\right]^T = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial V}{\partial x_n}\right] \text{ — funcții continue;} \qquad (10.70)$$

$$\frac{dV}{dt} = \left[\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\right]^T \cdot f[\mathbf{x}] \leqslant 0,$$

evidențiază faptul că sistemul este stabil pentru orice $\left[\sum_1^m x_j^2\right]^{1/2} \leqslant \varepsilon$, în jurul originii spațiului stărilor, care este starea de echilibru a sistemului.

Dacă derivata funcției $V(\mathbf{x})$, $\frac{dV}{dt}$ din (10.70) este strict negativă, deci $\frac{dV}{dt} < 0$ (negativ definită), spunem că sistemul este asimptotic stabil. Dacă aceste condiții sînt îndeplinite, pentru toate valorile lui $\mathbf{x}$ și $V(\mathbf{x}) \to \infty$ cînd $\left[\sum_1^n x_j^2(t)\right]^{1/2} \to \infty$, atunci sistemul este asimptotic stabil în sens larg. Această ultimă condiție arată faptul că V devine infinit dacă amplitudinea oricărei componente a vectorului de stare devine infinit.

Un criteriu eficient pentru aprecierea stabilității sistemelor neliniare este criteriul frecvențial elaborat de V. M. Popov [13, 46].

10.7. SISTEME NELINIARE CU STRUCTURĂ VARIABILĂ

Realizarea unor performanțe impuse în cadrul unor structuri de sisteme neliniare necesită utilizarea unor algoritmi de reglare neliniară pentru diverse regimuri de funcționare ale procesului. Astfel, pentru realizarea unor performanțe dorite este necesară introducerea în mod intenționat în structura sistemului a unor blocuri funcționale liniare sau neliniare, în funcție de starea procesului și de regimul de funcționare.

Prin sistem cu structură variabilă se înțelege acel sistem la care legăturile între blocurile funcționale se modifică după o anumită lege prescrisă, în funcție de starea sistemului.

Schema generală a unui sistem cu structură variabilă este prezentată în figura 10.47.

În funcție de starea procesului, de nivelul mărimilor de la ieșire și intrare, de perturbații, blocul de modificare a structurii, *BMS*, comandă prin intermediul elementului de comutare *EC* introducerea în sistem a unui algoritm de reglare liniar sau neliniar caracterizat prin F_{ik}. Algoritmul de reglare poate fi funcție de eroarea ε sau funcție de ieșirea y sau de intrarea $r(t)$. Astfel, în sistem se introduce algoritmul de reglare cel mai potrivit pentru un regim de funcționare al procesului, structura

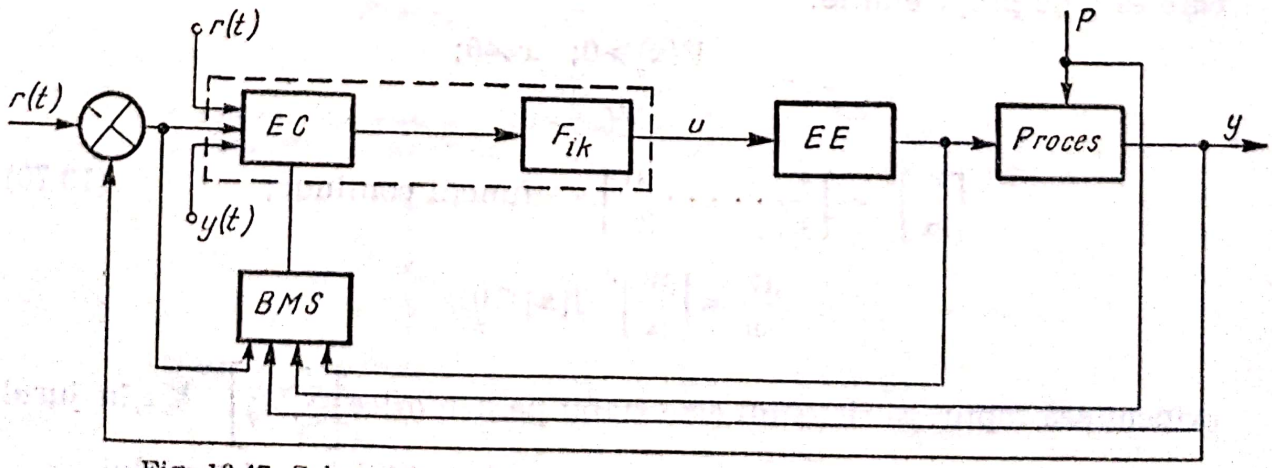


Fig. 10.47. Schema generală a unui sistem cu structură variabilă.

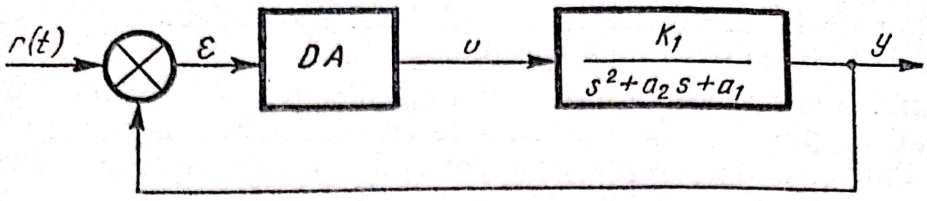


Fig. 10.48. Schema bloc a unui sistem cu structură variabilă pentru un proces de ordinul doi.

sistemului modificîndu-se în timpul funcționării pe baza informațiilor culese despre proces.

Prin combinarea mai multor blocuri funcționale F_{ik} se pot obține performanțele cerute sistemului, schimbarea structurii sistemului făcîndu-se în concordanță cu cerințele de performanță impuse.

Într-un sistem cu structură variabilă pot fi reunite mai multe însușiri utile, corespunzătoare fiecăreia din mulțimea de structuri, dar se pot obține și alte noi însușiri calitativ superioare care nu sînt proprii nici uneia dintre ele.

Ca exemplu de sistem cu structură variabilă considerăm un proces de ordinul doi comandat prin intermediul a două blocuri avînd diverse funcții de transfer.

Pentru schema din figura 10.48, dispozitivul automat poate fi de tip *PD* și se asigură stabilitatea sistemului, sau poate fi o structură variabilă.

Dacă considerăm că dispozitivul automat generează o comandă

$$u=\psi\cdot\varepsilon=\psi\cdot x_1,$$

unde ψ poate lua fie valoarea α fie valoarea β, se poate alcătui o structură de sistem neliniar ca în figura 10.49.

Prin introducerea în structura sistemului a blocului proporțional cu factorul de amplificare β, deci $\psi=\beta$, se obține un răspuns aperiodic iar prin introducerea blocului proporțional cu factorul de amplificare α deci $\psi=\alpha$ se obține un răspuns oscilant amortizat. Celor două regimuri

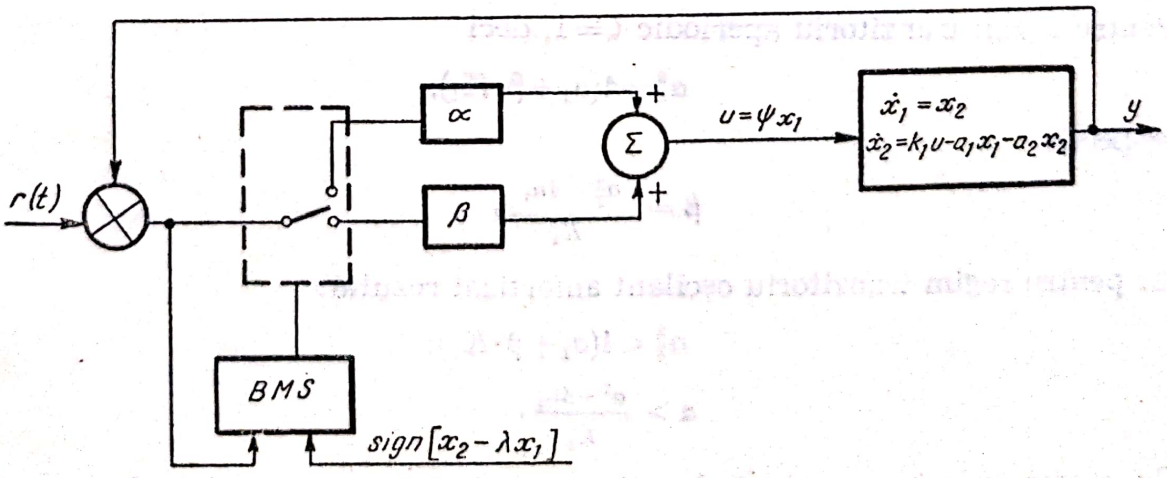


Fig. 10.49. Structura unui sistem neliniar pentru un proces de ordinul doi.

de funcţionare le corespund în planul fazelor o traiectorie de tipul unei drepte, respectiv de tipul unei spirale logaritmice.

Astfel, planul fazelor poate fi împărţit în două regiuni, în funcţie de semnul dreptei $(x_2—\lambda x_1)$ ce caracterizează regimul aperiodic de funcţionare. Panta acestei drepte este determinată de valoarea rădăcinii negative λ a ecuaţiei caracteristice a sistemului. Comutarea pe poziţia *1* sau *2* şi respectiv introducerea în sistem a blocului proporţional α sau β se face în funcţie de x_1 şi de semnul dreptei $[x_2—\lambda x_1]$:

$$\psi=\begin{cases}\alpha \text{ pentru} & x_1[x_2—\lambda x_1]>0;\\ \beta \text{ pentru} & x_1[x_2—\lambda x_1]<0.\end{cases}$$

Realizarea unui asemenea algoritm de reglare necesită informaţii asupra erorii ε a sistemului şi asupra semnului unei combinaţii liniare între eroare şi derivata ei.

Alegerea valorilor α şi β se face în concordanţă cu performanţele tranzitorii impuse sistemului.

Pentru $u=\alpha\varepsilon$, funcţia de transfer a sistemului deschis este

$$H_d(s)=\frac{\alpha\cdot K_1}{s^2+a_2s+a_1},$$

iar funcţia de transfer a sistemului închis este

$$H_0(s)=\frac{\alpha\cdot K_1}{s^2+a_2s+a_1+\alpha\cdot K_1}=\frac{\omega_n^2-a_1}{s^2+2\zeta\omega_ns+\omega_n^2},$$

unde:

$$\omega_n=\sqrt{a_1+\alpha\cdot K_1};$$

$$\zeta=\frac{a_2}{2\sqrt{a_1+\alpha\cdot K_1}}.$$

Pentru cel de-al doilea caz, cînd $u=\beta\cdot\varepsilon$, factorul de amortizare are valoarea

$$\zeta=\frac{a_2}{2\sqrt{a_1+\beta\cdot K_1}}.$$

Pentru regim tranzitoriu aperiodic $\zeta=1$, deci

$$a_2^2=4(a_1+\beta\cdot K_1),$$

respectiv

$$\beta=\frac{a_2^2-4a_1}{K_1},$$

iar pentru regim tranzitoriu oscilant amortizat rezultă:

$$a_2^2<4(a_1+\beta\cdot K_1);$$

$$\alpha>\frac{a^2-4a_1}{K_1}.$$

Cu aceste valori se asigură funcţionarea dorită a sistemului. Se poate spune că sistemul considerat este cu factor de amplificare comandabil.

Scanned with OKEN Scanner

În funcție de natura procesului liniar sau neliniar pot fi introduse pe calea directă a sistemului diverși algoritmi de reglare prin închiderea contactelor corespunzătoare ale elementului de comutare.

Asemenea structuri de sisteme pot asigura o comportare dorită atît în raport cu variațiile intrării cît și în raport cu perturbațiile. Accesibilitatea măsurării unor perturbații ce acționează asupra procesului permite a folosi reacții după perturbație și deci compensarea efectului acestora.

Utilizarea unor echipamente de comandă neliniare care schimbă structura sistemului în funcție atît de mărimile externe ce acționează asupra sistemului cît și de mărimile interne (stări ale sistemului) permite realizarea unor performanțe superioare.

Implementarea unor asemenea structuri de sisteme de conducere implică utilizarea unor echipamente complexe ușor de realizat cu ajutorul microcalculatoarelor și calculatoarelor de proces.

Pornind de la cerințele de performanță impuse oricărui sistem de reglare automată (viteză maximă de răspuns, amortizare critică, eroare staționară zero și insensibilitate față de zgomot) și în funcție de complexitatea procesului se pot recomanda algoritmi de reglare neliniari sau liniari sau combinații ale acestora.

Combinarea unor algoritmi de tip *P*, *PI* sau *PID* cu regulatoarele bipoziționale și tripoziționale asigură, printr-o acordare corespunzătoare, performanțe optime pentru sistemele de reglare automată.

Sistemele cu structură variabilă, deși au o structură mai complexă decît sistemele de reglare convenționale, pot realiza performanțe superioare. Implementarea unor algoritmi de conducere discret-variabili este realizabilă odată cu pătrunderea microcalculatoarelor și minicalculatoarelor în automatizarea proceselor tehnologice.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 11

SISTEME AUTOMATE EXTREMALE ŞI OPTIMALE

11.1. PROCESE CU CARACTERISTICĂ EXTREMALĂ

Aşa cum s-a menţionat în capitolul 9, există o serie de procese tehnologice a căror caracteristică statică reprezintă o dependenţă neliniară între intrarea şi ieşirea acestora, o dependenţă ce prezintă un extrem. Asemenea procese tehnologice sînt întîlnite în domeniul industriei energetice, industriei chimice şi aerospaţiale.

Sistemele automate care asigură funcţionarea acestor procese în jurul punctului extremului în condiţiile modificărilor arbitrare ale dependenţei neliniare între intrarea şi ieşirea procesului sînt denumite *sisteme extremale* sau *sisteme de optimizare automată.*

Pentru a ilustra dependenţa neliniară ce prezintă un extrem să analizăm funcţionarea unei instalaţii cu ardere, unde intrarea în instalaţie este reprezentată de debitul de aer de ardere iar mărimea de ieşire este reprezentată prin temperatura gazelor din instalaţie.

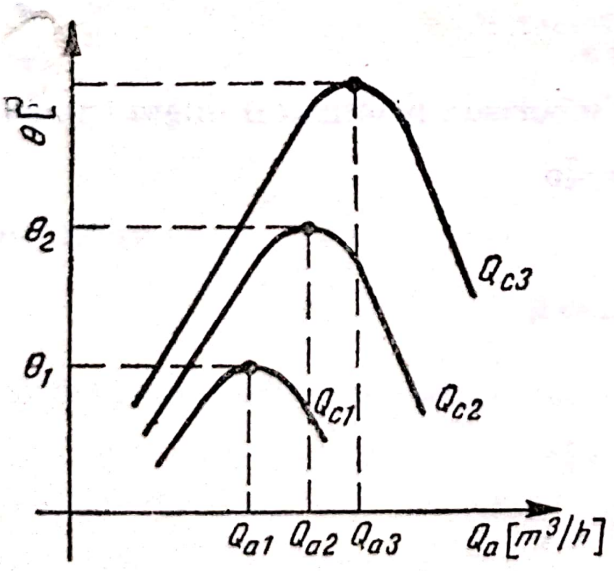


Fig. 11.1. Caracteristica statică a unui cuptor ce reprezintă variaţia temperaturii în funcţie de excesul de aer.

Aspectul dependenţei neliniare între cele două mărimi ale instalaţiei pentru diverse cantităţi de combustibil Q_c introdus în instalaţie este prezentat în figura 11.1. Aspectul extremal al caracteristicii statice al instalaţiei $\theta = f(Q_a)$ este determinat de faptul că dacă $Q_a < Q_{a\,opt}$ arderea combustibilului este incompletă şi $\theta° < \theta°_{max}$, iar pentru $Q_a > Q_{a\,opt}$ excesul de aer de ardere determină scăderea temperaturii şi deci din nou $\theta° < \theta°_{max}$.

Creşterea debitului de combustibil care reprezintă în acest caz o

Scanned with OKEN Scanner

perturbație asupra procesului de ardere determină creșterea valorilor lui $Q_{a\ opt}$ și t_{opt}, obținîndu-se astfel caracteristicile extremale din figura 11.1.

Modificarea puterii calorice a combustibilului de asemenea poate conduce la deplasarea punctului de extrem. Sistemul automat pentru conducerea procesului de ardere trebuie să asigure funcționarea instalației de ardere la parametrii t_{max}, $Q_{a\ opt}$.

Asemenea caracteristici extremale prezintă cazanele de abur, motoarele cu ardere internă, coloanele de distilare, unele mașini de tăiere din industria minieră etc.

În cazul în care mărimea de ieșire este rezultantă a unui preț de cost sau productivitate fiind incluse în calcul mai multe variabile, spunem că procesul prezintă o caracteristică extremală de mai multe variabile. În acest caz, la care $y=f(m_1, m_2, \ldots, m_k)$, dispozitivul automat ce asigură funcționarea procesului în jurul punctului de extrem se numește *optimizator automat*.

Pentru instalațiile monovariabile, cu caracteristică extremală, dependența intrare-ieșire se poate aproxima cu o parabolă

$$y=am^2+bm+c \tag{11.1}$$

sau dacă introducem coordonatele extremului $[m_e, y_e]$ obținem

$$y=a(m-m_e)^2+y_e, \tag{11.2}$$

cu:

$$b=-2am_e; \tag{11.3}$$

$$c=am^2+y_e. \tag{11.4}$$

În cazul în care prezența perturbațiilor determină deplasarea caracteristicii extremale, coeficienții modelului matematic sînt variabili în timp

$$y=a(t)m^2+b(t)m+c(t). \tag{11.5}$$

Asemenea procese tehnologice sînt cunoscute sub denumirea de *procese cu caracteristică extremală variante în timp* și se întîlnesc în domeniul motoarelor cu reacție, în domeniul energeticii nucleare etc.

11.2. STRUCTURI DE SISTEME EXTREMALE

Structura unui sistem extremal, avînd în vedere că acesta are rolul de a menține automat mărimea de ieșire în jurul unei valori extreme y_e (fig. 11.2), evidențiază faptul că aceste sisteme nu sînt de reglare auto-

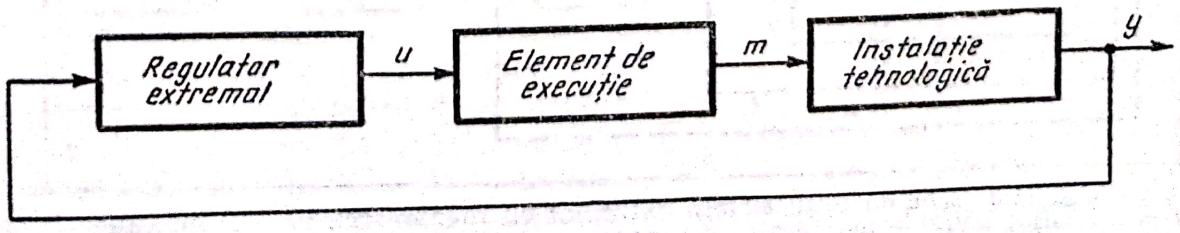


Fig. 11.2. Structura unui sistem extremal.

Scanned with OKEN Scanner

mată, întrucît sînt sisteme la care nu există o comparaţie între o mărime de referinţă şi ieşire.

Regulatorul extremal are scopul de a genera o mărime de comandă pentru a asigura funcţionarea instalaţiei tehnologice în jurul punctului de extrem maxim sau minim.

Ţinînd seama de acest scop, regulatorul va trebui să caute extremul obţinînd astfel informaţii asupra desfăşurării procesului şi — în concordanţă cu poziţia punctului curent pe caracteristica statică în raport cu punctul de extrem — să genereze semnale de comandă corespunzătoare apropierii de acest extrem.

Astfel, regulatorul extremal trebuie să conţină două blocuri principale: blocul de măsurare a indicelui de extrem (distanţa punctului curent faţă de extrem, derivata mărimii de ieşire etc.) şi blocul de comandă.

Sistemele extremale pot fi clasificate după modul de căutare a extremului, în sisteme cu semnale externe pentru organizarea căutării şi fără asemenea semnale externe, cu căutare dependentă şi cu căutare independentă (la care acţiunea sistemului nu depinde de depărtarea de extrem a punctului de funcţionare). În general, regimul de funcţionare al sistemelor extremale este un regim de autooscilaţii în jurul punctului de extrem.

Principalele tipuri de sisteme extremale sînt: sistemele extremale cu memorarea extremului, sistemele extremale cu controlul derivatei, sisteme extremale de tip pas cu pas şi sisteme extremale cu comutaţie impusă.

11.2.1. SISTEME EXTREMALE CU MEMORAREA EXTREMULUI

Structura unui asemenea sistem este prezentată în figura 11.3. Blocul de măsurare a indicelui de extrem este alcătuit în acest caz din elementul de memorie M şi sumator, cărora li se aplică mărimea de ieşire a procesului. Elementul de memorie M memorează valoarea maximă a mărimii de la ieşire y_m, iar în cadrul sumatorului se realizează diferenţa

$$e = y - y_m, \tag{11.6}$$

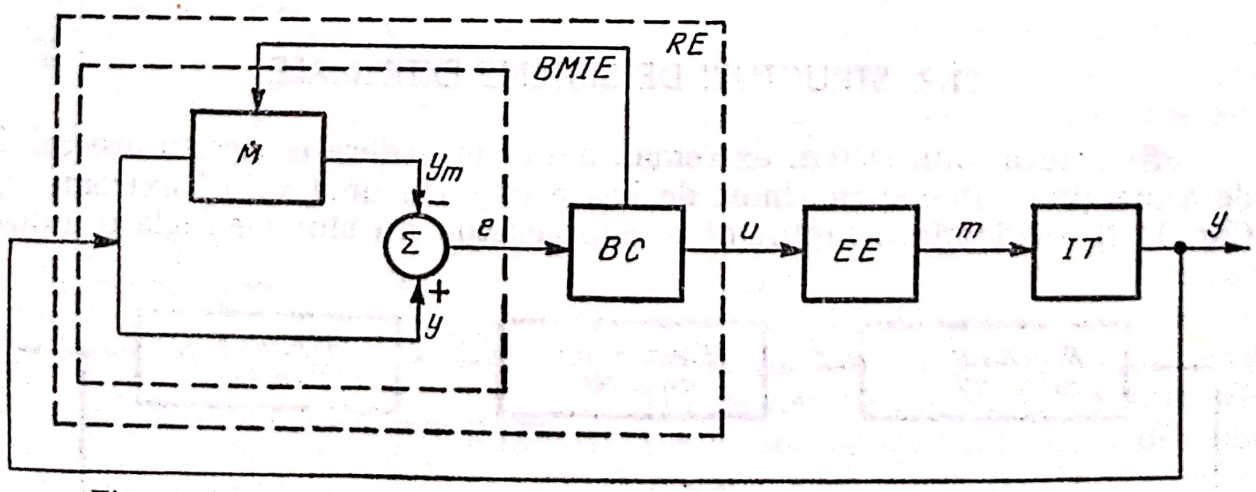


Fig. 11.3. Schema unui sistem extremal cu memorarea valorii maxime:
M — memorie; *BMIE* — bloc pentru măsurarea indicelui de extrem; *BC* — bloc de comandă; *EE* — element de execuţie; *IT* — instalaţie tehnologică.

Scanned with OKEN Scanner

unde y_m este mărimea memorată în memoria M.

Blocul de comandă în funcţie de valoarea abaterii e va comanda reversarea elementului de execuţie asigurînd astfel deplasarea punctului, de funcţionare spre extrem (fig. 11.4). Admiţînd că punctul de funcţionare al instalaţiei este *1* iar sensul de deplasare este spre extrem, valoarea mărimii curente y fiind egală cu valoarea maximă memorată y_m abaterea e este zero, elementul de execuţie nefiind reversat.

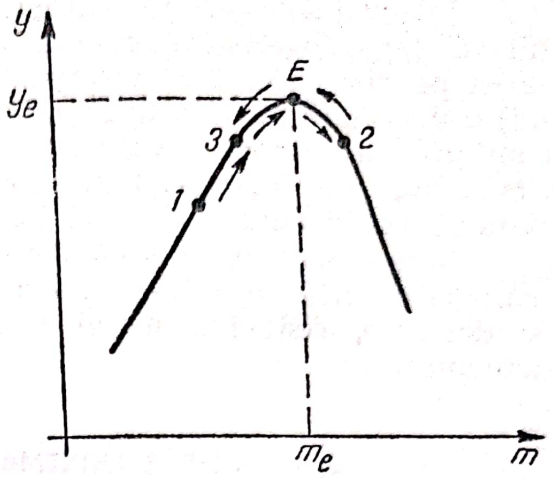


Fig. 11.4. Caracteristica statică a procesului:
E — punctul de extrem pe caracteristică; *Je* — valoarea extremă a mărimii de ieşire; *me* — valoarea mărimii de execuţie la atingerea extremului.

După depăşirea extremului E, atingerea punctului *2* pe caracteristică (abaterea între valoarea curentă şi valoarea maximă a ieşirii atingînd un nivel de comutaţie δ; $e<0$ şi $|e|\geqslant\delta$) determină reversarea motorului (elementului de execuţie), asigurîndu-se din nou apropierea de extrem. Odată cu comanda de inversare a sensului de deplasare a elementului de execuţie se comandă ştergerea memoriei M.

La atingerea punctului *3* pe caracteristică se îndeplinesc din nou condiţiile de reversare, astfel că sistemul funcţionează cu autooscilaţii în jurul punctului de extrem.

Poziţiile punctelor *2* şi *3* pe caracteristică, care determină valoarea *zonei căutării la intrare*, sînt determinate de valoarea $|e|=\delta$ necesară pentru reversarea blocului de comandă, deci de sensibilitatea acestuia.

Caracteristica blocului de comandă care este un element neliniar este prezentată în figura 11.5. Pentru deplasarea punctului de funcţionare între *1* şi E, (fig. 11.4), pe caracteristica blocului de comandă corespunde punctul A. Între punctul E şi *2* corespunde porţiunea AB, atingîndu-se în punctul B nivelul de comutare (de schimbare a polarităţii semnalului de comandă). Pe porţiunea BC are loc schimbarea polarităţii semnalului de comandă şi reversarea motorului (schimbarea sensului de deplasare a elementului de execuţie). Întîrzierea ce poate apărea în dinamica procesului determină o scădere în continuare a mărimii de ieşire y (porţiunea CD) iar revenirea spre punctul *2* ca urmare a reversării are loc pe porţiunea DCF a caracteristicii blocului de comandă, deplasarea *2*—E corespunde punctului F pe caracteristică.

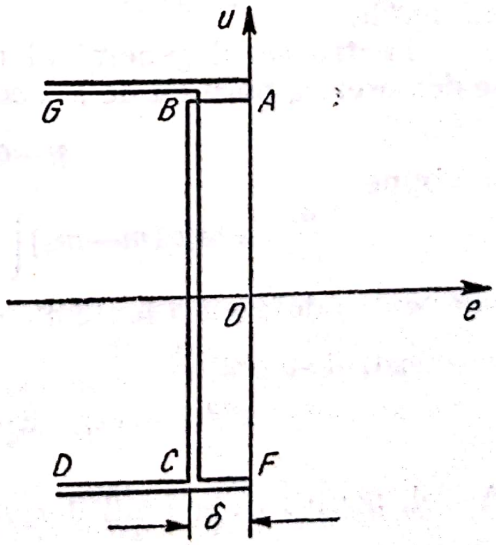


Fig. 11.5. Caracteristica statică a blocului de comandă.

Intervalul *E—3* pe caracteristica extremală corespunde porțiunii *FC*, iar atingerea din nou a condițiilor de reversare determină deplasarea pe porțiunea *CB* și respectiv (ținînd seama de dinamica procesului) o deplasare pe porțiunea *BG* și revenirea prin *GBA*. În absența unei continuări a micșorării valorilor y după reversările din *2* și *3*, porțiunile *CD* și *BG* ale caracteristicii blocului de comandă nu apar, reversările fiind urmate numai de deplasările *CF* și *BA*.

Aceste sisteme sînt cu căutare independentă, cu autooscilații fără semnale externe de organizare a căutării. Au avantajul lipsei blocurilor de derivare, reducînd astfel influența zgomotelor asupra funcționării sistemului.

11.2.2. SISTEME EXTREMALE CU CONTROLUL DERIVATEI

Căutarea extremului prin intermediul derivatei $\frac{dy}{dm}$ se bazează pe faptul că la trecerea prin extrem această derivată își schimbă semnul. Conform relației (11.2) și presupunînd m_e și y_e constante, se obține

$$\frac{dy}{dm}=2a(m-m_e), \tag{11.7}$$

mărimea de intrare în instalația tehnologică fiind mărimea de execuție m.

Astfel pentru $a<0$, $\operatorname{sign}(m-m_e)=-\operatorname{sign}\frac{dy}{dm}$ iar pentru $a>0$, $\operatorname{sign}(m-m_e)=-\operatorname{sign}\frac{dy}{dm}$.

Valoarea absolută a derivatei (11.7) este proporțională cu distanța pînă la extrem, iar semnul acestei derivate este determinat de semnul diferenței $m-m_e$.

În anumite condiții, funcționarea corectă a sistemului poate fi asigurată numai prin controlul derivatei mărimii de ieșire în raport cu timpul dy/dt.

Pentru cazul general al unui proces cu caracteristică extremală ce se deplasează, pornind de la ecuația

$$y=a(t)[m-m_e]^2+y_e \tag{11.8}$$

se obține

$$\frac{dy}{dm}=2a(t)[m-m_e]\left[\frac{dm}{dt}-\frac{dm_e}{dt}\right]+\frac{da(t)}{dt}[m-m_e]^2+\frac{dy_e}{dt}, \tag{11.9}$$

sau pentru deformări lente ale caracteristicii extremale $\frac{da(t)}{dt}=0$, respectiv $a=\text{const.}$ și se obține

$$\frac{dy}{dt}=2a[m-m_e]\cdot\left[\frac{dm(t)}{dt}-\frac{dm_e(t)}{dt}\right]+\frac{dy_e(t)}{dt}. \tag{11.10}$$

Astfel, pentru ca semnul derivatei $\frac{dy}{dt}$ să fie determinat de semnul diferenței $m-m_e$ și al derivatei $\frac{dm}{dt}$ trebuie îndeplinite condițiile de depla-

Scanned with OKEN Scanner

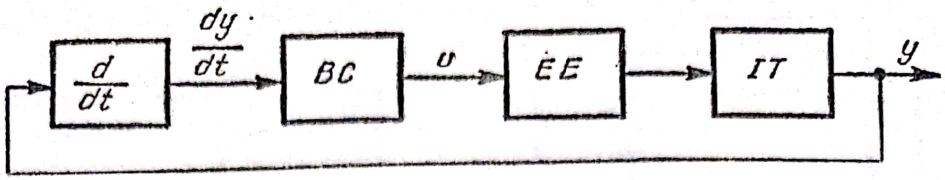


Fig. 11.6. Schema unui sistem extremal cu controlul derivatei.

sare lentă a caracteristicii extremale (în planul y, m) sub acțiunea perturbațiilor:

$$\left|\frac{dm}{dt}\right| > \left|\frac{dm_e}{dt}\right|;$$
$$\left|2a(t)[m-m_e]\left[\frac{dm}{dt}-\frac{dm_e}{dt}\right]\right| > \left|\frac{dy_e}{dt}\right|. \tag{11.11}$$

Pentru creșteri ale lui m, $\frac{dm}{dt} > 0$ și pentru $m-m_e<0$, deci pentru un punct pe prima ramură a caracteristicii extremale, rezultă $\frac{dy}{dt} > 0$ întrucît $a(t)<0$; se verifică astfel creșterea mărimii de ieșire, avînd loc o deplasare corectă spre extremul E. Pentru creșterea lui m, $\frac{dm}{dt} > 0$ și pentru $m-m_e>0$, deci pentru un punct pe ramura descrescătoare a caracteristicii rezultă $\frac{dy}{dt} < 0$, confirmîndu-se faptul că mărimea de ieșire scade și deplasarea se realizează în sens opus apropierii de extrem.

Avînd în vedere că semnul derivatei $\frac{dy}{dt}$ este suficient pentru a caracteriza deplasarea pe caracteristica extremală a procesului, schema funcțională a sistemului extremal cu controlul derivatei este prezentată în figura 11.6.

Funcționarea elementului de comandă este determinată de semnul derivatei $\frac{dy}{dt}$ și de modulul acesteia $\left|\frac{dy}{dt}\right|$. Pentru reversarea blocului de comandă trebuie îndeplinite condițiile:

$$\frac{dy}{dt} < 0; \tag{11.12}$$
$$\left|\frac{dy}{dt}\right| \geqslant \delta.$$

În prezența perturbațiilor care cauzează o deplasare rapidă a caracteristicii extremale, condițiile (11.11) nemaifiind îndeplinite, schema dată în figura 11.6 conduce la rezultate necorespunzătoare, impunîndu-se verificarea periodică a corectitudinii deplasării spre extrem (sisteme extremale cu comutație impusă).

Sistemele cu controlul derivatei sînt sisteme cu autooscilații cu căutare independentă, fără semnale externe pentru organizarea căutării. Prezența elementului de derivare determină o creștere a sensibilității sistemului la zgomote.

Scanned with OKEN Scanner

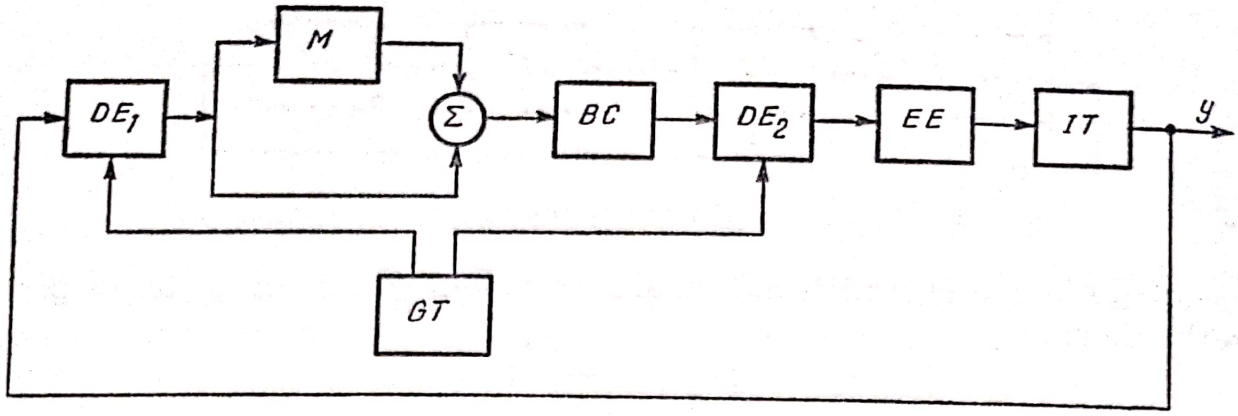


Fig. 11.7. Schema unui sistem extremal de tipul pas cu pas.

11.2.3. SISTEME EXTREMALE DE TIP PAS CU PAS

Schema funcțională a unui asemenea sistem este prezentată în figura 11.7. Căutarea extremului se realizează ca și în cazul sistemelor cu memorarea extremului — prin intermediul creșterilor mărimii de ieșire — însă aceste sisteme au o funcționare discretă.

Mărimea de ieșire se aplică la intrarea blocului de măsură a indicelui de extrem sub formă eșantionată datorită dispozitivului de eșantionare DE_1 iar sumatorul compară mărimea între două momente de eșantionare

$$e=y(nT)-y(n-1)T=y_n-y_{n-1}.$$

Elementul de memorare M în acest caz memorează pe durata unei perioade valoarea mărimii de ieșire din perioada de eșantionare anterioară. Pentru cazul în care $e>0$ și respectiv $y_n>y_{n-1}$, elementul de comandă nu reversează întrucît punctul de funcționare se deplasează spre extrem. Variația mărimii de execuție (realizată tot sub formă eșantionată datorită dispozitivului DE_2, comandat sincron cu DE_1 de către generatorul de tact GT), care va conduce la $e<0$, respectiv $y_n<y_{n-1}$, determină o reversare a blocului de comandă, întrucît deplasarea punctului de funcționare se face în direcția depărtării de extrem.

În regim stabilizat sistemul va funcționa cu autooscilații, sub forma unor pași în jurul extremului, amplitudinea acestora putînd fi controlată prin alegerea corespunzătoare a perioadei de eșantionare T. Aceste sisteme sînt cu semnale externe de organizare a căutării extremului, semnale generate de GT, cu căutare independentă.

11.2.4. SISTEME EXTREMALE CU COMUTAȚIE IMPUSĂ

În cazul deplasării rapide a caracteristicii extremale sub influența perturbațiilor, procesul monoton de căutare a extremului conduce la rezultate necorespunzătoare, impunîndu-se o structură de sistem cu căutare nemonotonă a extremului.

Un asemenea sistem, denumit cu comutație impusă, are schema dată în figura 11.8. La intervale constante de timp comutatorul C co-

Scanned with OKEN Scanner

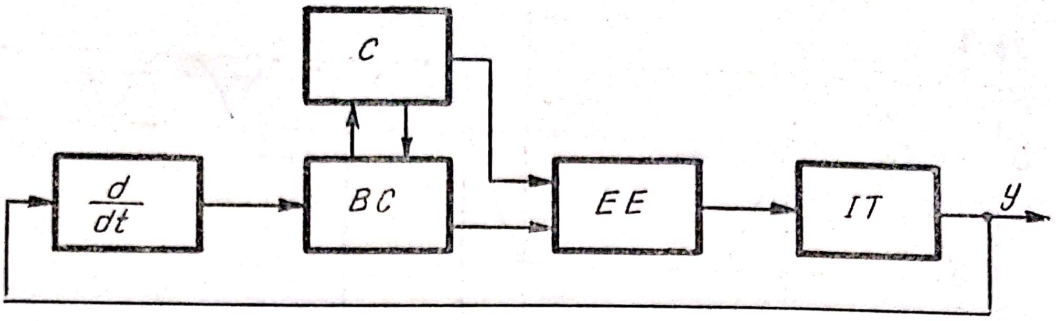


Fig. 11.8. Schema unui sistem extremal cu comutaţie impusă.

mandă inversarea sensului de deplasare a elementului de execuţie, date fiind legăturile între *BC* şi *C* care asigură coordonarea comenzilor. Funcţionarea acestui sistem se poate urmări în figura 11.9. Dacă punctul de funcţionare se găseşte iniţial în *1* (fig. 11.9), iar deplasarea este corectă spre extrem, această deplasare are loc numai pe o perioadă T_c impusă (pînă în punctul *2*), după care comutatorul comandă inversarea sensului de deplasare, urmînd o deplasare în direcţia depărtării de extrem. La atingerea condiţiilor de reversare din nou are loc reversarea şi deplasarea corectă spre extrem pe durata T_c, după care comutatorul intervine cu o nouă comandă.

Printr-o alegere convenabilă a duratei T_c şi a pragului de sensibilitate a blocului de comandă se obţin deplasări corecte spre extrem, sensibil mai mari decît cele de sens opus, rezultînd o apropiere de extrem prin deplasări alternative, pînă la stabilirea autooscilaţiilor în jurul extremului. Acest caracter alternativ al deplasărilor spre extrem asigură o funcţionare stabilă a sistemelor extremale cu caracteristici extremale ce se deplasează rapid sub acţiunea perturbaţiilor.

Indicii de calitate ai funcţionării sistemelor extremale sînt analogi cu anumiţi indici ai sistemelor de reglare obişnuite.

Astfel, *stabilitatea* reprezintă una din performanţele impuse sistemului, care în acest caz se defineşte ca proprietatea sistemului de a asigura deplasarea punctului de funcţionare în vecinătatea extremului pornind din orice punct de pe caracteristică.

Gama δy a autooscilaţiilor mărimii de ieşire denumită *zona căutării la ieşire* constituie un indice de calitate pentru precizia sistemului, impunîndu-se a fi cît mai redusă.

Gama corespunzătoare mărimii de execuţie δm este denumită *zona căutării la intrare.*

În figura 11.10 se pot evidenţia performanţele unui sistem extremal.

Durata de prindere a extremului t_p şi perioada oscilaţiilor sînt mărimi ce caracterizează dinamica (regimul oscilant) al sistemului extremal.

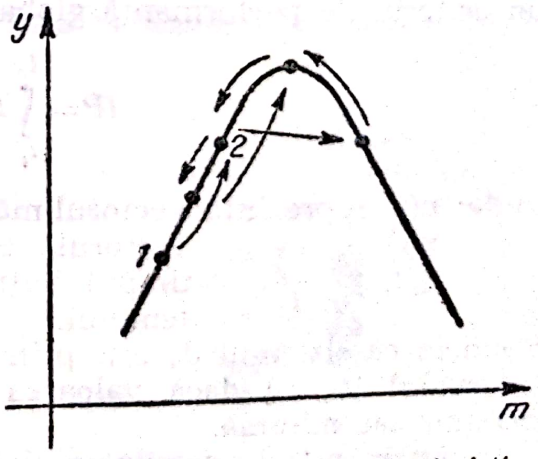


Fig. 11.9. Funcţionarea pe caracteristica statică a unui sistem cu comutaţie impusă.

Scanned with OKEN Scanner

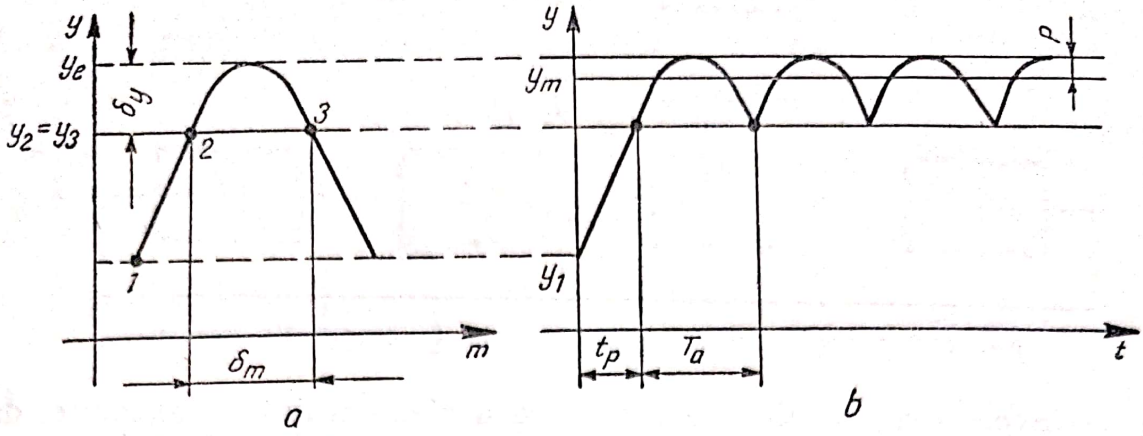


Fig. 11.10. Răspunsul unui sistem extremal și performanțele sistemului:
a — caracteristica statică; *b* — răspunsul oscilant al sistemului.

Un alt indice de calitate este cunoscut sub denumirea de *pierderile pentru căutarea p*, determinat prin diferența între valoarea extremă y_e și valoarea medie y_m a mărimii de ieșire y, în decursul unei perioade a autooscilațiilor

$$p=y_e-y_m.$$

Cu cît pierderile p sînt mai mici cu atît calitatea funcționării sistemului extremal este mai bună. Pentru calculul sistemelor extremale (sisteme neliniare) pot fi folosite metode exacte sau metode aproximative, cunoscute din studiul sistemelor neliniare.

11.3. SISTEME DE COMANDĂ ȘI CONDUCERE OPTIMALĂ

Un sistem optimal este acel sistem care asigură cele mai bune performanțe într-un anumit sens, adică acel sistem care extremizează un criteriu de performanță dat. Pentru un sistem dat printr-un model matematic sub forma

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)], \tag{11.13}$$

un criteriu de performanță global se poate defini prin funcționala

$$IP=\int_{t_i}^{t_f} L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)]\mathrm{d}t, \tag{11.14}$$

unde: $\mathbf{u}(t)$ reprezintă vectorul mărimilor de comandă;
$\mathbf{x}(t)$ — vectorul stărilor;
t_i, t_f — timpul inițial și final corespunzător evoluției sistemului.

Spunem că sistemul descris prin ecuația de stare (11.13) este optimal pe intervalul $[t_i, t_f]$ dacă valoarea indicelui de performanță (11.14) este maximă sau minimă.

Apare astfel necesitatea elaborării unei comenzi optimale $\mathbf{u}(t)$ care să controleze desfășurarea sistemului în condițiile extremizării indicelui (11.14).

Scanned with OKEN Scanner

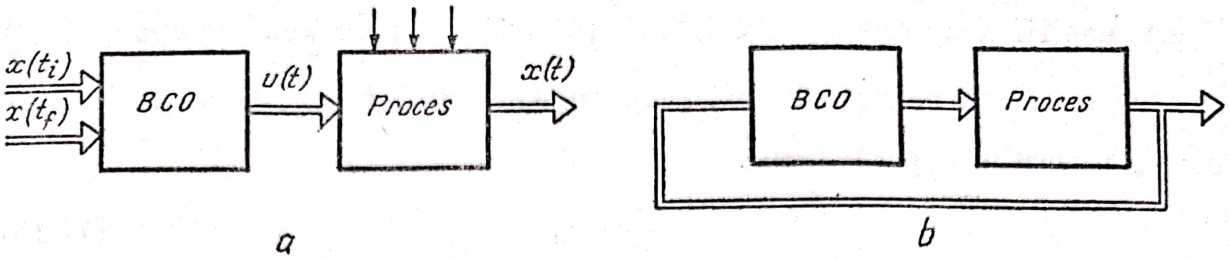


Fig. 11.11. Schema unui sistem optimal:
a — sistem de comandă optimală; *b* — sistem de conducere optimală; *BCO* — bloc de comandă optimală.

Comanda optimală a unui sistem dinamic se poate realiza printr-o structură deschisă (11.11, *a*) sau printr-o structură închisă (fig. 11.11, *b*).

În primul caz se impune determinarea comenzii optimale $\mathbf{u}(t)$ care conduce sistemul dintr-o stare inițială $\mathbf{x}(t_i)$ într-o stare finală $\mathbf{x}(t_f)$ cu satisfacerea indicelui de performanță impus (IP=extrem).

În al doilea caz se cere a determina legea de conducere optimală a procesului în funcție de starea sistemului $\mathbf{u}(t)=\varphi[\mathbf{x}(t)]$ cu respectarea indicelui de performanță și evident ținînd seama de restricțiile asupra comenzii $\mathbf{u}(t)$ și asupra stării sistemului $\mathbf{x}(t)$. Înainte de a determina comanda optimală pentru un sistem dat (proces) trebuie cunoscut dacă acest sistem este *controlabil* și *observabil*.

Un sistem liniar este controlabil la t_0 dacă există o funcție de intrare $\mathbf{u}(t)$ definită pentru $t\in T$, care să conducă sistemul (procesul) din starea $\mathbf{x}(t_0)$ în origina spațiului stărilor, într-un timp finit $t_1>t_0$. Dacă acest lucru este posibil pentru orice t_0 și toate stările inițiale $\mathbf{x}(t_0)$, sistemul este *complet controlabil*.

Un sistem liniar este observabil la t_0 dacă $\mathbf{x}(t_0)$ poate fi determinat din funcția de ieșire $\mathbf{y}[t_0, t_1]$ pentru $t_0\in T$, unde $t_0<t_1\in T$ (t_1 este un timp finit). Dacă este posibil pentru toți t_0 și $\mathbf{x}(t_0)$ sistemul este *complet observabil*.

Pentru verificarea controlabilității și observabilității sistemelor în [13, 33, 5] sînt prezentate mai multe metode.

Pentru verificarea conceptului de sistem optimal considerăm un motor de curent continuu cu excitație separată (fig. 11.12) și aproximăm fluxul magnetic Φ=const.

Ecuația de mișcare a axului motorului în aceste condiții are forma

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2}+M_r=K\cdot\Phi\cdot i_a, \qquad (11.15)$$

unde s-a notat:

- J este momentul de inerție al părților în mișcare reduse la ax;
- i_a — curentul rotoric;
- M_r — momentul rezistent;
- K — coeficient de proporționalitate;
- α — poziția unghiulară a rotorului.

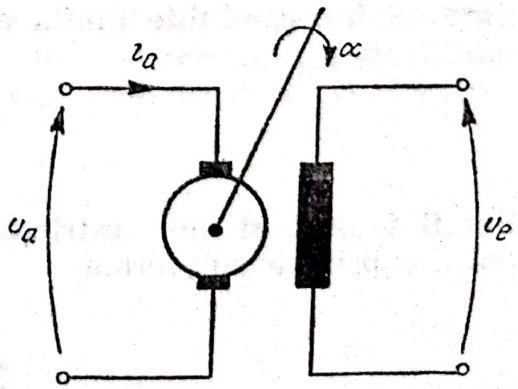


Fig. 11.12. Schema de principiu a unui motor electric.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă neglijăm momentul rezistent ($M_r \simeq 0$) și rescriem relația (11.15) pentru un timp relativ definit prin relația $\tau = t\sqrt{\frac{K\Phi}{J}}$, ecuația de mișcare a rotorului capătă forma

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = i_a \tag{11.16}$$

sau ținînd seama că mărimea de ieșire a acestui sistem este poziția unghiulară α, iar mărimea de intrare este curentul rotoric

$$\frac{d^2y}{dt^2} = u. \tag{11.17}$$

Pentru un proces pot fi formulate diverse criterii de performanță, luînd în considerație diferite categorii de restricții asupra intrării și ieșirii (stării).

Un răspuns optimal în timp se obține utilizînd un criteriu de performanță de forma

$$IP = \int_0^T dt = T. \tag{11.18}$$

În prezența unor restricții impuse pentru a conduce optimal acest proces din punctul de vedere al timpului de răspuns, deci cu satisfacerea criteriului (11.18), trebuie determinați $u(t)$ și $y(t)$ care satisfac ecuația de mișcare (11.17) și minimizează indicele de performanță (11.18) considerînd restricțiile:

$$\begin{gathered} |u| \leqslant 1; \\ \int_0^T \dot{y}(t)\, dt = \alpha_0; \\ \dot{y}(o) = 0; \\ \dot{y}(T) = 0. \end{gathered} \tag{11.19}$$

Admițînd că obiectivul comenzii este de a atinge poziția finală α_0 într-un timp minim, condițiile limită de-a lungul coordonatelor $y(t)$ ar putea fi specificate sub forma:

$$\begin{gathered} y(o) = -\alpha_0; \\ y(t) = 0. \end{gathered}$$

Pot fi folosite și alte restricții, de exemplu consumul de energie, care pot fi exprimate sub forma:

$$\begin{gathered} |u| \leqslant 1; \\ \int_0^T \dot{y}(t)\, dt = \alpha_0; \end{gathered}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\int_0^T u^2(t)\mathrm{d}t = q_0; \qquad (11.20)$$

$$\dot{y}(0)=0;$$

$$\dot{y}(T)=0.$$

Pentru a funcționa cu productivitate optimală, criteriul de performanță ce se folosește în cazul acestui proces are forma

$$IP=\int_0^T \dot{y}(t)\mathrm{d}t. \qquad (11.21)$$

Problema determinării comenzii optimale se formulează astfel: se cere a găsi funcțiile optimale $u(t)$ și $\dot{y}(t)$ care satisfac ecuația (11.17) și maximizează (11.21) avînd restricții asupra intrării $|u|\leqslant 1$ și condițiile limită asupra vitezei unghiulare sînt zero.

Eficiența economică optimă se obține dacă folosim criteriul de performanță sub forma

$$IP=\int_0^T u^2(t)\mathrm{d}t=\text{minim}. \qquad (11.22)$$

Problema de optim se formulează astfel: să se determine funcțiile optimale $u(t)$ și $\dot{y}(t)$ care satisfac ecuația (11.17) și minimizează indicele de performanță (11.22) dîndu-se:

$$\int_0^T \dot{y}(t)\mathrm{d}t=\alpha_0; \qquad (11.23)$$

$$\dot{y}(0)=0;$$

$$\dot{y}(T)=0.$$

Problema proiectării analitice a unui algoritm de conducere optimală constă în găsirea legii de conducere optimală $\mathbf{u}(t)$, care pentru un proces descris prin ecuația generală $\dot{\mathbf{x}}(t)=f[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)]$ și condiții inițiale și finale cunoscute precum și cu restricții date asupra funcției de comandă $\mathbf{u}(t)$, extremizează indicele de performanță impus.

Pentru procesul de ordinul doi, descris prin ecuația (11.17), respectiv de ecuația de stare sub forma

$$\dot{x}_1=x_2;$$

$$\dot{x}_2=u,$$

cu restricția $|u|\leqslant 1$ și condițiile limită:

$$y(0)=-\alpha_0; \qquad y(T)=0;$$

$$y(0)=0; \qquad y(T)=0,$$

Scanned with OKEN Scanner

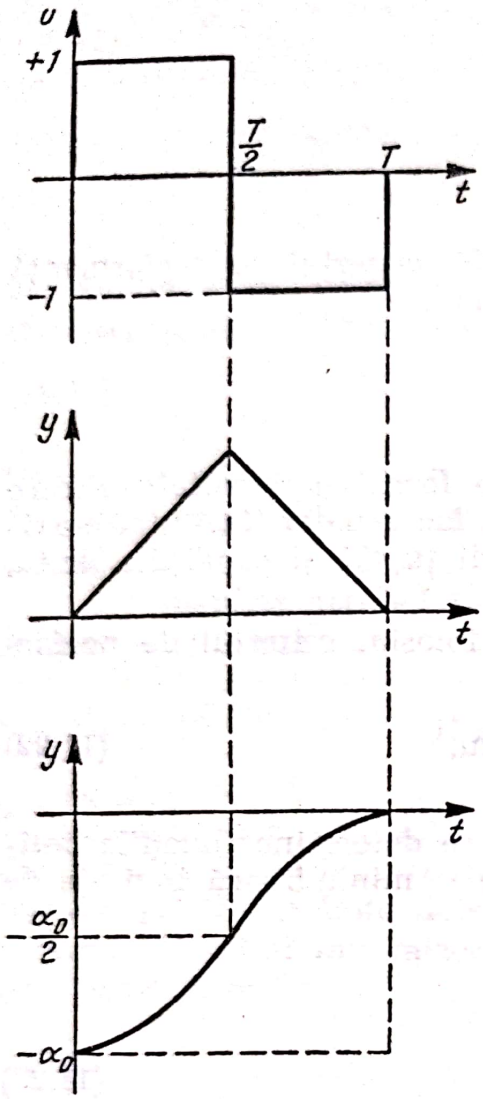


Fig. 11.13. Variația mărimii de intrare (comandă) și de ieșire.

realizarea celui mai rapid răspuns la α_0, impune accelerarea cu viteză maximă pînă la un anumit timp, după care decelerarea de asemenea cu o viteză maximă admisibilă (fig. 11.13).

Deoarece valorile maxime și minime ale comenzii sînt egale la limită cu ± 1, intervalele de timp la accelerare și decelerare sînt egale cu $\frac{T}{2}$ dacă durata procesului tranzitoriu este T (fig. 11.13). La momentul $t=\frac{T}{2}$ coordonata y atinge jumătate din valoarea ce trebuie atinsă $\left(\frac{dy}{dt}=\right.$ $=t$ pentru accelerare)

$$y\left(\frac{T}{2}\right)=\int_0^{T/2}\dot{y}(t)dt-\alpha_0=\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^{T/2}-\alpha_0=\frac{T^2}{8}-$$

$$-\alpha_0=-\frac{\alpha_0}{2}. \qquad (11.24)$$

Din relația (11.24) obținută ținînd seama că în prima porțiune a mișcării de accelerare $\frac{dy}{dt}=t$, rezultă timpul total al procesului tranzitoriu

$$T=2\sqrt{\alpha_0}. \qquad (11.25)$$

Pentru un sistem deschis, algoritmul de comandă optimală cu α_0 specificat se realizează prin rezolvarea ecuației (11.25) și elaborarea comenzii $u=+1$ pe intervalul $0\leqslant t\leqslant\frac{T}{2}$ și $u=-1$ pe intervalul $\frac{T}{2}<t\leqslant T$ și $u=0$ pentru $t>T$. De remarcat faptul că aria de sub linia $\dot{y}(t)$ la orice comandă trebuie să fie egală cu cantitatea specificată α_0. Satisfacerea acestei condiții implică:

$$u(t)=\begin{cases}+1 \text{ pentru } 0\leqslant t\leqslant\frac{T}{2};\\ -1 \text{ pentru } \frac{T}{2}<t\leqslant T.\end{cases}$$

Pentru a sintetiza algoritmul de comandă optimală pornim de la ecuația de stare a procesului:

$$\dot{x}_1=x_2;$$

$$\dot{x}_2=u.$$

Scanned with OKEN Scanner

Problema ce se impune rezolvată este de a găsi cea mai rapidă tranziție dintr-un punct în planul fazelor x_1x_2, de coordonate $[-\alpha_0, 0]$ în originea planului fazelor.

Ecuația traiectoriei de fază pentru $u=+1$ se obține rezolvînd ecuația

$$\dot{x}_1=x_2\dot{x}_2$$

sau după efectuarea integrării

$$x_1=+\frac{x_2^2}{2}+C_1, \tag{11.26}$$

unde C_1 este o constantă de integrare a cărei valoare poate fi găsită prin specificarea coordonatelor punctului pe traiectoria dorită. Pentru $C_1=0$, traiectoria care reprezintă o parabolă trece prin origine (fig. 11.14).

Pentru $u=-1$, ecuația traiectoriei de fază se obține în mod similar

$$x_1=-\frac{x_2^2}{2}+C_2. \tag{11.27}$$

Reprezentarea traiectoriilor de fază pentru diverse valori ale constantelor C_1 și C_2 ilustrează două familii de parabole (fig. 11.14). Deoarece obiectivul comenzii este de a aduce punctul de mișcare în originea planului fazelor (condiții limită specificate), faza finală a mișcării poate apărea numai de-a lungul traiectoriilor care trec prin origine.

Analizînd ecuațiile traiectoriilor de fază rezultă că numai pentru $x_2<0$ și $C_1=0$ traiectoria descrisă de ecuația (11.26) ajunge în origine, iar traiectoria descrisă de ecuația (11.27) ajunge în origine numai pentru $x_2>0$ și $C_2=0$.

Semnul lui x_2 joacă un rol important în definirea mișcării în planul fazelor pe traiectoriile care trec prin origine.

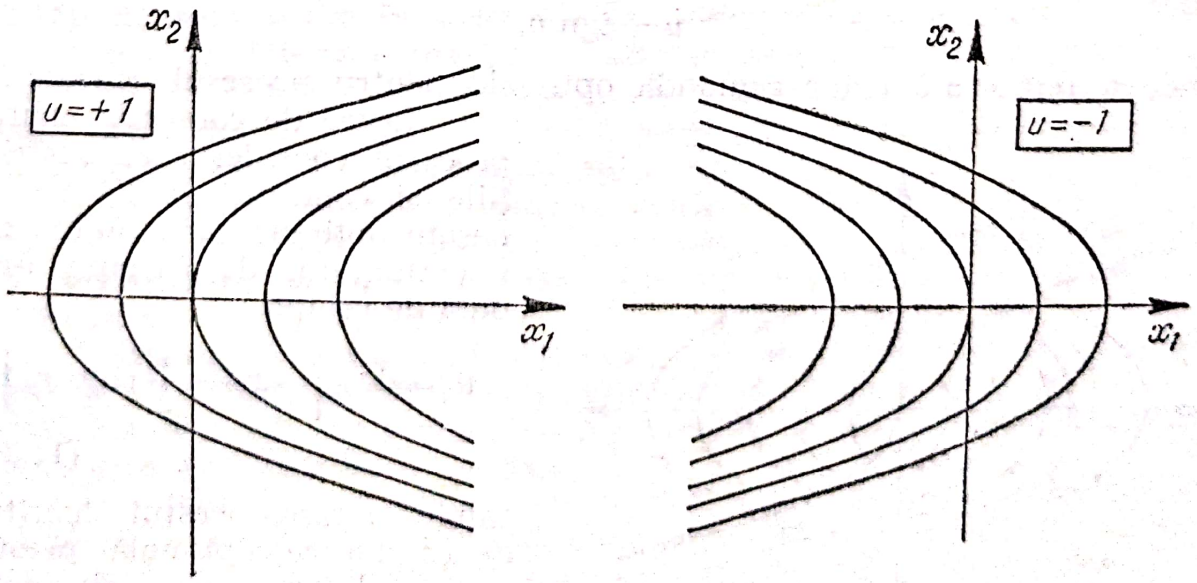


Fig. 11.14. Traiectorii de fază pentru un sistem de ordinul doi caracterizat prin $H(s)=\frac{1}{s^2}$.

Cele două ecuații corespunzătoare traiectoriilor ce converg în origine sînt:

$$x_1=\frac{x_2^2}{2}(-\text{sign } x_2) \text{ pentru } u=+1;$$

$$x_1=-\frac{x_2^2}{2}(\text{sign } x_2) \text{ pentru } u=-1.$$

Combinînd aceste două ecuații obținem ecuația liniei de comutare în planul fazelor

$$x_1+\frac{x_2^2}{2}\text{sign } x_2=0. \tag{11.28}$$

Trecerea dintr-o poziție în planul fazelor în origine presupune mișcarea din această poziție pînă la linia de comutare, după care are loc comutarea pe traiectoria care ajunge în origine.

Pornind de la punctul de coordonate $[-\alpha_0, 0]$ cu $u=+1$ (porțiunea AB, fig. 11.15), mișcarea sistemului continuă din origine prin comutarea în punctul B, comanda schimbă semnul ($u=-1$) iar mișcarea are loc pe traiectoria care ajunge în originea planului fazelor. Pe traiectoriile care trec prin origine are loc comutarea comenzii de la o valoare la alta, iar această curbă care este compusă din două traiectorii poartă denumirea de *linie de comutare*.

Funcția

$$v=-\left(x_1+\frac{x_2^2}{2}\text{ sign } x_2\right) \tag{11.29}$$

devine zero de-a lungul liniei de comutare și ia semnul funcției de comandă în afara acestei linii de comutare. Astfel pentru $u=+1$, $v>0$ iar pentru $u=-1$, $v<0$. Ținînd seama de această corespondență putem scrie

$$u=\text{sign } v, \tag{11.30}$$

unde u reprezintă chiar comanda optimală pentru procesul considerat.

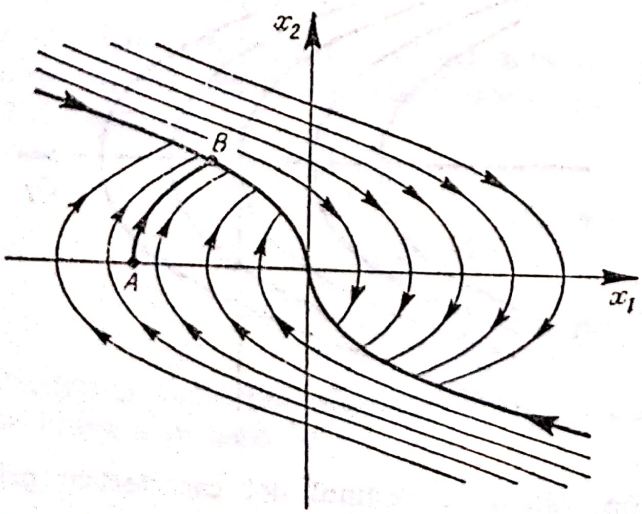


Fig. 11.15. Comutarea pe traiectoria de comutare în planul fazelor.

Legea de comandă pentru procesul considerat cu restricțiile și condițiile limită considerate obținută prin minimizarea timpului de răspuns este dată de relația

$$u^*=\text{sign}\left[-x_1-\frac{x_2^2}{2}\text{sign } x_2\right]. \tag{11.31}$$

Implementarea acestui algoritm de conducere optimală presupune folosirea unor elemente de semn (relee) și elemente neliniare pătratice și de înmulțire (fig. 11.16).

Scanned with OKEN Scanner

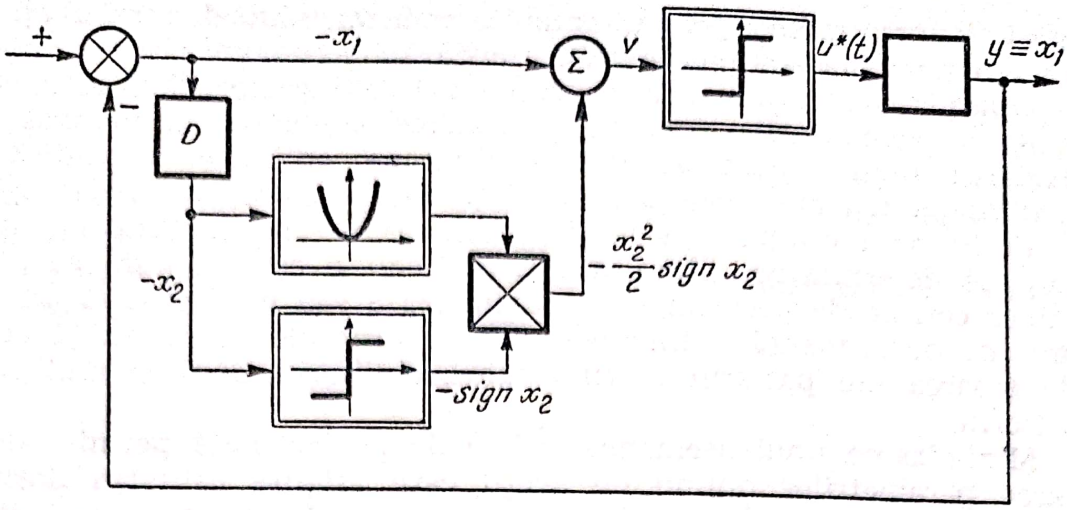


Fig. 11.16. Schema generală a sistemului optimal ca rapiditate:
D — bloc de derivare.

Din analiza acestui sistem de comandă optimală rezultă următoarele concluzii:

— funcția de comandă optimală este continuă pe porțiuni avînd valorile extreme ± 1;

— comanda optimală se obține prin utilizarea unui releu bipozițional a cărui stare depinde de semnul funcției de comutare v;

— realizarea practică a algoritmului de comandă optimală este dificilă chiar pentru un sistem simplu, deoarece în general problemele practice sînt mai bine rezolvate prin găsirea unei funcții de comutare echivalente v_{eq} care coincide cu v în semn însă mai ușor de realizat, obținîndu-se în acest caz *sisteme quasi-optimale.*

Asemenea probleme de optimizare pot fi întîlnite în diverse domenii ale tehnicii. Optimizarea se poate referi la determinarea unor parametri optimi ai unui sistem care satisfac un anumit criteriu de performanță, fiind vorba în acest caz de *optimizarea parametrică*, a sistemului, sau la determinarea unei comenzi care conduce un proces dintr-o stare în alta cu satisfacerea unui criteriu de performanță în prezența sau absența unor restricții, în acest caz fiind vorba de *optimizarea dinamică* sau conducerea optimală a procesului.

Principalele aspecte ce trebuie avute în vedere la rezolvarea unor probleme de optimizare sînt legate de alegerea și adaptarea criteriului de performanță ce caracterizează cel mai bine scopul urmărit prin proiectare.

Cunoașterea modelului matematic al sistemului supus automatizării și a restricțiilor impuse în funcționarea acestuia reprezintă o altă problemă deosebit de importantă ce trebuie avută în vedere la rezolvarea unei probleme de optimizare.

În automatică problemei optimizării i s-a acordat o atenție deosebită prin însăși esența noțiunii de sistem automat, la care s-a urmărit realizarea unor performanțe optime în regim staționar și tranzitoriu. În foarte multe domenii industriale se pune problema determinării anumitor valori optime și a menținerii acestor valori pe perioade îndelungate de timp. Asemenea optimizări, care au ca scop determinarea valo-

Scanned with OKEN Scanner

rilor staţionare optime pentru anumite mărimi, sînt denumite optimizări ale regimurilor staţionare sau *optimizări staţionare*.

Optimizarea regimurilor dinamice a fost caracteristică automaticii încă de la începuturile aplicaţiilor practice ale acesteia, întrucît prin proiectarea unui sistem automat se impune optimizarea regimurilor tranzitorii pentru obţinerea unei calităţi dorite a procesului de reglare.

Proiectarea optimală a unui sistem de reglare automată (cap. 6) presupune determinarea algoritmului de reglare care asigură satisfacerea unor cerinţe de performanţă, maximizează sau minimizează anumite criterii de performanţă. Utilizarea unui criteriu de performanţă ce include eroarea sau pătratul erorii asigură obţinerea unui anumit regim tranzitoriu.

Minimizarea unui asemenea indice de performanţă permite determinarea parametrilor optimi de acord care asigură calitatea dorită a regimului tranzitoriu. În cazul în care se urmăreşte prin proiectarea optimală atît satisfacerea unor performanţe în regim tranzitoriu cît şi minimizarea consumului de energie se adoptă un criteriu combinat de tipul

$$\tau = J_1 + \rho J_2 = \int_0^\infty [\varepsilon^2 + \rho u^2] dt,$$

unde ρ este un factor de ponderare.

Criteriul combinat ilustrează un exemplu simplu de „polioptimizare", care este tot mai frecventă în multe probleme de optimizare a sistemelor complexe.

11.4. METODE UTILIZATE PENTRU REZOLVAREA PROBLEMELOR DE OPTIMIZARE

În literatură [14, 36] sînt cunoscute mai multe metode pentru rezolvarea problemelor de optimizare staţionară. În cazul optimizării funcţiilor-criteriu $f(\mathbf{x})$ de variabilă vectorială, principalele categorii de metode de calcul se disting după faptul că unele fac apel la primele derivate, altele necesită derivatele prime şi secunde, iar a treia categorie nu necesită nici determinarea primelor derivate, nici a derivatelor secunde; cele trei categorii de metode aproximează deci dezvoltarea în serie Taylor a funcţiilor $f(\mathbf{x})$ prin reţinerea unui număr diferit de termeni. Metodele din prima categorie pot fi denumite *metode de gradient* sau *metode bazate pe prima variaţie*, metodele din a doua categorie pot fi denumite *metode Newton* sau *metode bazate pe a doua variaţie*, iar metodele din a treia categorie sînt denumite *metode de căutare directă* sau *metode directe* întrucît asigură optimizarea apelînd numai la valorile funcţiei criteriu.

În [6, 38] sînt prezentate principalele metode pentru optimizarea staţionară a sistemelor monovariabile şi multivariabile.

Pentru determinarea comenzii optimale, respectiv pentru rezolvarea problemelor de optimizare dinamică, sînt utilizate metode ale calculului variaţional, principiul maximului şi programarea dinamică.

Scanned with OKEN Scanner

Principiul maximului este o extindere a metodelor și rezultatelor calculului variațional la cazurile în care comenzile sînt limitate. Pentru sisteme descrise prin modele de forma

$$\mathbf{x}=f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

se cere a determina comanda optimală $\mathbf{u}(t)$ care extremizează o funcțională de tipul indicelui de performanță (11.14).

Pornind de la sistemul definit prin ecuația diferențială de ordinul n se obțin variabilele de stare astfel:

$$a_n y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots a_0 y=u;$$

$$x_1=y;$$

$$\dot{x}_2=\dot{y};$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n=y^{(n-1)}$$

Modelul matematic al sistemului în reprezentare matriceal-vectorială, dacă considerăm $a_n=1$, este:

$$\dot{x}_1=x_2;$$

$$\dot{x}_2=x_3;$$

$$\dot{x}_3=x_4;$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n=-a_0x_1-a_1x_2\ldots-a_{n-1}x_n+u$$

sau

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\ldots\ldots 0 \\ 0 & 0 & 1 \quad 0\ldots 0 \\ \vdots & & \\ a_0 & a_1\ldots\ldots a_{n-1} \end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}\cdot u. \qquad (11.32)$$

Vom include, de asemenea, o variabilă de stare x_0 definită prin funcționala de extremizat

$$\dot{x}_0=\frac{dx_0}{dt}=L[x_1, x_2\ldots x_n, u_1, u_2\ldots u_r]. \qquad (11.33)$$

Dacă notăm această funcțională cu $f_0[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)]$ iar celelalte variabile de stare le notăm cu $f_i[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)]$, modelul matematic al sistemului devine:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0&=f_0[\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t)]; \\ \dot{x}_1&=f_1[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)]; \\ &\vdots \\ \dot{x}_n&=f_n[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)]. \end{aligned} \qquad (11.34)$$

Scanned with OKEN Scanner

Introducînd variabilele asociate $\psi_0(t)$, $\psi_1(t) \ldots \psi_n(t)$ definite de ecuaţiile omogene:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\sum_{k=0}^{n} \frac{\partial f_k(x_1, x_2 \ldots x_n; u_1, u_2 \ldots u_r)}{\partial x_i} \cdot \psi_k \tag{11.35}$$

(cu $i=0, 1, 2 \ldots n$) şi funcţia auxiliară H de forma

$$H[\psi_0, \psi_1 \ldots \psi_n; x_1, x_2 \ldots x_n; u_1, u_2 \ldots u_r] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \psi_k f_k[x_1, x_2 \ldots x_n; u_1, u_2 \ldots u_r] \tag{11.36}$$

sau

$$H = \psi_0 \cdot L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \sum_{k=1}^{n} \psi_k(t) \cdot f_k(x_1, x_2 \ldots x_n; u_1, u_2 \ldots u_r),$$

rezultă următoarele relaţii:

$$\frac{\partial H}{\partial \psi i} = f_i[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)]; \quad (i=0, 1, \ldots n) \tag{11.37}$$

sau

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}; \quad (i=0, 1, 2, \ldots n). \tag{11.38}$$

Din (11.36) se obţine

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \psi k; \quad (i=0, 1, \ldots n) \tag{11.39}$$

şi ţinînd seama de definiţia variabilelor asociate (11.35) se obţine

$$\dot{\psi}_i = \frac{\partial \psi_i}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}; \qquad (1=0, 1, \ldots n). \tag{11.40}$$

Relaţiile (11.38) şi (11.40) formează un sistem de ecuaţii de tipul ecuaţiilor lui Hamilton, din domeniul mecanicii.

Ţinînd seama de aceste ecuaţii se poate formula principiul maximului [5, 6]: pentru ca mărimile de comandă $\mathbf{u}(t)$ să fie optimale, deci să fie realizată comanda optimală $[u_{1\,opt}, u_{2\,opt}, \ldots, u_{r\,opt}]$ care asigură minimul integralei (11.14), este necesar să existe asemenea funcţii asociate continue şi nenule $\psi_0(t)$, $\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)$, astfel ca la $\forall t \in [t_0, t_f]$ funcţia $H[\psi(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)]$ ca funcţie de variabile $\mathbf{u} \in \Omega$ să atingă un maxim

$$H[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \psi(t)] = \operatorname*{Max}_{u \in \Omega} H[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \psi(t)], \tag{11.41}$$

unde Ω este domeniul comenzilor admisibile.

Algoritmul de obţinere al soluţiei optimale pe baza acestui principiu are următoarele etape:

1. Se scrie sistemul de ecuaţii diferenţiale ce descrie sistemul sub forma:

$$\dot{x}_i = f_i[\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t), t]; \quad (i=0, 1, 2, \ldots, n);$$

$$\dot{x}_0 = L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t). \tag{11.42}$$

Scanned with OKEN Scanner

2. Se alcătuieşte funcţia H (hamiltonianul) sau funcţia de stare a lui Pontriaghin

$$H=\psi_0(t)\cdot L[\mathbf{x}(t),\ \mathbf{u}(t)]+\sum_{k=1}^{n}\psi_k(t)\cdot f_k[\mathbf{u}(t),\ \mathbf{x}(t)]. \tag{11.43}$$

3. Se determină valorile lui $\mathbf{u}(t)$ care maximizează funcţia H prin rezolvarea sistemului de ecuaţii:

$$\frac{\partial H}{\partial u_i}=0; \qquad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ r);$$
$$\mathbf{u}^\circ(t)=\mathbf{u}^\circ[\mathbf{x}(t),\ \psi(t)]. \tag{11.44}$$

4. Se rezolvă sistemul de ecuaţii:

$$\frac{\partial H^\circ}{\partial \psi_i}=\dot{x}_i; \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n);$$
$$\frac{\partial H^\circ}{\partial x_i}=-\frac{\partial \psi_i}{\partial t}; \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n); \tag{11.45}$$

unde

$$H^\circ[\mathbf{x}(t),\ \psi(t)]=H[\mathbf{x}(t),\ \mathbf{u}^\circ(\mathbf{x}(t),\ \psi(t)),\ \psi(t)].$$

Rezolvarea acestor două sisteme de ecuaţii, cu condiţii bilocale date pentru variabilele x(t) şi $\psi(t)$, permite obţinerea funcţiilor $\mathbf{x}(t)$ şi (t).

5. Valorile lui $\mathbf{x}(t)$ şi $\psi(t)$, obţinute prin rezolvarea ecuaţiilor de la punctul 4, se introduc în expresia funcţiei de comandă optimală $\mathbf{u}^\circ[\mathbf{x}(t),\ \psi(t)]$.

Exemplul 11.1

Se consideră procesul descris prin ecuaţia

$$\frac{d^2y}{dt^2}=u,$$

cu restricţii asupra intrării de forma $|u|\leqslant 1$ şi se cere a determina comanda ce extremizează indicele de performanţă dat de relaţia

$$IP=\int_0^T dt.$$

1. Modelul matematic al sistemului evidenţiind variabilele de stare este:

$$\dot{x}_1=x_2;$$
$$\dot{x}_2=u; \tag{11.46}$$
$$\dot{x}_0=1.$$

Scanned with OKEN Scanner

2. Alcătuim funcția H sub forma

$$H=\psi_0+\sum_1^2 \psi_k \cdot f_k = \psi_0+\psi_1 \cdot x_2+\psi_2 \cdot u. \tag{11.47}$$

3. Se determină funcția $u^\circ(t)$ maximizînd funcția H în raport cu comanda

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0=\psi_2(t). \tag{11.48}$$

Formularea principiului maximului necesită ca $\psi(t)$ să nu fie zero, deci $\psi_2(t)=0$ nu poate fi reținută pentru toți t. Prin urmare valorile lui u ce ar putea asigura validitatea ecuației (11.48) sînt extremele funcției $u(t)$ și anume valorile ± 1. Astfel, pentru $\psi_2(t)>1$ comanda $u=+1$ iar pentru $\psi_2(t)<1$ comanda $u=-1$. Comanda optimală poate fi reprezentată prin funcția semn

$$u=\text{sign. } \psi_2(t). \tag{11.49}$$

4. Se rezolvă ecuațiile:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\psi_0}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_0}=0;\ \dot{x}_0=1;\\
&\frac{d\psi_1}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=0;\ \dot{x}_1=x_2;\\
&\frac{d\psi_2}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=0=-\psi_1;\ \dot{x}=u,
\end{aligned} \tag{11.50}$$

cu condițiile bilocale: $x_2(0)=x_2(T)=0$; $\psi_2(0)=\psi_2(T)=0$ ale căror soluții sînt:

$$\begin{aligned}
&\psi_0=\text{const.}=C_0;\\
&\psi_1=\text{const.}=C_1;\\
&\psi_2=C_2-C_1t.
\end{aligned} \tag{11.51}$$

Introducînd expresia lui ψ_2 în (11.49) se obține expresia comenzii optimale

$$U=\text{sign } (C_2-C_1t). \tag{11.52}$$

Constantele C_1 și C_2 se pot determina ținînd seama de condițiile bilocale date, una dintre aceste constante putînd fi aleasă.

Deoarece funcția $\psi_2=C_2-C_1t$ poate schimba de semn o singură dată comanda optimală (11.52), este o funcție continuă pe porțiuni care are ca valori limită valorile ± 1.

Programarea dinamică permite obținerea deciziei optimale într-o manieră secvențială. Baza acestei metode 0 reprezintă principiul optimizării al lui Bellman [5], care arată că: „o strategie optimală are proprietatea că, dacă starea inițială și decizia inițială sînt date, deciziile care rămîn trebuie să constituie o strategie optimală în raport cu starea care rezultă din prima decizie". Strategia în acest caz este reprezentată prin secvențe de comenzi.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 11.2

Considerăm nodurile în cadrul rețelei din figura 11.17. Se cere a găsi calea de deplasare între stările corespunzătoare nodurilor a, l astfel încît costul deplasării să fie minim. Definim costul între nodurile a și b prin J_{ab} și corespunzător J_{ac} pentru traseul între a și c etc.

Costul minim se obține prin găsirea minimului sumei:

$$\min J=\min[J_{ab}+J_{bd}+J_{dl}, J_{ab}+J_{be}+J_{el};$$
$$J_{ac}+J_{ck}+J_{kl}, J_{ac}+J_{ch}+J_{he}]. \quad (11.53)$$

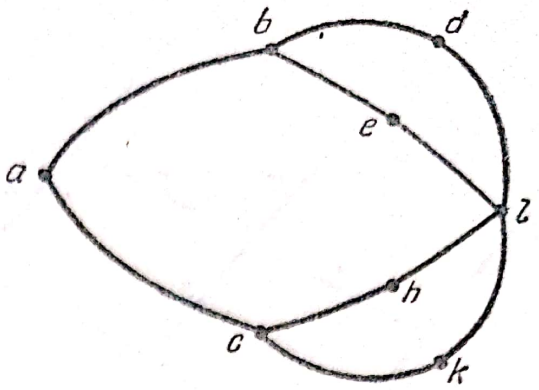


Fig. 11.17. Rețea pentru determinarea traseului optim pe baza principiului programării dinamice.

Dacă starea inițială este a și dacă decizia inițială este de a merge spre starea b, atunci traseul între b și l trebuie să fie optimal dacă întregul traseu între a și l este optim. Dacă decizia inițială este de a merge la c, atunci traseul de la c la l trebuie ales să fie optimal.

Notînd prin g_b și g_c costurile minime între b și l și respectiv c și l:

$$g_b=\min[J_{bl}+J_{dl}, J_{be}+J_{el}];$$
$$g_c=\min[J_{ch}+J_{hl}, J_{ck}+J_{kl}],$$

principiul optimizării se scrie în acest caz sub forma

$$g_a=\min J=\min[J_{ab}+g_b, J_{ac}+g_c]. \quad (11.54)$$

Cantitatea ce trebuie minimizată este alcătuită din două părți: o parte legată direct de decizia curentă, constantele J_{ab} și J_{ac}, și a doua parte reprezentînd valoarea minimă a tuturor costurilor viitoare, începînd cu starea care rezultă din prima decizie.

Principiul optimizării înlocuiește o alegere între toate alternativele ecuației (11.53) printr-o secvență între mai puține alternative (se găsesc g_b, g_c și apoi g_a din ecuația 11.54).

Exemplul 11.3

Pentru rețeaua dată în figura 11.18 se cere a se găsi traseul între punctele a și l folosind programarea dinamică.

Definim prin g_k distanța minimă între un nod general k și nodul l. Evident $g_e=0$, $g_h=4$ și $g_j=5$, $g_d=2+g_h=6$, $g_f=6+g_j=11$. Primul nod unde se impune a lua o decizie este nodul e. Astfel

$$g_e=\min[3+g_h, 4+g_j]=\min[3+4, 4+5]=7.$$

Cel mai bun traseu între e și l trece prin h. Similar se calculează g_b, g_c și g_a.

$$g_b=\min[8+g_d, 5+g_e]=\min[8+6, 5+7]=12;$$
$$g_c=\min[6+g_f, 4+g_e]=\min[6+11, 4+7]=11;$$
$$g_a=\min[3+g_b, 5+g_c]=\min[3+12, 4+11]=15.$$

Scanned with OKEN Scanner

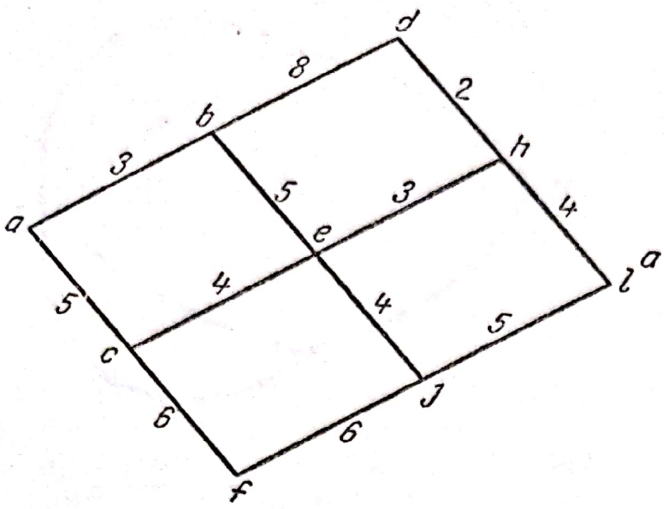


Fig. 11.18. Exemplu de determinare a traseului optim cunoscînd stările posibile la momente discrete de timp.

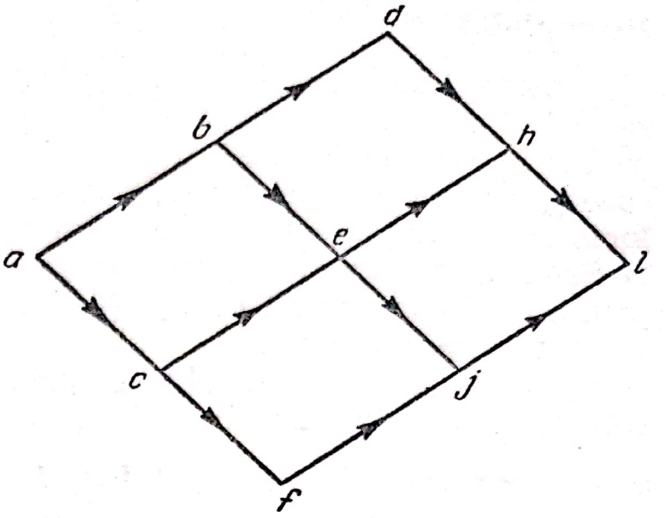


Fig. 11.19. Ilustrarea traseului optim în cadrul reţelei prin săgeţi.

Drumul cel mai scurt între nodurile a şi l are valoarea 15 şi traseul cel mai scurt trece prin nodurile a, b, e, h, l.

Drumul cel mai scurt de la orice nod la nodul l este figurat prin săgeţi în figura 11.19.

Graficul prezentat în figurile 11.18 şi 11.19 este o reprezentare a stărilor posibile la momente discrete de timp t_k. Punctul a este la t_0, b sau c la $t_1 \ldots l$ la t_4.

Alegerea unor direcţii posibile din nodurile e, b, c şi a revine la a determina seturi admisibile ale comenzii optimale.

Structura unei comenzi $\mathbf{u}(k)$ este analoagă cu selectarea unei direcţii de pornire dintr-un nod dat $\mathbf{x}(t)$. Segmentele de linie ce leagă nodurile joacă acelaşi rol ca ecuaţia cu diferenţe ce descrie funcţionarea unui sistem dinamic

$$\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)]. \qquad (11.55)$$

Dacă $\mathbf{x}(0)$ este cunoscut, $\mathbf{u}(0)$ poate fi găsit în funcţie de starea specificată. Ecuaţia cu diferenţe a sistemului (11.55) foloseşte $\mathbf{x}(0)$ şi $\mathbf{u}(0)$ pentru a obţine $\mathbf{x}(1)$. Cunoscînd pe $\mathbf{x}(1)$ determinăm pe $\mathbf{u}(1)$ care dă pe $\mathbf{x}(2)$ ş.a.m.d.

Programarea dinamică se aplică cu bune rezultate la sistemele reductibile la sistemele cu eşantionare. Cea mai mare limitare a programării dinamice constă în volumul mare de calcul, iar limitarea pentru principiul maximului constă în dificultăţile legate de rezolvarea ecuaţiilor neliniare bilocale, optimul obţinut fiind un optim local nu global.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 12

SISTEME ADAPTIVE

12.1. INTRODUCERE

În capitolele precedente am presupus că procesul este invariant, perturbațiile care intervin asupra acestuia nu modifică modelul matematic, efectul lor cumulîndu-se cu efectul comenzii.

În practică există procese al căror model matematic (caracteristica de transfer) se modifică sub influența unor perturbații denumite *perturbații parametrice*, modificare în general nepredictibilă.

Evident că automatizarea unui asemenea proces implică utilizarea unor dispozitive automate care să asigure pe de o parte identificarea automată a procesului și în funcție de rezultatul identificării și în conformitate cu programul impus să genereze comanda corespunzătoare desfășurării procesului cu satisfacerea criteriilor de performanță dorite. Un asemenea sistem automat poartă denumirea de *sistem adaptiv*. Structura cea mai generală a unui sistem adaptiv este prezentată în figura 12.1.

În această figură s-a considerat că asupra procesului intervin atît perturbații aditive p_a cît și perturbații parametrice p_α. Algoritmul de

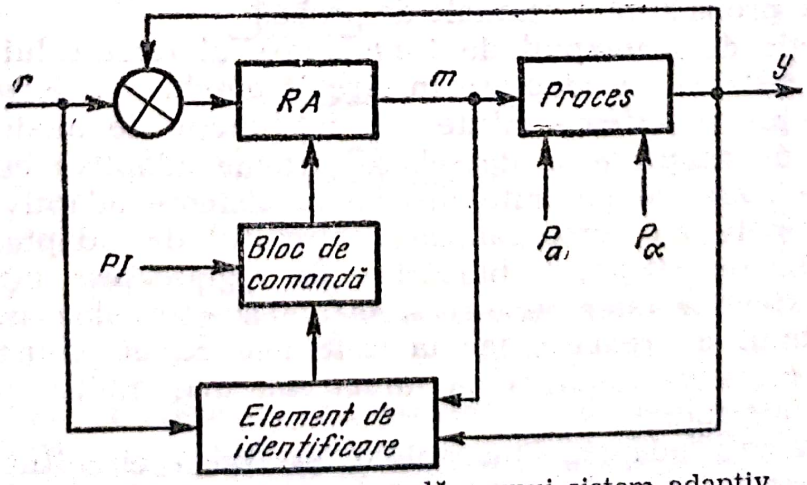


Fig. 12.1. Structura generală a unui sistem adaptiv.

Scanned with OKEN Scanner

reglare se modifică în cadrul acestui sistem în funcţie de variaţiile ce apar în caracteristica de transfer a procesului, variaţii care sînt sesizate de elementul de identificare. Operaţia de identificare poate asigura determinarea valorilor unor parametri ai procesului care se modifică sub acţiunea perturbaţiilor parametrice sau determinarea unor caracteristici dinamice ale părţii fixate, sau ale sistemului în ansamblu.

Stabilirea algoritmului de conducere a procesului reprezintă cea de-a doua funcţie a sistemului adaptiv şi se realizează pe baza unui criteriu de adaptare admis şi în funcţie de rezultatele identificării. În acest caz legea de reglare se stabileşte fie calitativ fie cantitativ, în mod automat, în funcţie de variaţiile caracteristicii de transfer a procesului.

Perturbaţiile parametrice sînt astfel compensate prin intermediul circuitului de adaptare, circuit care cuprinde elementul de identificare automată, blocul de calcul care stabileşte, în funcţie de modelul matematic al procesului sau sistemului, strategia de ajustare a parametrilor de acord ai regulatorului sau modificarea însăşi a algoritmului de reglare.

Perturbaţiile aditive care apar în sistem sînt compensate prin intermediul circuitului de reacţie clasic al sistemului automat, care asigură totodată funcţionarea sistemului de reglare în lipsa perturbaţiilor parametrice.

12.2. CLASIFICAREA SISTEMELOR ADAPTIVE

Pînă în prezent nu există o clasificare a sistemelor adaptive unanim adoptată, însă cea mai răspîndită clasificare are la bază pe de o parte modul de realizare a identificării procesului sau sistemului, iar pe de altă parte principiul de funcţionare al circuitului de adaptare şi de realizare a acţiunii de adaptare.

În funcţie de modul de realizare a identificării şi al informaţiei obţinute prin identificarea automată se întîlnesc sisteme adaptive cu identificarea caracteristicilor părţii fixate, cu identificarea caracteristicilor întregului sistem, cu identificarea caracteristicilor unor semnale aplicate din exterior şi sisteme combinate.

În funcţie de metodele de identificare, sistemele adaptive pot fi cu semnale de probă şi fără semnale de probă.

În funcţie de principiul de funcţionare al circuitului de adaptare se deosebesc sisteme cu adaptare în circuit deschis, sisteme cu adaptare în circuit închis şi sisteme mixte, iar în funcţie de modul de acţiune a circuitului de adaptare se deosebesc sisteme adaptive cu autoorganizare, sisteme adaptive cu autoajustare şi sisteme adaptive instruibile.

La sistemele cu autoorganizare, circuitul de adaptare poate comanda modificarea structurii blocurilor de reglare prin intermediul comutării conexiunilor unor subansamble ale acestui bloc, modificîndu-se astfel algoritmul de reglare, iar la sistemele cu autoajustare circuitul de adaptare comandă modificarea unuia sau mai multor parametrii de acord ai regulatorului.

La sistemele adaptive instruibile, pe lîngă circuitul obişnuit de reglare şi circuitul de adaptare, se întroduce un al treilea circuit, *cir-*

Scanned with OKEN Scanner

cuitul de instruire care, pe baza informațiilor acumulate despre evoluția procesului, comandă modificarea programului elementelor de calcul din circuitul de adaptare în sensul necesar pentru realizarea criteriului de adaptare cu o precizie mai bună.

În cele ce urmează se prezintă cîteva scheme structurale de sisteme adaptive mai des întîlnite și modul de funcționare al acestora.

12.2.1. SISTEME ADAPTIVE FĂRĂ SEMNALE DE PROBĂ. SISTEME ADAPTIVE CU MODEL ETALON

Asemenea sisteme au fost puse la punct printre primele sisteme adaptive datorită simplității de realizare, fiind cele mai răspîndite mai ales în domeniul aviației.

Schema de principiu a unui asemenea sistem este prezentată în figura 12.2.

Mărimea de intrare $r(t)$ a sistemului se aplică simultan și modelului etalon, care reprezintă modelul sistemului cu parametri invariabili și corespunde unor anumite performanțe impuse.

Acțiunea circuitului de adaptare este determinată de diferența între mărimea J_m de la ieșirea modelului și mărimea J de la ieșirea sistemului cu parametri variabili, denumită și *eroare de adaptare* ($e = y_m - y$).

În conformitate cu criteriul de adaptare impus (eroare medie pătratică minimă sau alt criteriu), blocul de calcul determină valorile parametrilor de acord ai regulatoarelor astfel încît valoarea lui e să tindă spre zero. Prin intermediul elementului de execuție al circuitului de adaptare se acționează asupra regulatorului modificîndu-se parametrii de acord.

Adaptarea în cadrul acestui sistem asigură un anumit grad de invarianță a performanțelor sistemului supus perturbațiilor parametrice, forțînd sistemul să păstreze o comportare apropiată de cea a modelului.

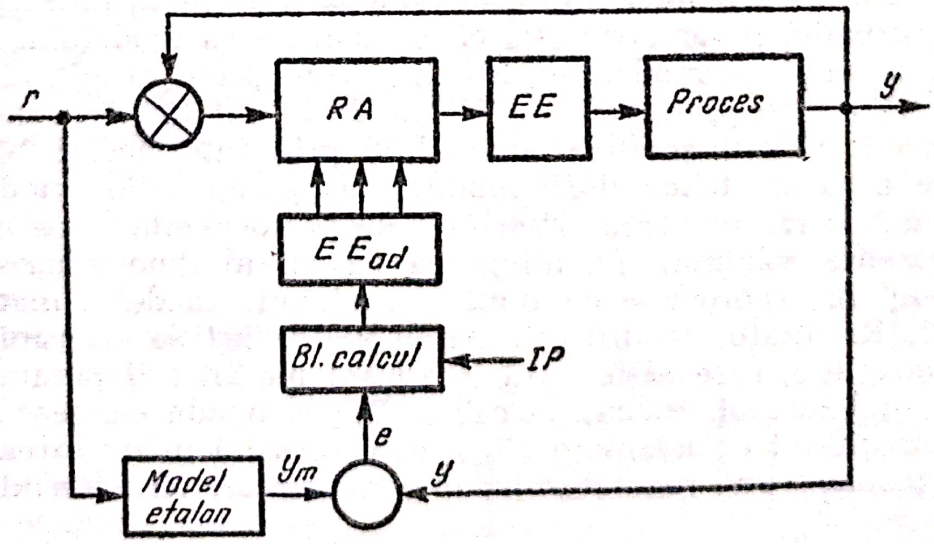


Fig. 12.2. Schema unui sistem adaptiv cu model etalon:
Bl. calcul — bloc de calcul; *IP* — indice de performanță; EE_{ad} — element de execuție al circuitului de adaptare; *RA* — regulator automat.

Scanned with OKEN Scanner

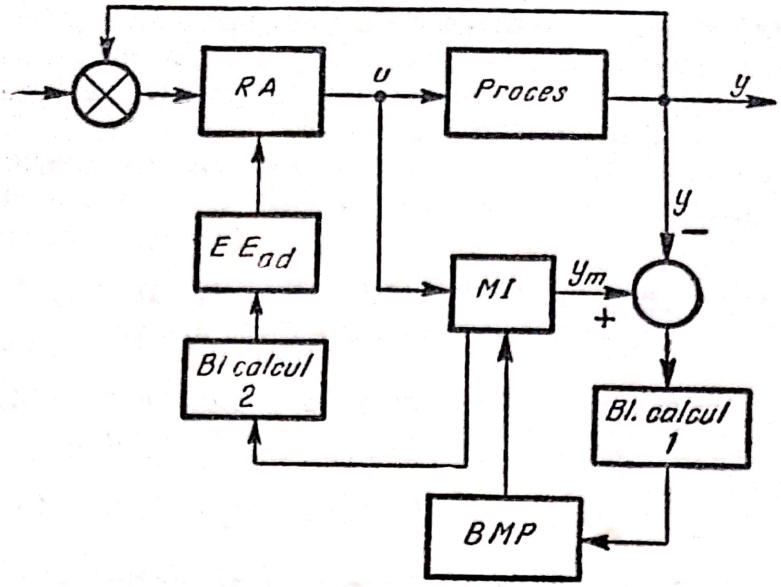


Fig. 12.3. Schema de principiu a unui sistem adaptiv cu model instruibil:
MI — model instruibil; *BMP* — bloc pentru modificarea parametrilor.

Modelul matematic al sistemului fiind cunoscut cu aproximație, însuși *modelul etalon* este determinat cu un anumit grad de aproximație, de aceea la proiectare se impun modelului performanțe mai bune.

În unele cazuri se folosesc modele cu funcții de transfer de ordin mai mic decît ordinul funcției de transfer a sistemului, obținîndu-se performanțe bune pentru sistemul adaptiv.

Sistem adaptiv cu model instruibil. Adaptarea cu model instruibil se realizează după o schemă de principiu ca în figura 12.3, unde modelul instruibil *MI* asigură identificarea parametrilor instalației, modificîndu-și parametrii proprii astfel încît să poată fi urmărite valorile parametrilor variabili ai instalației tehnologice.

Mărimea de comandă $u(t)$ este aplicată atît la intrarea procesului supus perturbației parametrice P_α cît și la intrarea modelului instruibil. Ieșirile procesului și modelului *MI* sînt comparate rezultînd abaterea $e=y_m-y$, care este prelucrată de blocul de calcul BC_1 în sensul asigurării reducerii valorii acesteia comandînd prin intermediul blocului de modificare a parametrilor *BMP* modificarea parametrilor modelului instruibil, pînă la minimizarea criteriului de performanță (eroare (abatere) medie pătratică minimă). La atingerea valorii minime a acestui criteriu, modelul *MI* reproduce cu bună aproximație modelul matematic al procesului. Rezultatul modificării parametrilor *MI* se transmite circuitului de adaptare, care acționează în sensul modificării parametrilor de acord ai regulatorului. Blocul de calcul BC_2 comandă elementul de execuție al circuitului de adaptare EE_{ad}, care execută modificarea necesară a valorii parametrului regulatorului în conformitate cu criteriul de adaptare ales.

Sistem adaptiv cu calculator. Funcțiile de identificare și elaborare ale algoritmului de adaptare presupun existența unor blocuri de calcul și de aceea în unele sisteme adaptive apar fie calculatoare analogice fie calculatoare numerice.

Scanned with OKEN Scanner

În figura 12.4 se prezintă schema unui sistem adaptiv cu calculator analogic, prevăzut cu elemente logice și un model rapid al părții fixate.

Reglarea procesului se face fie de regulatorul *RA* fie de calculator. Calculatorul conține un model rapid al procesului și asigură adaptarea parametrilor acestui model în conformitate cu valorile parametrilor procesului, care variază sub influența perturbației parametrice P_α.

Identificarea se realizează cu ajutorul calculatorului analogic care primește la intrare atît mărimea r cît și mărimea y. Comutarea dispozitivului *DC* pe poziția *1* sau *2* se realizează în funcție de gama de variație a mărimii de intrare a sistemului. Semnalul de comandă elaborat de calculator u_{cC} se obține pe baza indicațiilor pe care le oferă modelul rapid asupra evoluției viitoare a procesului.

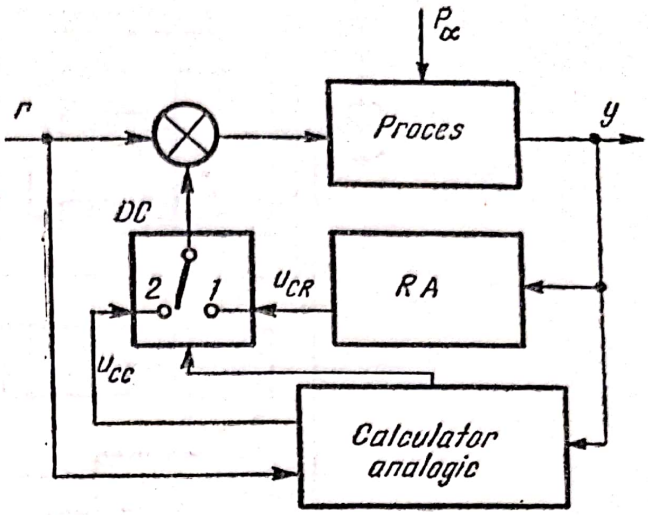


Fig. 12.4. Schema unui sistem adaptiv cu calculator analogic:
DC — dispozitiv de comutare; u_{cc} — mărimea de comandă elaborată de calculator; u_{cR} — mărimea de comandă elaborată de regulatorul automat *RA*.

În cadrul acestui sistem calculatorul îndeplinește patru funcții: identifică parametrii părții fixate (a procesului); adaptează în mod corespunzător parametrii modelului rapid; comandă comutarea dispozitivului *DC* conform gamei de variație a mărimii de intrare și elaborează semnalul de comandă u_{cC} în perioadele cînd înlocuiește blocul de reglare *RA* (care elaborează semnalul u_{CR}).

Sistemele adaptive cu calculatoare numerice au în componența lor unul sau două calculatoare numerice specializate.

În figura 12.5 se prezintă o schemă simplificată a unui sistem adaptiv cu două calculatoare numerice, unul CN_1 pentru realizarea algoritmului de conducere directă a procesului iar celălalt calculator numeric CN_2 pentru identificarea procesului.

Criteriul de adaptare constă în obținerea unui proces tranzitoriu de durată minimă și fără suprareglaj în condițiile variațiilor parametrilor procesului.

Sisteme autoinstruibile. Specifică acestor sisteme este prezența în structura lor a unor blocuri de memorie care acumulează informații asupra evoluției procesului și în funcție de aceste informații determină modificarea însăși a criteriului de adaptare.

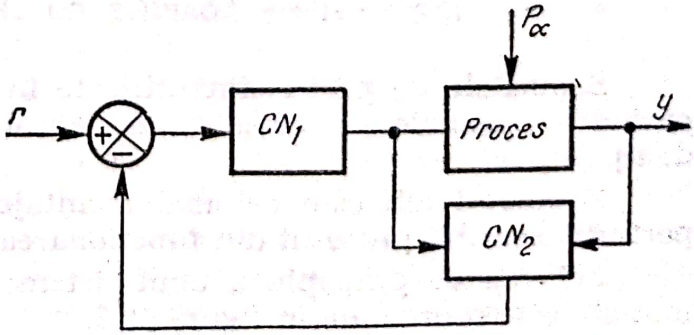


Fig. 12.5. Schema de principiu a unui sistem adaptiv cu calculator numeric.

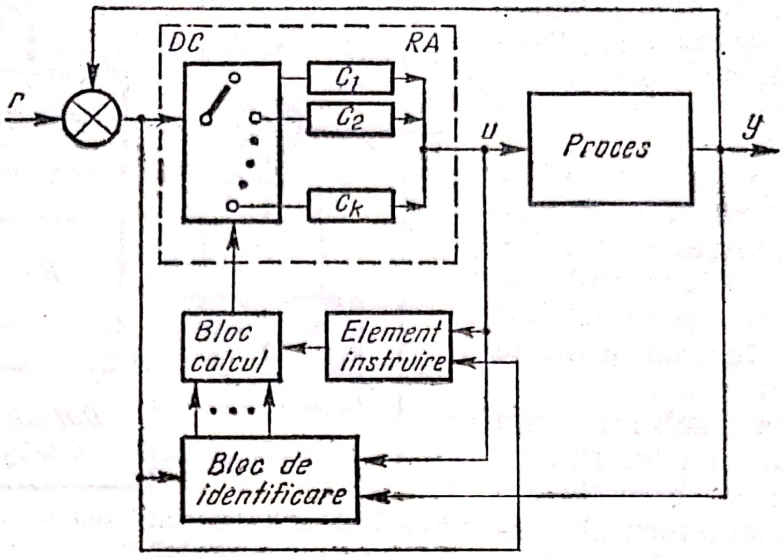


Fig. 12.6. Schema unui sistem adaptiv cu autoorganizare și autoinstruire.

Schema de principiu a unui asemenea sistem adaptiv autoinstruibil este prezentată în figura 12.6.

Regulatorul automat în acest caz este cu structură variabilă, avînd în componența sa dispozitivul de comutare *DC* și rețelele de corecție C_i ale căror funcții de transfer determină algoritmul de conducere al procesului.

Blocul de calcul al circuitului de adaptare, în funcție de semnalele obținute de la blocul de identificare și pe baza criteriului de adaptare fixat de elementul de instruire, comandă dispozitivul de comutare *DC*, respectiv introduce în sistem un anumit algoritm de conducere.

Elementul de instruire, pe baza datelor acumulate despre evoluția procesului, determină criteriul de adaptare pentru circuitul de adaptare. Astfel, în cadrul acestui sistem pot fi evidențiate trei circuite: circuitul de reglare convențional, circuitul de adaptare și circuitul de instruire. Asemenea sisteme se folosesc pentru procese complexe unde nu se pot stabili programe fixe pentru blocul de calcul al circuitului de adaptare.

12.2.2. SISTEME ADAPTIVE CU SEMNALE DE PROBĂ

Semnalele de probă sînt utilizate în scopul identificării procesului, putînd fi: semnale sinusoidale, semnale de tip zgomot alb sau semnale de tip impuls.

Zgomotul alb este cel mai avantajos de utilizat, dat fiind că nu perturbă sensibil procesul din funcționarea sa normală.

Schema de principiu a unui sistem adaptiv cu semnal de tip zgomot alb este prezentată în figura 12.7.

Peste semnalul de intrare este suprapus zgomotul alb n_i generat de generatorul *G*. Răspunsul sistemului este compus din răspunsul la

Scanned with OKEN Scanner

semnalul de intrare și răspunsul la zgomotul n_i. Circuitul de adaptare cuprinde elementul de identificare (corelatorul automat), care permite obținerea funcției pondere a sistemului $w(\tau)$, elementul de calcul EC, care stabilește modificarea parametrilor de acord ai regulatorului, și elementul de execuție EE_{ad} al circuitului de adaptare, care modifică parametrii de acord. Elementul de calcul acționează conform indicelui de performanță IP și generează un semnal de comandă H, prin care sînt apreciate caracteristicile dinamice ale sistemului. Modificarea funcției $w(t)$ sub influența perturbației parametrice determină o variație a lui H și elementul de execuție EE_{ad} acționează în sensul modificării unui parametru al regulatorului pentru a compensa această modificare.

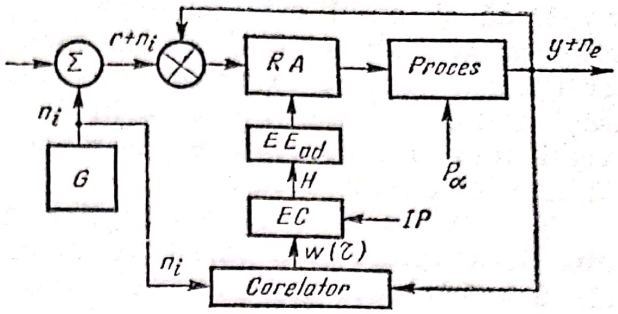


Fig. 12.7. Schema de principiu a unui sistem adaptiv cu semnal de probă de tip zgomot alb.

Așa cum s-a arătat în cadrul sistemelor adaptive, variațiile arbitrare ale unor parametri ai instalației tehnologice conduc la modificarea caracteristicilor dinamice ale întregului sistem, circuitul de adaptare avînd rolul de a restabili aceste caracteristici la un anumit nivel ales, prin modificarea unor parametri ai blocului de reglare. Circuitul de adaptare acționează asupra blocului de reglare pe baza informației asupra comportării procesului tehnologic sau a sistemului pe un interval de timp dat, intervenind numai cînd variația mărimii de la ieșire se abate de la o anumită variație prescrisă.

Analiza sistemelor adaptive este astfel mult mai dificil de realizat, ținînd seama de faptul că acțiunea buclei de reglare obișnuită și acțiunea circuitului de adaptare au loc simultan.

În general, modelul matematic al sistemelor adaptive continue are forma unor ecuații diferențiale neliniare cu coeficienți variabili, metodele de analiză a acestor sisteme fiind tipice sistemelor neliniare variante în timp.

Comportarea sistemelor în ansamblu depinde în mod esențial de performanțele tranzitorii ale circuitului de adaptare, impunîndu-se realizarea unor regimuri tranzitorii cît mai scurte pentru răspunsul circuitului de adaptare, asigurîndu-se în aceste condiții gradul de invarianță dorit al performanțelor sistemului.

Atît verificarea stabilității cît și calculul răspunsului tranzitoriu al circuitului de adaptare se obțin dificil datorită gradului de complexitate al modelului matematic, putînd fi utilizate totuși modele simplificate, în funcție de tipul sistemului adaptiv.

Principala problemă ce trebuie rezolvată la proiectarea unui sistem adaptiv este aceea de a asigura identificarea continuă în mod automat cu precizie cît mai mare a procesului și elaborarea strategiei de conducere a procesului în concordanță cu variațiile parametrilor ce caracterizează procesul.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă sistemul este cu autoajustare, parametrii optimi ai algoritmului de reglare se modifică în mod automat în funcție de rezultatul identificării, pe cînd în cazul unui sistem cu autoorganizare se modifică însăși structura sistemului prin includerea în structura sistemului a diverși algoritmi de reglare. Asemenea sisteme sînt cu structură variabilă, deci sisteme neliniare.

Proiectarea sistemelor adaptive are ca scop determinarea algoritmului de adaptare și a parametrilor ce intervin în acest algoritm, astfel încît să fie obținute performanțele impuse.

Caracterul neliniar al modelelor matematice care descriu atît buclele de reglare de bază cît și circuitul de adaptare face dificilă rezolvarea problemelor de proiectare a sistemelor adaptive.

În aceste condiții nu au fost elaborate metode generale de proiectare a sistemelor adaptive ci numai metode specifice diverselor categorii de sisteme adaptive.

Cele mai importante rezultate privind proiectarea sistemelor adaptive au fost obținute pentru sistemele cu model etalon.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 13

NOȚIUNI PRIVIND CONDUCEREA PROCESELOR CU AJUTORUL CALCULATOARELOR

13.1. GENERALITĂȚI

Schimbările ce au avut loc în ultimii ani privind modul de realizare a proceselor tehnologice, legate de creșterea gradului de complexitate, înăsprirea condițiilor de siguranță în funcționare, creșterea performanțelor impuse în funcționare, reducerea consumului de combustibil etc., au repercursiuni importante în domeniul automatizării instalațiilor industriale.

Astfel apare necesitatea asigurării unor regimuri de funcționare stabile și optime economic, acționarea la distanță asupra diverselor părți componente ale proceselor complexe, culegerea, transmiterea, memorarea și prelucrarea unor volume mari de informație, asigurarea unor relații de interdependență între diverșii parametri ai procesului, asigurîndu-se satisfacerea unor criterii de performanță globale la valori optime. Funcțiile echipamentelor de automatizare devin mai numeroase și de o mai mare varietate, impunîndu-se utilizarea unor echipamente capabile să îndeplinească asemenea funcții complexe cu performanțe ridicate. Aceste considerente au condus în mod necesar la utilizarea pe scară din ce în ce mai largă a echipamentelor de calcul pentru automatizarea complexă a proceselor industriale, echipamente care au cunoscut o dezvoltare deosebită în ultimii opt ani.

Conducerea cu calculatorul a proceselor tehnologice reprezintă o tehnică de utilizare a calculatoarelor numerice pentru conducerea unor părți sau în totalitate a unui proces tehnologic, cu scopul realizării și menținerii unor performanțe tehnice și economice anumite.

Un sistem de conducere cu calculatorul a proceselor tehnologice cuprinde întregul ansamblu de: echipamente, programe pentru calculator, proceduri de operare, operatori umani care realizează împreună conducerea procesului tehnologic dat, în conformitate cu cerințele de performanță impuse. Aportul calculatorului ca element al sistemului de conducere a procesului tehnologic este legat de calitățile acestuia

Scanned with OKEN Scanner

în ceea ce privește: posibilitatea de a prelua și prelucra volume mari de informații; precizia mare de prelucrare a datelor; capacitatea de a executa calcule de complexitate ridicată și viteză mare de prelucrare a informațiilor din proces; posibilitatea de intervenție asupra procesului (funcționare în timp real).

Evoluția rapidă a tehnicii de calcul numeric a permis realizarea unor calculatoare de proces, mini și microcalculatoare, ale căror performanțe permit realizarea cu succes a conducerii proceselor tehnologice începînd cu identificarea acestora, elaborarea unor algoritmi de conducere optimală și adaptivă a proceselor industriale, fiind astfel posibilă implementarea unor concepții moderne din teoria sistemelor automate.

Realizarea funcțiilor de conducere cu calculator a proceselor tehnologice impune: memorarea cu precizie și frecvență corespunzătoare a parametrilor tehnologici semnificativi, transmiterea cu precizie a semnalelor de măsură la echipamentul de calcul; prelucrarea în calculator a mărimilor măsurate utilizînd algoritmi convenționali și algoritmi complecși de conducere automată; acționarea în consecință (directă sau prin operator) în timp util asupra desfășurării procesului tehnologic condus pentru menținerea lui în limitele admise de funcționare sau menținerea regimului optim de funcționare; furnizarea de informații corecte, suficiente și la momentul oportun către operatorul tehnologic sau către nivelele superioare de conducere a procesului de producție. Ținînd seama de funcțiile și operațiile ce trebuie realizate de un sistem de conducere cu calculator a proceselor tehnologice, structura unui asemenea sistem conține următoarele elemente principale:

— *echipamentul de calcul* (unitate centrală, unități periferice convenționale: mașină de scris, consolă, cititor-perforator-bandă, cititor-perforator cartele, imprimantă, unitate de discuri magnetice, unitate de benzi magnetice);

— *echipamente de cuplare* la procesul tehnologic condus (interfață industrială, traductoare ale diferiților parametri din procesul tehnologic, convertoare de semnal externe, regulatoare automate, elemente de execuție, cabluri speciale de măsură și legătură, stații de comutare calculator/manual);

— *echipamente de interfață* cu operatori tehnologici (panouri, pupitre, terminale tip display etc.);

— *echipamente de transmisie* a datelor și de cuplare între calculatoare (în sisteme cu echipamente de calcul ierarhizate sau distribuite);

— *programe pentru calculator* (programe de bază, programe standard, programe de aplicații);

— *proceduri de operare;*

— *operatori umani* (personalul de exploatare a instalației tehnologice, personalul de întreținere a sistemului de conducere a procesului tehnologic).

Pentru proiectarea și implementarea unui sistem de conducere cu calculator se impune luarea în considerare a mai multor factori. Printre acești factori notăm: dimensiunea procesului, gradul de risc în exploatare, complexitatea procesului, cerințele de performanță impuse sistemului condus cu calculatorul. După dimensiunea procesului remarcăm:

Scanned with OKEN Scanner

procese cu producție de masă, procese cu producție de volum mare, de volum redus și procese cu microproducție. Alegerea echipamentului de calcul în funcție de dimensiunea procesului implică calculul perioadei de recuperare a investiției, care este invers proporțională cu valoarea producției marfă anuală.

Gradul de risc în exploatare, determinat de tipul procesului, de condițiile dificile de exploatare, de subiectivismul inerent în exploatare al operatorilor umani, constituie un factor important ce trebuie avut în vedere la alegerea echipamentelor de calcul pentru supravegherea și conducerea automată a proceselor.

Complexitatea ridicată a procesului, caracterizată prin numărul mare al parametrilor ce trebuie controlați și supravegheați, precum și prin gradul puternic de interinfluență între acești parametri, impun luarea în considerație a soluțiilor de conducere cu calculatorul a unor asemenea procese. În cazul în care pentru procese complexe se impune realizarea unor strategii de conducere evoluate, optimale, adaptive, care implică atît identificarea continuă cu înaltă precizie a procesului cît și conducerea propriu-zisă a acestuia, soluția de conducere cu calculator trebuie luată în considerare, iar gradul de complexitate a echipamentelor de calcul este determinat de acești factori.

Limitările inerente ale structurilor convenționale de regulatoare automate utilizate pentru reglarea unor procese complexe, variante în timp și cu timp mort, în contextul realizării unor performanțe superioare, determină tot mai mult extinderea aplicațiilor calculatoarelor de proces.

13.2. STRUCTURA GENERALĂ A CALCULATOARELOR DE PROCES

Configurația generală a unui calculator de proces, reprezentată în figura 13.1, presupune existența a trei mari subsisteme: unitatea de memorie, unitatea de comandă și unitatea aritmetică-logică. Unitatea de memorie este alcătuită din memoria M, registrul tampon R și registrul de adrese C. Unitatea de comandă este alcătuită din registrul de comandă F și decodificatorul asociat, contorul programului și rețeaua de comandă. Unitatea aritmetică-logică este formată din acumulatorul A, registrul tampon R și sumatorul paralel de 24 biți.

Comunicarea calculatorului cu procesul se realizează prin intermediul dispozitivelor intrare-ieșire cum sînt: perifericele generale (mașini de scris, cititoare de cartele, unități de bandă perforată, unități de bandă magnetică, unități de discuri, casete magnetice, imprimante, dispozitive de afișare cu tub catodic) sistemul de interfață și consola operatorului de proces.

În memorie informațiile sînt conținute sub formă de instrucțiuni și date în blocuri compacte. Calculatorul execută adresele una după alta. În cadrul unui ciclu de comandă se execută o instrucțiune a programului memorat. Pe durata unui ciclu de comandă are loc o secvență de extragere urmată de o secvență de execuție a unei instrucțiuni.

Scanned with OKEN Scanner

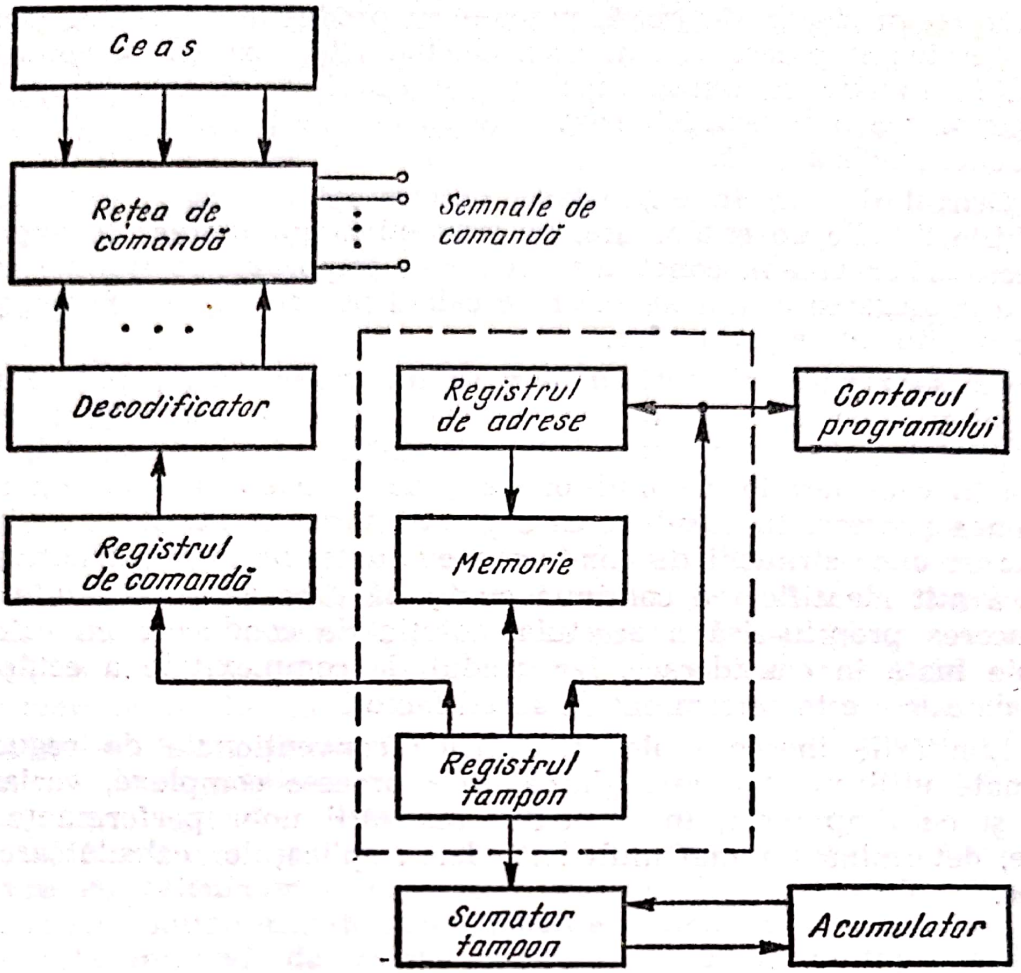


Fig. 13.1. Configurația generală a unui calculator de proces.

Secvența de extragere primește instrucțiunea din memorie, separă codul operației, transferă adresa operandului în registrul de adrese și formează adresa următoarei instrucțiuni. Există o singură secvență de extragere și nouă secvențe de execuție.

Calculatoarele de proces utilizează memorii cu adresare aleatoare. Datele și adresele circulă pe magistrale corespunzătoare, organizate ca în figura 13.2. Pe magistrala de date circulă pe ambele sensuri date, între unitatea centrală și registrul tampon al memoriei. Inițierea unei înscrieri sau a unei citiri din memorie se realizează cu ajutorul blocului de comandă. Viteza de operare a memoriei este caracterizată prin durata ciclului memoriei și timpul de acces, respectiv durata ciclului citire-înscriere, și durata citirii. O altă caracteristică importantă a memoriei o constituie dimensiunile datelor transferate într-un ciclu al memoriei.

Cuplarea calculatorului la proces și comunicarea acestuia cu procesul se realizează prin intermediul sistemului de interfață. Acest sistem este alcătuit din două subsisteme: subsistemul intrărilor analogice și numerice și subsistemul ieșirilor analogice și numerice.

Intrările analogice sînt semnale analogice obținute la ieșirea traductoarelor montate pe proces, iar ieșirile analogice reprezintă semnale de comandă analogice pentru procesul condus. Intrările numerice sînt

Scanned with OKEN Scanner

cu un singur bit în cazul în care reprezintă starea unor elemente (pornit, oprit, avarie etc.) sau cu mai mulţi biţi în cazul în care reprezintă informaţia de la traductoare numerice. În mod similar, ieşirile numerice pot fi cu un bit sau cu mai mulţi biţi.

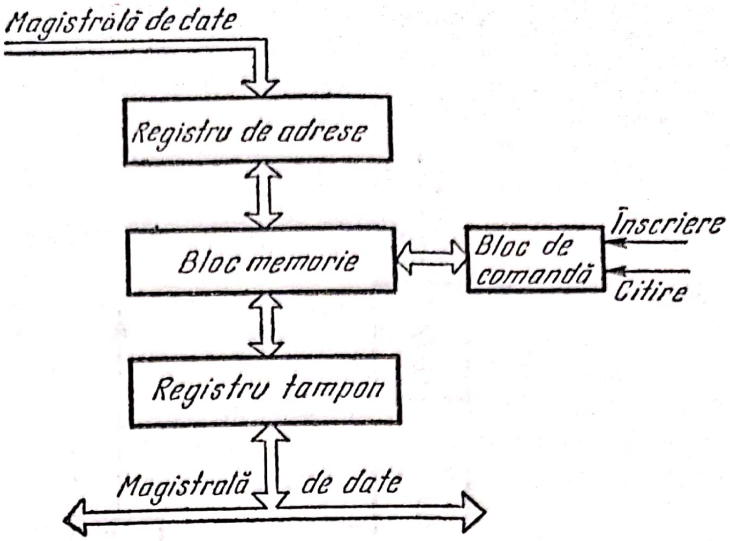


Fig. 13.2. Organizarea transferului de date în cadrul unui calculator de proces.

În funcţie de structura sistemului de conducere, de configuraţia acestuia şi de funcţiile ce se impun a fi realizate, complexitatea sistemului de interfaţă şi a calculatorului propriu-zis (memorie, unitate aritmetică, unitate de comandă) este mai mare sau mai redusă.

În funcţie de complexitatea procesului, de cerinţele de performanţă pentru conducere, pot fi utilizate calculatoare de proces de tipul minicalculatoare sau microcalculatoare.

Obţinerea şi transmiterea informaţiei analogice la calculatorul de proces se utilizează prin intermediul subsistemului intrărilor analogice. În structura unui asemenea subsistem sînt incluse următoarele echipamente: echipamente de joncţiune de tratare primară a semnalelor analogice *Tp*, multiplexor, amplificator, dispozitiv de eşantionare-reţinere *DER*, convertor analog-numeric *CAN*, registru tampon al mărimii convertite *RETMC* şi un bloc de comandă.

Prin multiplexare se asigură selectarea punctului de măsură dorit din multitudinea de puncte de măsură conectate la subsistemul intrărilor analogice. Utilizarea multiplexorului face posibilă folosirea unui singur convertor analog-numeric pentru conversia tuturor mărimilor analogice. Aducerea semnalelor analogice la nivelul necesar pentru conversie se realizează prin intermediul amplificatorului.

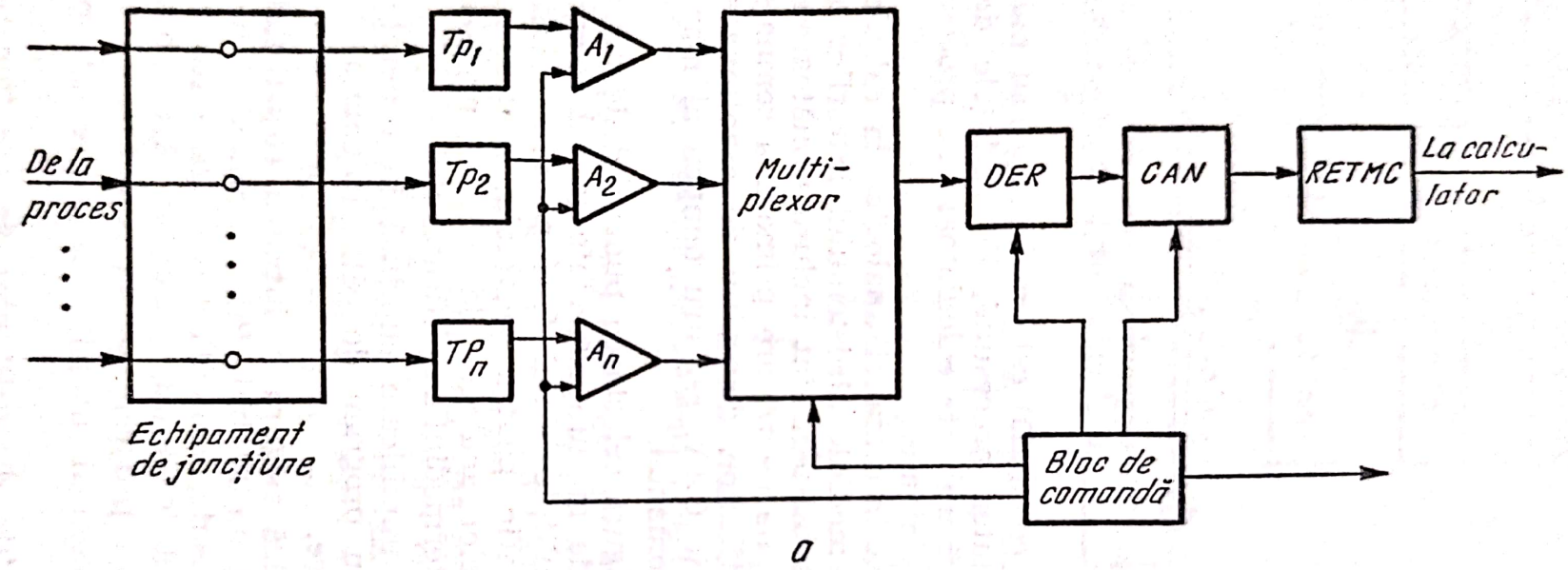
Valoarea factorului de amplificare cuprinsă în general în gama 10 ... 1 000 este selectată prin program de către calculator în funcţie de nivelul semnalului de intrare.

Conversia analog-numerică asigură la intrarea registrului tampon semnale numerice, în general de 12 biţi. Prin intermediul blocului de comandă se generează semnale de comandă care asigură realizarea secvenţelor impuse în cadrul subsistemului intrărilor. Acest bloc de comandă primeşte comanda prin program de la calculator.

O configuraţie de subsistem al intrărilor analogice este prezentată în figura 13.3, *a*.

În alte configuraţii poziţia dispozitivului de eşantionare-reţinere *DER* este înaintea multiplexorului *MX* iar amplificatorul este situat după multiplexor, sau atît *DER* cît şi amplificatorul comandat sînt situate după multiplexor.

Scanned with OKEN Scanner



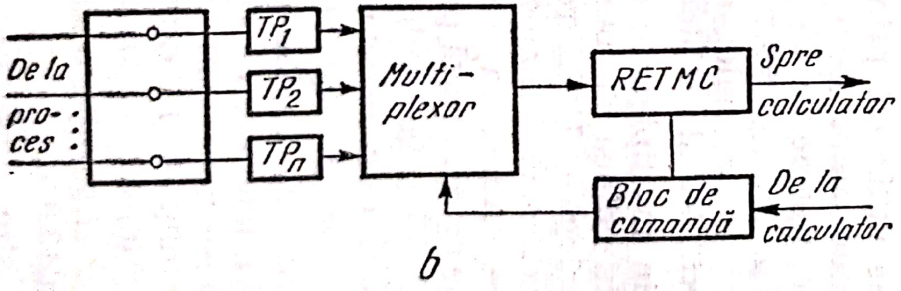


Fig. 13.3. Configurații pentru subsistemul intrărilor:
a — pentru intrări analogice; *b* — pentru intrări numerice.

Scanned with OKEN Scanner

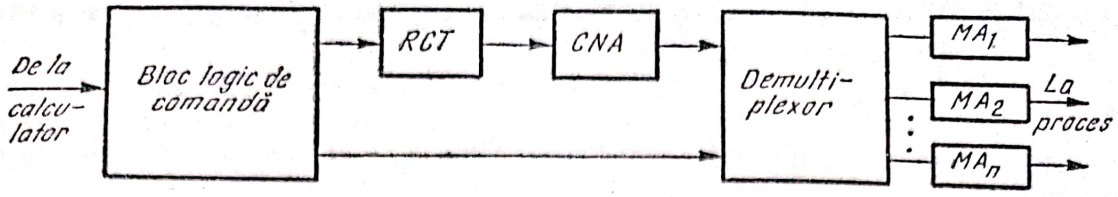


Fig. 13.4. Configurația subsistemului ieșirilor.

Pentru sistemul intrărilor numerice poate fi utilizată o structură ca cea prezentată în figura 13.3, *b*. În această structură informația numerică obținută de la echipamentul de joncțiune suferă o prelucrare primară, astfel încît să se asigure compatibilitatea semnalelor numerice cu intrarea multiplexorului și sînt memorate în registrul tampon *RTVM*. Comanda multiplexorului și a registrului tampon se realizează prin intermediul blocului logic de comandă.

Subsistemul ieșirilor analogice și numerice are o configurație similară cu subsistemul intrărilor (fig. 13.4).

În structura subsistemului ieșirilor, convertorul numeric analogic primește la intrare mărimea conținută în registrul de comenzi transmise *RCT* de la calculator și o convertește în semnal analogic. Demultiplexorul *DMX* conectează ieșirea convertorului *CNA* la canalul specificat de blocul logic de comandă și transmite ieșirile analogice la memoriile analogice MA_1, MA_2 etc.

În cazul în care registrul comenzilor transmise și convertorul *CNA* se plasează după demultiplexor, prețul de cost al acestei structuri este mai ridicat întrucît pentru fiecare mărime analogică obținută se folosește un registru și un convertor însă demultiplixarea se realizează numeric și prezintă avantaje în comparație cu demultiplexarea și memorarea analogică.

Un element esențial al structurii unui sistem de conducere a unui proces prin calculator este consola operatorului de proces. Aceasta asigură interfața om-proces condus, comunicarea completă, rapidă și sigură a personalului de exploatare cu procesul condus.

Consola operatorului de proces permite atît informarea operatorului asupra stării procesului prin afișarea informațiilor cît și intervenția operatorului prin comenzi corespunzătoare asupra procesului.

Structura generală a unui calculator de proces este astfel alcătuită din unitatea centrală (memorie, unitate aritmetică, bloc de comandă) și sistemul de interfață, alcătuit din subsistemul intrărilor și ieșirilor precum și consola operatorului de proces. Alegerea structurii unui proces de conducere se face în concordanță cu complexitatea procesului și cu funcțiile impuse sistemului de conducere.

13.3. FUNCȚIILE CALCULATOARELOR DE PROCES

În funcție de tipul procesului, de gradul de cunoaștere a modelului său matematic, de natura perturbațiilor ce acționează asupra procesului, de criteriile de performanță urmărite, de gradul de complexitate al procesului, se alege structura sistemului de conducere cu cele

Scanned with OKEN Scanner

patru grupe principale de elemente (echipamente, programe pentru calculator, procedeuri de operare și operatori umani).

Din punct de vedere informațional, procesele în flux continuu (procese chimice, metalurgice etc.) și procesele discontinue (prelucrări mecanice, asamblare-montare etc.) prezintă caracteristici diferite. Astfel, procesele în flux continuu prezintă următoarele caracteristici:

— parametrii tehnologici au în general variații continue în timp;

— informațiile din proces pot fi culese direct cu mijloace automatizate (traductoare de măsură);

— optimizarea desfășurării procesului tehnologic necesită cunoașterea modelului matematic al procesului, identificarea acestuia;

— sortimentul produs de o instalație tehnologică este bine determinat;

— acțiunea asupra procesului în vederea asigurării funcționării optime se poate realiza prin mijloace automate.

Procesele discontinue au următoarele caracteristici:

— informațiile trebuie culese de la locurile de muncă;

— conducerea procesului tehnologic propriu-zis, respectiv a utilajelor tehnologice, și conducerea procesului de producție sînt distincte una față de cealaltă; în timp ce conducerea utilajelor ridică probleme legate de automatizarea operațiilor, coordonarea fluxului de producție ridică probleme de optimizare a programării producției, încărcării optime a locurilor de muncă etc.;

— acțiunea asupra fluxului de producție în scopul optimizării desfășurării sale necesită și intervenția operatorului uman.

Ținînd seama de aceste caracteristici și de indicatorii tehnico-economici ce trebuie realizați prin utilizarea calculatorului, în automatizarea complexă a proceselor tehnologice pot fi utilizate diferite configurații de sisteme de conducere cu calculator ce realizează diverse funcții.

Calculator „consultant" pentru conducerea procesului tehnologic. În această configurație reprezentată în figura 13.5 calculatorul nu este cuplat direct la proces, ci prin intermediul operatorului care, în anumite situații, se „consultă" cu calculatorul în vederea asigurării funcționării procesului la parametrii impuși. Operatorul, pe baza unor informații privind evoluția procesului, introduse în calculator, primește rezultatele unor calcule sau simulări ale acestuia, care-i permit a interveni asupra procesului direct sau asupra referinței din buclele de reglare ale diverșilor parametri. Această configurație de sistem de conducere cu calculator are o gamă limitată de utilizare, acolo unde perturbațiile sînt relativ mari însă au frecvență redusă.

În această configurație calculatorul este utilizat pentru efectuarea unor calcule tehnico-economice, prin efectuarea unor operații de simulare a procesului sau a unor părți ale procesului, generînd informații utile pentru operator. Pe baza acestor informații, operatorul intervine asupra referințelor regulatoarelor sau asupra procesului cu comenzi corespunzătoare unei bune funcționări. O asemenea configurație de sistem de conducere este tot mai rar întîlnită.

Calculator pentru control centralizat. Este destinat culegerii datelor din proces și supravegherea desfășurării procesului tehnologic (fig. 13.6).

Scanned with OKEN Scanner

Calculatorul măsoară și înregistrează periodic, automat, parametrii tehnologici cu ajutorul unor traductoare cuplate direct la calculator; compară valorile măsurate cu valorile limită și semnalează abaterile generînd în unele cazuri comenzi simple spre elementele de execuție *EE* corespunzătoare pentru readucerea parametrilor între limite; urmărește funcționarea corectă a utilajelor și alarmează în caz de tendințe de

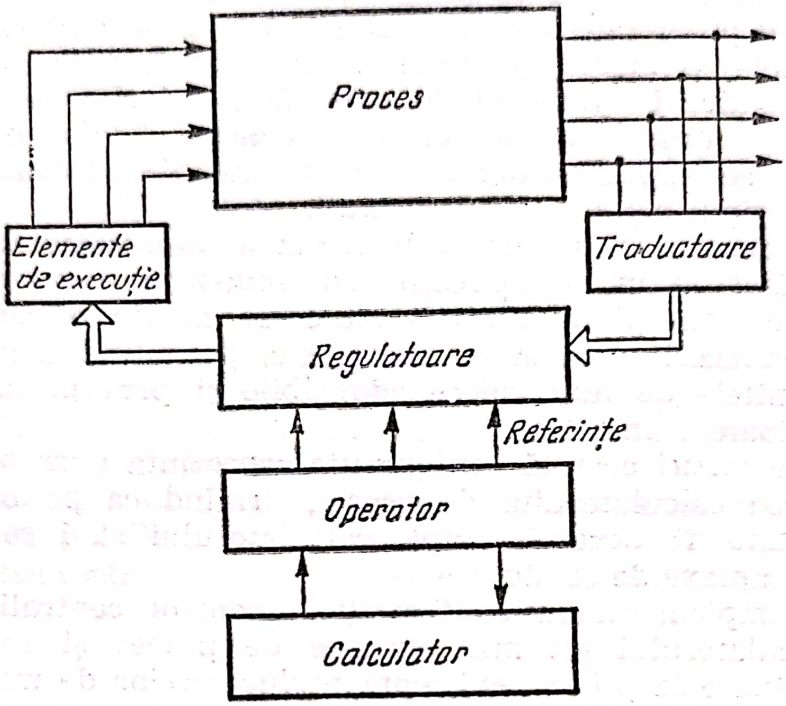


Fig. 13.5. Schema de conducere cu calculatorul în regim de „consultant".

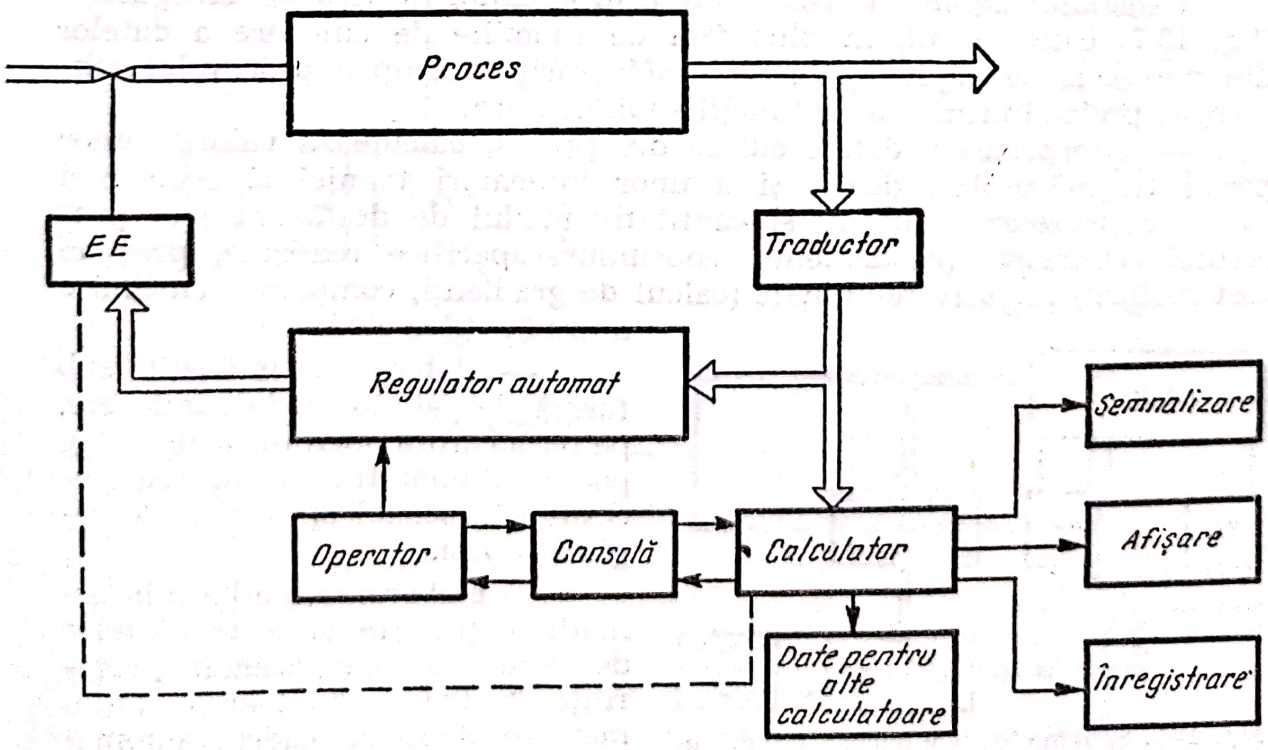


Fig. 13.6. Schema unui sistem de control centralizat cu calculator de proces.

funcționare necorespunzătoare; elaborează periodic bilanțuri de materiale și energie, protocoale asupra funcționării și încărcării utilajelor.

Prin sistemul de interfață descris în subcapitolul 13.2 și în concordanță cu strategia implementată prin program se realizează funcția de colectare de date și se obțin informații asupra variabilelor și stării procesului condus.

Informațiile culese de la proces înainte de a fi utilizate în calcul și afișate sînt prelucrate astfel încît acestea să caracterizeze cît mai fidel variabilele și starea procesului. Astfel este necesară cercetarea erorilor sistematice în procesul de măsurare, liniarizarea caracteristicilor neliniare ale unor traductoare. La colectarea datelor privind evoluția procesului se impune adoptarea unei strategii adecvate, în funcție de numărul și tipul parametrilor măsurați.

Această funcție de control centralizat a unui calculator de proces este simplă însă în multe aplicații (din industria energetică, chimică, metalurgică, construcții de mașini) oferă un mijloc eficient de îmbunătățire a conducerii procesului tehnologic, permițînd menținerea procesului în limitele de funcționare admisibile și prevenirea funcționării necorespunzătoare a utilajelor.

În multe cazuri această configurație reprezintă doar o primă etapă în introducerea calculatorului de proces, urmînd ca pe baza informațiilor acumulate în această etapă calculatorului să i se încredințeze funcții mai complexe de conducere.

Pentru implementarea configurației „control centralizat" se cere prezența calculatorului cît mai aproape de proces și existența unor blocuri de cuplare la proces, existența traductoarelor de măsură a parametrilor tehnologici, cuplarea lor la calculator, automatizarea operațiilor de colectare și prelucrare a datelor.

Calculator „ghid" de conducere a procesului. În această configurație (fig. 13.7) calculatorul, în plus față de funcțiile de culegere a datelor din proces și de supraveghere a desfășurării în timp a procesului tehnologic, preia și următoarele funcții suplimentare:

— interpretează datele culese din proces, calculează valorile unor parametri măsurabili direct și a unor indicatori tehnici și economici care caracterizează calitativ și cantitativ modul de desfășurare al procesului tehnologic (randamente, consumuri specifice realizate, preț de cost realizat) inclusiv tendințele (calcul de gradienți, comparare cu limite a gradienților etc.);

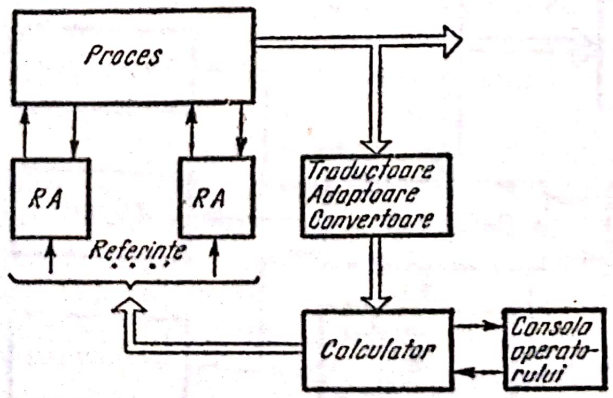


Fig. 13.7. Schema de conducere cu calculator în regim de supervizare.

— elaborează indicații sub formă de „ghiduri" de conducere, pe baza cărora operatorul tehnolog poate îmbunătăți desfășurarea procesului în sensul apropierii de regimul optim;

— elaborează, pe baza informațiilor primite și a tendințelor de variație a unor parametri, referințe pentru regulatoarele automate existente în cadrul automatizării convenționale.

Scanned with OKEN Scanner

Acest mod de utilizare a calculatorului de proces este de complexitate medie și eficient în multe aplicații industriale, în special pentru procese supuse unor perturbații de frecvență mare.

Conducerea numerică directă a proceselor (CND). Calculatorul în acest caz acționează direct asupra procesului tehnologic, fără intervenția operatorului tehnolog, fiind cuplat direct sau indirect cu elemente de execuție ce acționează asupra procesului. Cu o asemenea configurație se poate realiza reglarea normală cu reacție și cu predicție, optimizarea statică și dinamică a procesului, comanda secvențială (porniri-opriri) etc.

Algoritmii de reglare în cadrul unei asemenea configurații pot fi de complexitate ridicată, asigurîndu-se realizarea unor criterii de performanță la valoarea optimă, productivitate maximă, consum minim de materiale sau energie, preț de cost minim etc.

Această configurație conduce la eficacitatea maximă a utilizării calculatorului datorită funcției de optimizare a procesului tehnologic, însă implementarea unei asemenea structuri (fig. 13.8) presupune eforturi apreciabile de cercetare a procesului, de identificare cu mare precizie a modelului matematic al procesului tehnologic condus, de stabilire a algoritmului de conducere optimală a acestuia, de a asigura o funcționare cu o înaltă fiabilitate.

În figura 13.8 se prezintă structura unui sistem de conducere numerică directă (CND) a unui proces tehnologic, evidențiindu-se grupurile de echipamente necesare implementării unui asemenea sistem.

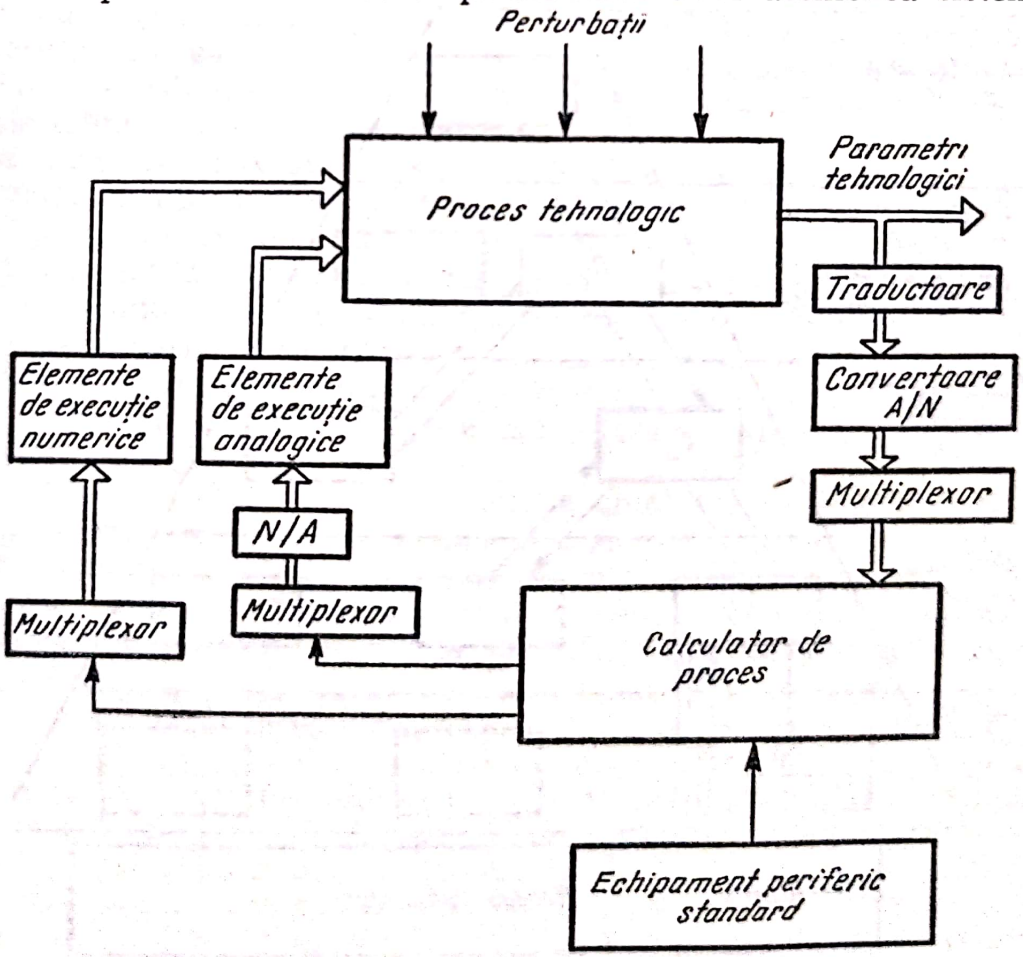


Fig. 13.8. Schema de conducere numerică directă a unui proces.

Scanned with OKEN Scanner

Mărimile caracteristice ale procesului sînt măsurate cu ajutorul traductoarelor şi convertite în semnale numerice compatibile cu intrarea în calculator. Introducerea semnalelor în calculator precum şi transmiterea semnalelor spre elementele de execuţie se realizează prin intermediul sistemului de interfaţă. Pe baza datelor obţinute în mod nemijlocit de la punctele de măsură, calculatorul în această configuraţie ia decizii implementate de asemenea nemijlocit, fără intervenţia operatorului uman. Calculatorul poate interveni asupra referinţei regulatoarelor deja existente („conducere în regim de supraveghere") sau poate acţiona direct asupra elementelor de execuţie. În cazul conducerii directe, regulatoarele convenţionale sînt înlocuite prin module software, iar funcţiile lor sînt exercitate prin rularea unor programe sau subprograme (reprezentînd codificarea algoritmului de conducere adoptat). Calculatorul transmite semnale numerice direct la elementele de execuţie de tip pas cu pas sau alte elemente de execuţie a căror intrare este numerică.

Conducerea ierarhizată a proceselor tehnologice. Una dintre structurile de conducere numerică dezvoltată şi implementată tot mai mult o constituie *structura ierarhizată*. În figura 13.9 se reprezintă principiul

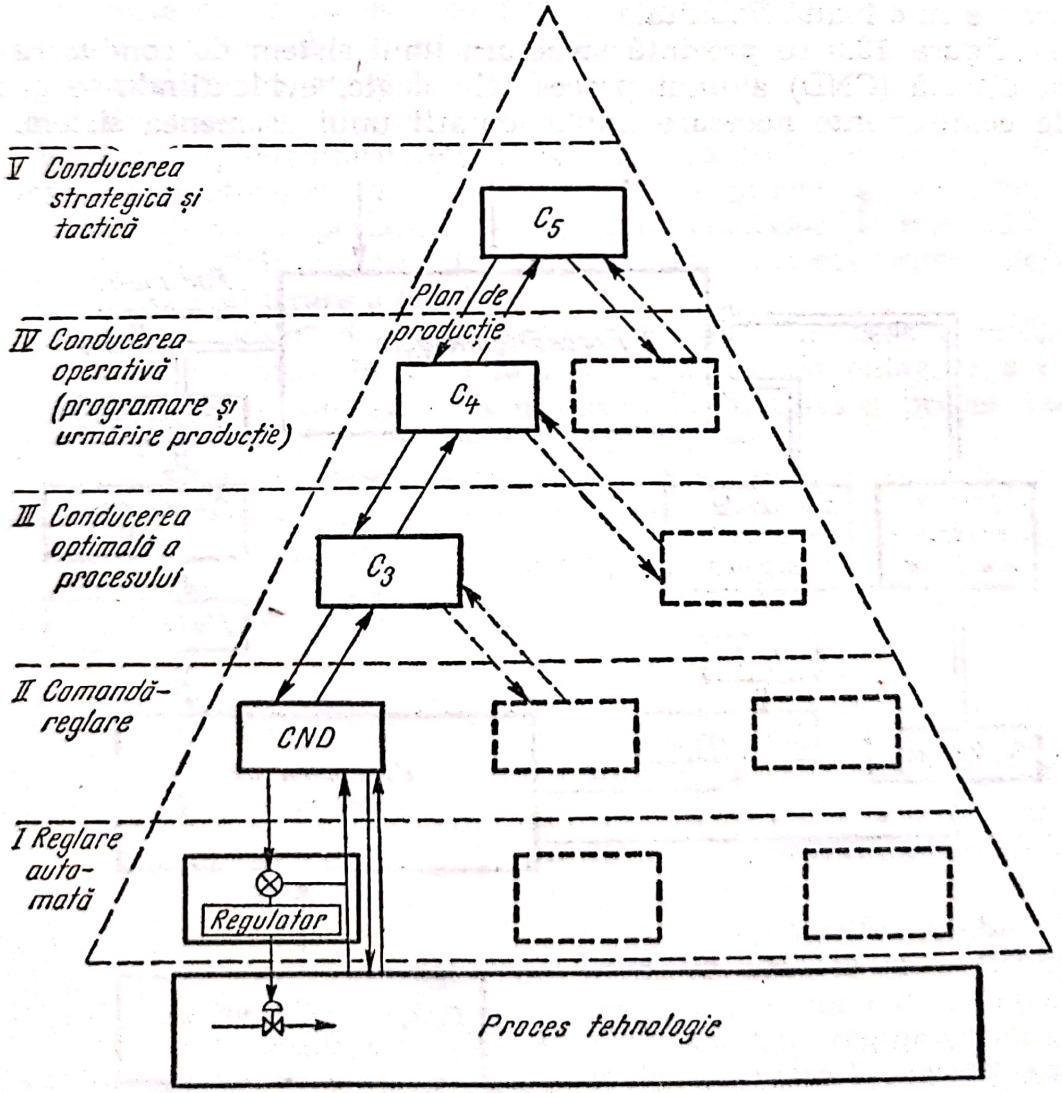


Fig. 13.9. Schema generală de conducere ierarhizată a proceselor.

Scanned with OKEN Scanner

conducerii ierarhizate a proceselor de producţie, inclusiv nivelul de conducere al proceselor tehnologice. Procesul este condus automat atît de regulatoarele numerice (nivelul *I*) cît şi de un calculator de conducere numerică directă (nivelul *II*), legat şi de regulatoarele numerice ale nivelului *I*. În acest mod regulatoarele numerice reprezintă şi o rezervă pentru calculatorul CND, asigurînd funcţionarea automată a procesului în cazul defectării calculatorului. Conducerea numerică directă realizată în cadrul nivelului al doilea asigură fie modificarea referinţelor regulatoarelor convenţionale, fie comanda directă a elementelor de execuţie ce acţionează asupra procesului.

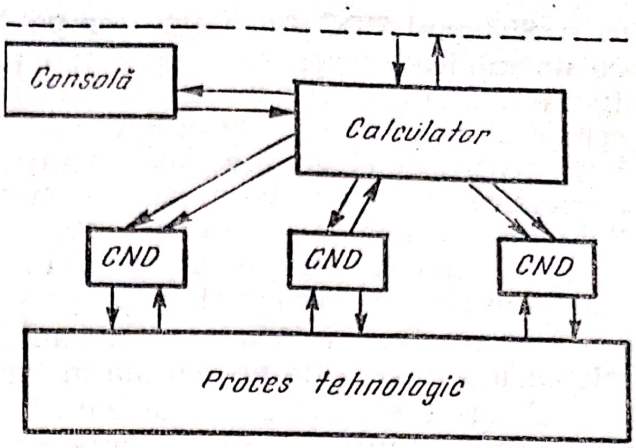


Fig. 13.10. Schemă de conducere numerică distribuită.

Calculatorul de la nivelul *III* este destinat asigurării conducerii optimale a procesului, coordonînd nivelul al doilea pentru mai multe grupe de parametri ai procesului. Aceste trei nivele asigură conducerea procesului tehnologic în timp ce nivelele superioare *IV* şi *V* asigură conducerea procesului de producţie. În cadrul nivelului *IV* se face o conducere operativă prin programare şi urmărirea producţiei, iar la ultimul nivel se asigură coordonarea generală a producţiei incluzînd atît aspectele tehnice cît şi cele economice.

În ceea ce priveşte conducerea procesului propriu-zis, (primele trei nivele) se remarcă dezvoltarea unor structuri de conducere distribuită (fig. 13.10). Astfel, funcţiile de conducere ale procesului tehnologic sînt distribuite între mai multe calculatoare de capacitate mică, fiecăruia revenindu-i sarcini locale relativ specializate. Astfel, pentru grupuri de parametri ai procesului se alege un microcalculator sau minicalculator asigurîndu-se conducerea procesului prin descompunerea acestuia în subsisteme. Pentru fiecare subsistem se utilizează o conducere numerică directă (CND).

O asemenea structură distribuită asigură un grad ridicat de siguranţă în funcţionare şi o bună eficienţă. Această structură s-a dezvoltat datorită avantajelor oferite de apariţia minicalculatoarelor şi microcalculatoarelor, care pot prelua funcţia de conducere a unui număr de parametri rezolvînd inclusiv problema identificării procesului tehnologic.

Un exemplu de sistem de conducere distribuit cu performanţe bune utilizat pentru conducerea proceselor lente este sistemul TDC 2 000 realizat de firma Honeywell. Utilizînd un microcalculator pentru un grup de opt parametri pot fi conduse procese tehnologice avînd un număr de peste 1 000 de parametrii. Algoritmii de reglare utilizaţi sînt convenţionali însă se pot realiza prin programe şi alţi algoritmi de reglare. Sistemul permite afişarea la cerere a valorilor parametrilor controlaţi, a referinţelor pentru fiecare buclă de reglare, precum şi evoluţia în timp a mărimilor controlate.

Scanned with OKEN Scanner

Sistemul TDC 2 000 este compatibil cu un calculator de proces sau cu un minicalculator care poate îndeplini funcția de supervizare sau de fixare a referințelor pentru fiecare buclă de reglare și funcția de conducere numerică dorită. De asemenea, calculatorul de proces poate fi utilizat pentru colectare de date, pentru efectuarea unor calcule tehnico-economice, pentru elaborarea unor comenzi corespunzătoare la depășirea limitelor normale de funcționare etc.

O asemenea structură prezintă o foarte bună fiabilitate în funcționare, o ușoară întreținere și un preț de cost redus.

Schema generală a unui sistem de conducere în care sînt utilizate microcalculatoare este prezentată în figura 13.11.

Această structură, organizată pe trei nivele, asigură conducerea unui sistem multivariabil decompozabil în subsisteme ce conțin un număr redus de parametri. Nivelul întîi asigură transferul de informație de la proces la sistemele de conducere. Microcalculatoarele de la cel de-al doilea nivel asigură reglarea parametrilor pentru fiecare subsistem, asigură optimizarea staționară, supraveghează starea normală de funcționare a fiecărui sistem. Nivelul al treilea, alcătuit dintr-un calculator de proces sau minicalculator, permite coordonarea funcționării microcalcu-

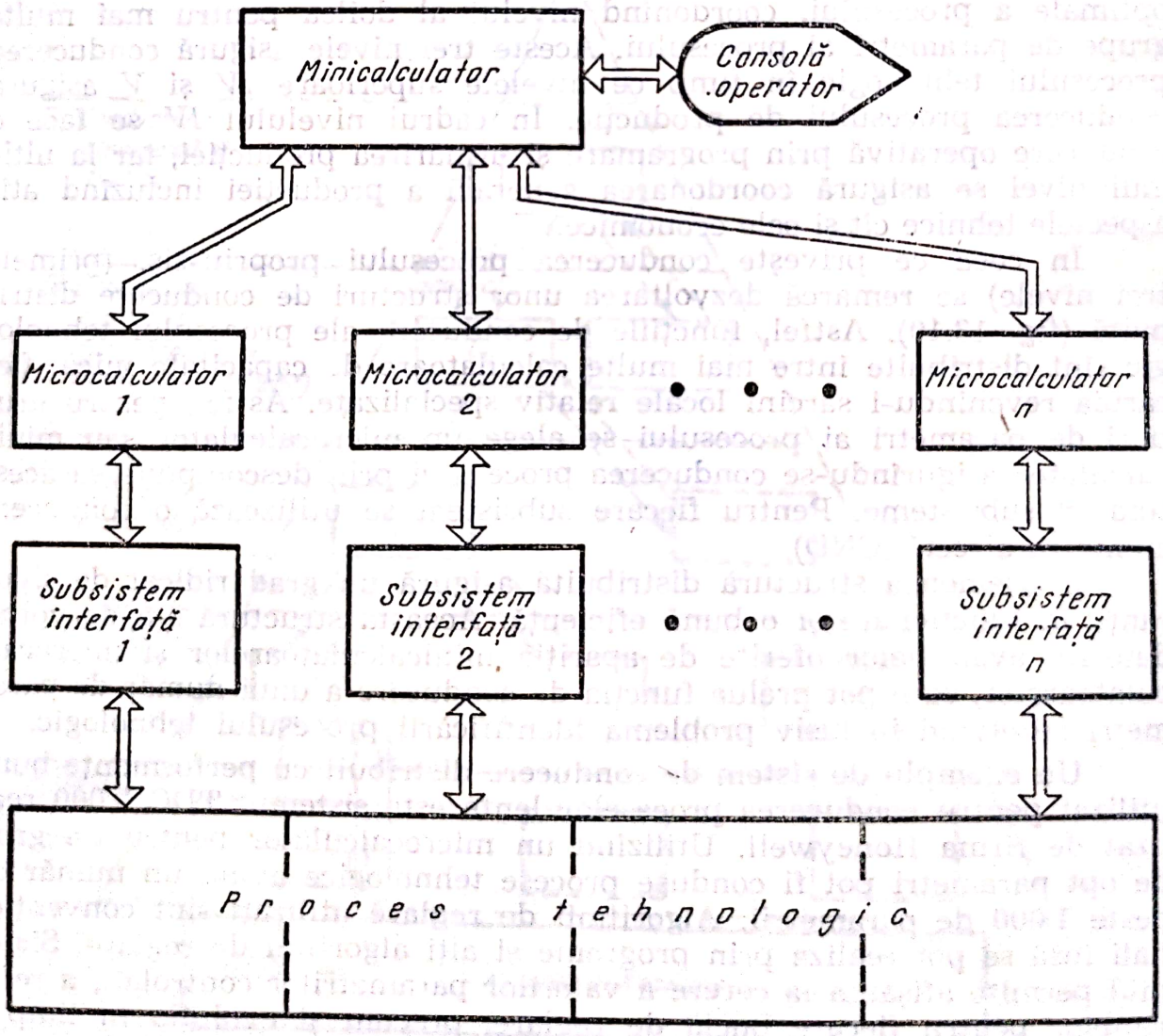


Fig. 13.11. Schema generală de conducere a unui proces cu microcalculatoare.

Scanned with OKEN Scanner

latoarelor pentru întregul sistem cu asigurarea unui indice global de performanță, efectuează identificarea procesului, liniarizarea caracteristicilor neliniare ale traductoarelor și elementelor de execuție.

În cazul conducerii proceselor tehnologice cu caracter discontinuu, spre deosebire de cele continue, calculatorului îi revin două sarcini distincte:

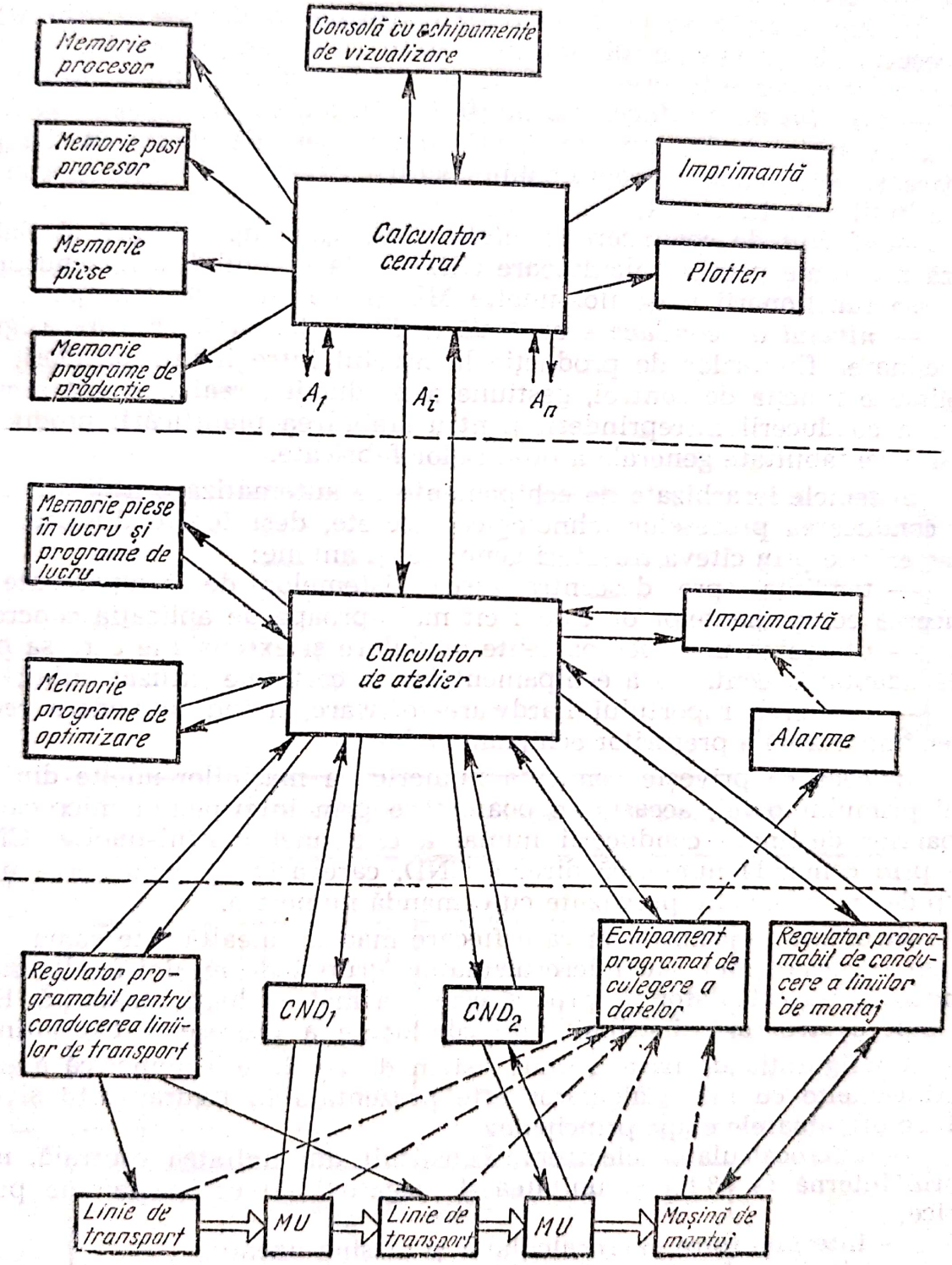


Fig. 13.12. Schema de conducere ierarhizată a unui proces de producție discretă.

— pe de o parte coordonarea fluxurilor de producție în vederea minimizării timpilor neproductivi, iar pe de altă parte conducerea propriu-zisă a diverselor echipamente de producție automatizate, cum sînt: mașinile-unelte, liniile de montaj, liniile de transport și magaziile.

Rezolvarea completă a acestor două sarcini asigură *conducerea fabricației asistată de calculator* (CAM — Computer Aided Manufacturing), care este specifică proceselor de producție discrete.

În figura 13.12 se prezintă o structură de conducere ierarhizată a procesului de producție discontinuu dintr-o întreprindere industrială. Această structură este organizată pe trei nivele, după cum urmează:

— *nivelul de conducere al mașinilor*, în alcătuirea căruia sînt folosite atît calculatoarele numerice CND pentru mașinile-unelte cît și regulatoare și echipamente programabile pentru culegere de date și conducerea liniilor de transport;

— *nivelul de conducere al atelierului*, care supervizează și elaborează programe pentru calculatoare CND de la nivelul *I*, asigurînd optimizarea funcționării mașinilor-unelte MU și a liniilor de transport;

— *nivelul de conducere centrală a diverselor ateliere*, care asigură coordonarea fluxurilor de producție la nivelul întregii întreprinderi. Îndeplinește funcția de control, gestiune a producției, realizînd atît o asistență a conducerii întreprinderii pentru stabilirea planificării producției cît și o contabilitate generală a produselor fabricate.

Sistemele ierarhizate de echipamente de automatizare utilizate pentru conducerea proceselor tehnologice discrete, deși foarte diferite, sînt caracterizate prin cîteva trăsături generale, și anume:

— tendința spre descentralizarea sistemelor de echipamente și aducerea echipamentelor de calcul cît mai aproape de aplicația concretă;

— utilizarea unor echipamente modulare și extensibile care să permită adaptarea continuă a echipamentelor la cerințele utilizatorului;

— creșterea raportului hardware-software, avînd în vedere reducerea importantă a prețurilor echipamentelor.

În ceea ce privește comanda numerică a mașinilor-unelte din cadrul primului nivel, aceasta se poate face prin intermediul microcalculatoarelor destinate conducerii numai a cîte unei mașini-unelte (CNC) sau prin comanda numerică directă CND, care asigură conducerea unui grup de mașini-unelte prevăzute cu comandă numerică.

Structura ierarhizată în care fiecare mașină-unealtă este comandată de un minicalculator sau microcalculator, grupul de mașini-unelte fiind condus de un calculator de proces, este cea mai evoluată structură. Este de fapt o structură distribuită de conducere a proceselor discontinue.

Configurația de bază a unui sistem de conducere numerică a unei mașini-unelte cu microcalculator este prezentată în figura 13.13 și cuprinde următoarele etape principale:

— microcalculator electronic constituit din unitatea centrală, memorie internă (4—8 K) și unitatea de legătură cu echipamentele periferice;

— interfață între microcalculator și mașina-unealtă;

— cititor pe bandă perforată;

— panoul de comandă pentru operator.

Scanned with OKEN Scanner

Aceste echipamente (hardware) funcționează sub coordonarea sistemului de programe de bază și aplicative (software) CNC.

Minicalculatorul în acest caz asigură prelucrarea algoritmilor principali ai sistemului de conducere numerică cu calculatorul CNC, și anume: algoritmul de interpolare liniară și circulară, algoritmul pentru regimul de poziționare, algoritmul pentru corecția și poziția sculei, algoritmul pentru redactarea programelor — utilizator și algoritmul pentru comanda organelor de execuție ale mașinii-unelte.

Sistemul de programe care asigură prelucrarea acestor algoritmi reprezintă sistemul programelor de bază (software de bază), iar structura acestui sistem folosit în CNC trebuie să permită folosirea completă a flexibilității minicalculatoarelor pentru orice tip de mașină-unealtă.

Flexibilitatea deosebită și potențialitatea ridicată a sistemului CNC, corelat cu dezvoltarea rapidă a microcalculatoarelor și minicalculatoarelor, face posibilă utilizarea pe scară largă a unor asemenea structuri de conducere a mașinilor-unelte cu performanțe deosebite.

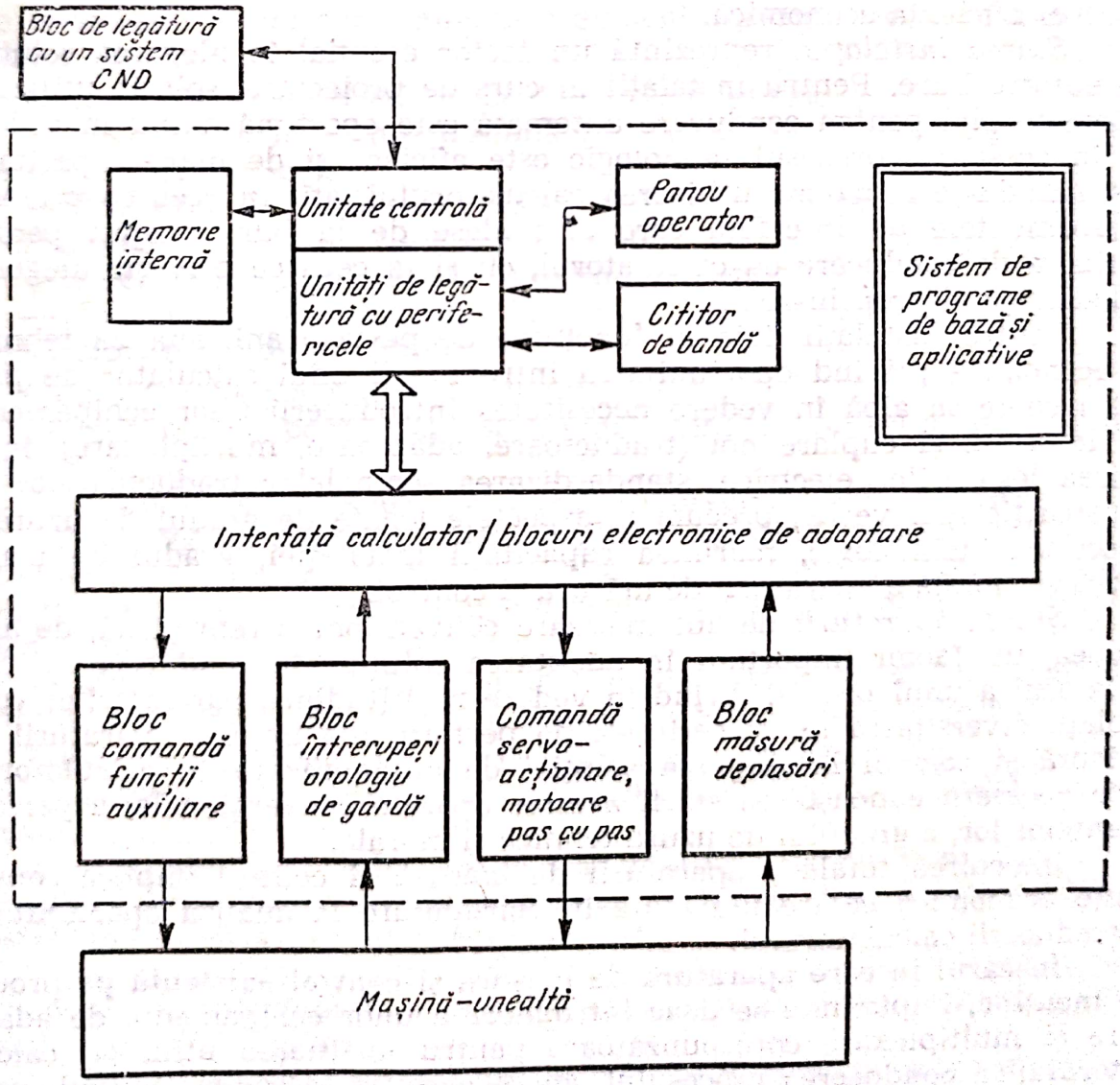


Fig. 13.13. Configurația de bază a unui sistem de conducere a unei mașini-unelte.

Scanned with OKEN Scanner

13.4. CONSIDERAȚII PRIVIND ALEGEREA SISTEMELOR DE CONDUCERE CU CALCULATORUL A PROCESELOR TEHNOLOGICE

Utilizarea unui calculator în automatizarea complexă a proceselor tehnologice impune în primul rînd a stabili oportunitatea unei asemenea soluții, luînd în considerare atît aspectele tehnice cît și cele economice. Prețul de cost ridicat al calculatoarelor de proces precum și al echipamentelor de interfață și de cuplare al acestora la proces determină o limitare a utilizării acestora numai pentru procese complexe, unde cerințele de performanță sînt mari și unde automatizarea convențională este costisitoare și nu permite realizarea unor performanțe ridicate.

Cei mai importanți factori ce trebuie analizați pentru a stabili oportunitatea introducerii unui calculator în automatizarea proceselor tehnice sînt:

a) starea instalației;
b) starea aparaturii convenționale;
c) gradul de complexitate al procesului;
d) cerințele de performanță, criteriile de optimizare;
e) eficiența economică.

Starea instalației reprezintă un factor esențial în alegerea soluției de automatizare. Pentru instalații în curs de proiectare, soluția utilizării calculatorului pentru conducere automată este oportună avînd în vedere că în acest caz procesul tehnologic este eficient și de mare capacitate, justificîndu-se economic utilizarea calculatorului, atît în ceea ce privește echipamentele de interfață care sînt alese de la bun început pentru varianta de conducere cu calculatorul, cît și în ceea ce privește alegerea calculatorului propriu-zis.

Pentru instalații deja în funcțiune de peste 5 ani, analiza tehnică și economică privind oportunitatea introducerii unui calculator de proces trebuie să aibă în vedere necesitatea introducerii unor echipamente de interfață și cuplare noi (traductoare, adaptoare, multiplexare), înlocuirea legăturilor electrice, standardizarea semnalelor traductoarelor de construcție mai veche, precum și aspectele legate de gradul de uzură a procesului tehnologic, mărimea capacității instalației, gradul de uzură fizică și morală a aparaturii de măsură și control.

Starea aparaturii de automatizare convențională reprezintă, de asemenea, un factor important în adoptarea soluției de conducere cu calculatorul a unui proces. Avînd în vedere multitudinea parametrilor controlați, diversitatea lor și cerințele de performanță impuse aparaturii de măsură și control la alegerea soluției de automatizare cu calculatorul, este necesară cunoașterea stării acestor aparate convenționale, a performanțelor lor, a gradului de uzură tehnică și morală.

Înlocuirea totală a aparaturii de măsură și control implică consecințe economice ce trebuie luate în considerare la analiza oportunității introducerii calculatorului.

În cazul în care aparatura de măsură și control existentă pe proces se menține, impunîndu-se doar introducerea unor echipamente de adaptare și multiplexare corespunzătoare pentru facilitarea utilizării calculatorului în conducerea procesului, apare necesitatea compatibilității performanțelor acestei aparaturi convenționale cu tehnica de calcul numeric.

Scanned with OKEN Scanner

Apare astfel și în aceste condiții necesitatea unui studiu de oportunitate tehnico-economică privind introducerea calculatorului pentru conducerea procesului.

Gradul de complexitate al procesului reprezintă un factor determinant în oportunitatea și în special alegerea tipului (respectiv a caracteristicilor) echipamentului de calcul. Complexitatea procesului poate fi exprimată cantitativ prin următoarele date esențiale:

a) numărul parametrilor ce trebuie supravegheați;

b) numărul buclelor de reglare;

c) gradul de cunoaștere a modelului matematic și viteza de variație a parametrilor;

d) numărul și frecvența posibilă a alarmelor din proces;

e) numărul și conținutul protocoalelor și mesajelor ce trebuie editate.

Aceste elemente caracteristice ale procesului supus automatizării determină performanțele și tipul echipamentului de calcul și complexitatea funcțiilor atribuite sistemului de conducere cu calculatorul. Adoptarea unei soluții de conducere cu minicalculator sau cu calculator de mare capacitate performant impune a evidenția avantajele și dezavantajele fiecărei soluții.

Minicalculatoarele și *microcalculatoarele* asigură:

— cost redus, investiție posibilă pentru instalații tehnologice mici (centrale termoelectrice);

— proiectul de realizare a sistemului este de complexitate redusă și deci se poate realiza mai ușor și mai rapid;

— se cîștigă experiență pentru extinderea aplicației;

— conectarea calculatorului la proces se face ușor și repede, nu necesită efort mare de programare.

Calculatoarele performante asigură:

— cost scăzut pentru aplicații mari, care ar necesita mai multe microcalculatoare;

— posibilitatea corelării activității în diverse secții, ateliere;

— conducerea după algoritmi evoluați, existînd posibilitatea culegerii unei mari cantități de informație, pe baza căreia se stabilesc algoritmii de conducere optimă; se operează cu fișiere mari, dată fiind capacitatea mare de memorare;

— sistemul de operare este mai cuprinzător, iar disponibilul de memorare principală determină o creștere a vitezei de prelucrare.

Microcalculatoarele sînt caracterizate prin următoarele:

— posedă toate trăsăturile caracteristice proprii calculatoarelor electronice;

— sînt prevăzute să lucreze în principal fără sistem de operare sau, în cazul în care posedă un sistem de operare nesofisticat, acesta este înregistrat în memoria cu conținut permanent;

— în aplicațiile caracteristice, programele utilitare sînt înregistrate permanent sau temporar în memoria internă, al cărei conținut nu poate fi modificat prin program;

— tehnologia de realizare are la bază integrarea pe scară medie și pe scară largă;

Scanned with OKEN Scanner

— echipamentele periferice pot avea un caracter specializat, orientat pe clasa de probleme cerută de utilizator;

— nu necesită climatizare sau condiții speciale;

— simplitate în manipulare, datorită înregistrării programelor de serviciu și aplicații în memorie cu conținut permanent;

— construcție modulară, care permite adaptarea configurației la cerințele utilizatorului, asigurînd o eficiență maximă în privința performanțelor raportate la prețul de cost.

Ținînd seama de aceste caracteristici și performanțe, rezultă evident oportunitatea utilizării microcalculatoarelor pentru conducerea unui număr restrîns de bucle de reglare cu bună eficiență economică sau conducerea unor procese mici ca dimensiuni.

Soluția de conducere distribuită a proceselor este recomandată în condițiile în care microcalculatoarele pot fi utilizate pentru conducerea numerică directă a procesului, un minicalculator fiind plasat la un nivel ierarhic superior asigură coordonarea desfășurării întregului proces.

Utilizarea microcalculatoarelor în conducerea proceselor tehnologice asigură conducerea după algoritmi evoluați, care pot fi utilizați și pentru identificarea procesului, o fiabilitate și flexibilitate ridicată, un preț de cost redus, programare ușoară etc.

Minicalculatoarele pot fi utilizate eficient pentru procese cu grad de complexitate medie, putînd fi ușor programate.

Calculatoarele mari se recomandă a fi utilizate pentru procese mari, unde se impune atît conducerea procesului cît și coordonarea producției, unde criteriile de performanță înglobează atît aspectele tehnice cît și cele economice.

Cerințele de performanță impuse sistemului de conducere constituie un alt factor ce trebuie avut în vedere la alegerea echipamentului de conducere al procesului.

În funcție de tipul procesului, de gradul de cunoaștere a modelului său matematic, de informația apriorică despre proces și de restricțiile funcționale, se stabilesc criteriile de performanță și algoritmii de conducere ai procesului.

Capacitatea de memorare, viteza de transmitere și prelucrare a informației, precum și performanțele echipamentelor de interfață și de cuplare, se aleg în funcție de cerințele de performanță impuse procesului.

Cerințele de performanță ridicate impuse echipamentelor de calcul au consecințe economice, impunîndu-se o analiză atentă tehnico-economică la alegerea acestor echipamente.

Eficiența economică privind introducerea calculatorului în conducerea proceselor reprezintă un factor determinant în adoptarea soluției de automatizare complexă.

Prin introducerea unui sistem de calcul în conducerea unui proces industrial se așteaptă realizarea cel puțin a unuia din următoarele obiective:

— producție suplimentară;

— consumuri specifice reduse;

— reducerea costului de fabricație (energie, apă, aburi etc.);

— creșterea randamentului de utilaje;

— uniformizarea producției din punct de vedere cantitativ;

Scanned with OKEN Scanner

— creşterea calităţii produselor;
— creşterea gradului de siguranţă în exploatare.

La alegerea soluţiei de conducere se va stabili obiectivul determinant ce trebuie realizat, celelalte obiective urmînd să fie realizate în condiţiile impuse de acesta.

De reţinut că justificarea economică este cea care decide în final oportunitatea introducerii unui calculator de proces.

Un factor esenţial ce trebuie avut în vedere la introducerea calculatorului pentru conducerea proceselor tehnologice îl constituie cuplarea acestuia la proces, respectiv echipamentele de interfaţă şi cuplare.

În grupa acestor echipamente notăm traductoarele, adaptoarele de semnal, convertoarele analog-numerice şi numeric-analogice şi multiplexoarele. Performanţele şi siguranţa în funcţionare a acestor echipamente de interfaţă influenţează sensibil performanţele sistemelor de conducere cu calculatorul.

13.5. APLICAŢII ALE MICROCALCULATOARELOR ŞI CALCULATOARELOR DE PROCES PENTRU AUTOMATIZAREA COMPLEXĂ A PROCESELOR

Automatizarea complexă a proceselor industriale presupune rezolvarea tuturor problemelor legate de desfăşurarea procesului tehnologic conform cerinţelor de performanţă impuse. Astfel se impune reglarea unor parametri, urmărirea variaţiei tuturor parametrilor şi semnalizarea depăşirii limitelor, comanda secvenţială a pornirii, elaborarea unor decizii în funcţie de indicii tehnico-economici ce se impun calculaţi, supravegherea funcţionării normale a procesului etc.

În funcţie de complexitatea procesului şi de cerinţele de performanţă impuse, structura sistemului de conducere cu calculatorul are un grad mai mare sau mai redus de complexitate, funcţiile calculatorului de proces fiind determinate de sarcinile impuse de automatizarea complexă a proceselor.

Complexitatea mare a proceselor tehnologice supuse conducerii şi cantitatea mare de informaţie ce trebuie prelucrată de sistemul de conducere cu calculatorul impun tot mai mult structura distribuită de conducere şi structura ierarhizată.

Se poate realiza o structură ierarhizată funcţională acolo unde un calculator coordonează (cu un program S_2) mai multe programe pentru diversele subsisteme S_{1j} ce alcătuiesc procesul condus (fig. 13.14) şi o structură ierarhizată unde pentru fiecare subsistem ce alcătuieşte procesul condus este prevăzut un calculator sau minicalculator MC_i, acestea fiind coordonate de către un calculator coordonator (CC) (fig. 13.15).

Utilizarea structurii distribuite cu microcalculatoare unde capacitatea de prelucrare este distribuită spaţial asigură o viteză ridicată de prelucrare, ca urmare a prelucrării paralel, posibilitatea implementării unor algoritmi de conducere evoluaţi şi o înaltă fiabilitate.

Asigurarea unei înalte fiabilităţi a impus utilizarea unor echipamente redundante conectate între ele prin magistrale de date, unele fiind

Scanned with OKEN Scanner

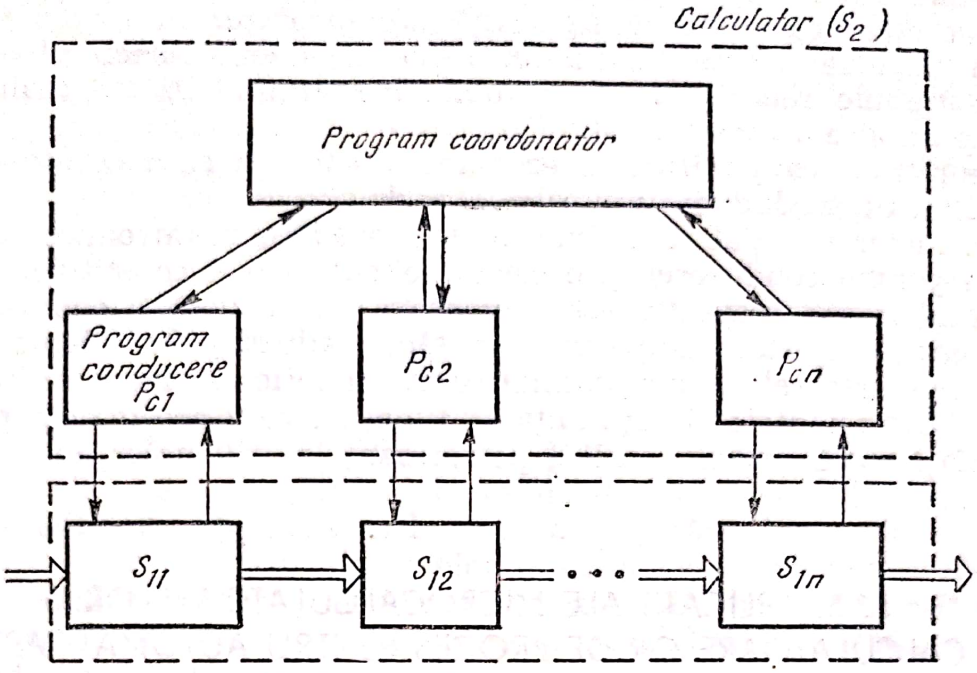


Fig. 13.14. Conducerea ierarhizată prin coordonarea unor programe specializate:
S_{ij} — subsisteme conduse; P_{ci} — programe de conducere.

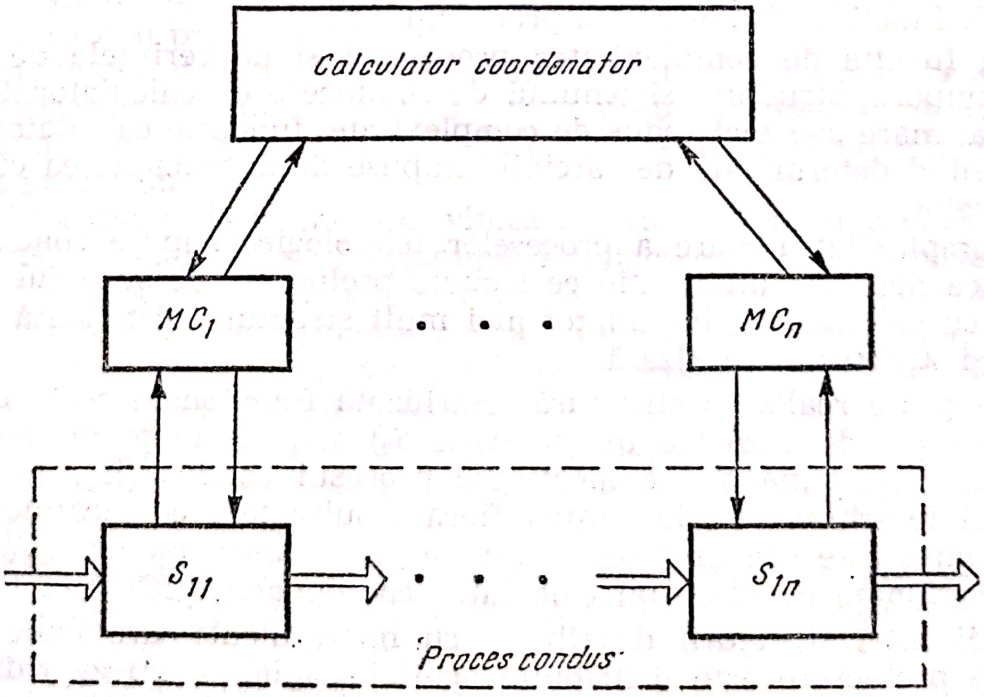


Fig. 13.15. Conducerea ierarhizată prin coordonarea unor microcalculatoare:
MC_i — microcalculatoare; S_{ij} — subsisteme conduse.

Scanned with OKEN Scanner

active iar altele fiind în rezervă. Comunicațiile dintre diverse subsisteme se realizează prin intermediul magistralelor de date, coordonate de asemenea cu ajutorul microcalculatoarelor.

O structură completă de conducere cu ajutorul microcalculatoarelor plasate la nivelul local și al unui minicalculator sau calculator de proces la nivelul de coordonare, cu evidențierea nodurilor prin care se asigură transferul de date, este prezentată în figura 13.16.

Microcalculatoarele $MC_1, \ldots, MC_n$ de la nivelul de conducere locală primesc informații de coordonare, fie sub formă de referință fie sub formă de algoritmi de reglare și conducere. Nivelul de coordonare este împărțit în două subnivele, unul de coordonare propriu-zisă iar celălalt de identificare și estimare a parametrilor modelului procesului S_{1i}, $i=1, 2, \ldots, n$, de actualizare a modelului.

La aceste subnivele pot fi incluse console pentru supravegherea procesului de coordonare și pentru intervenții ale operatorului, în cazul în care aceste intervenții se impun.

Circulația informației între diversele subsisteme se asigură prin intermediul magistralelor de date, iar coordonarea transferului de informație se asigură de către microcalculatoarele plasate în nodurile N_i și N'_i ale magistralei.

O bună organizare a transferului de informație asigură o fiabilitate și viteză de lucru corespunzătoare întregului sistem de conducere

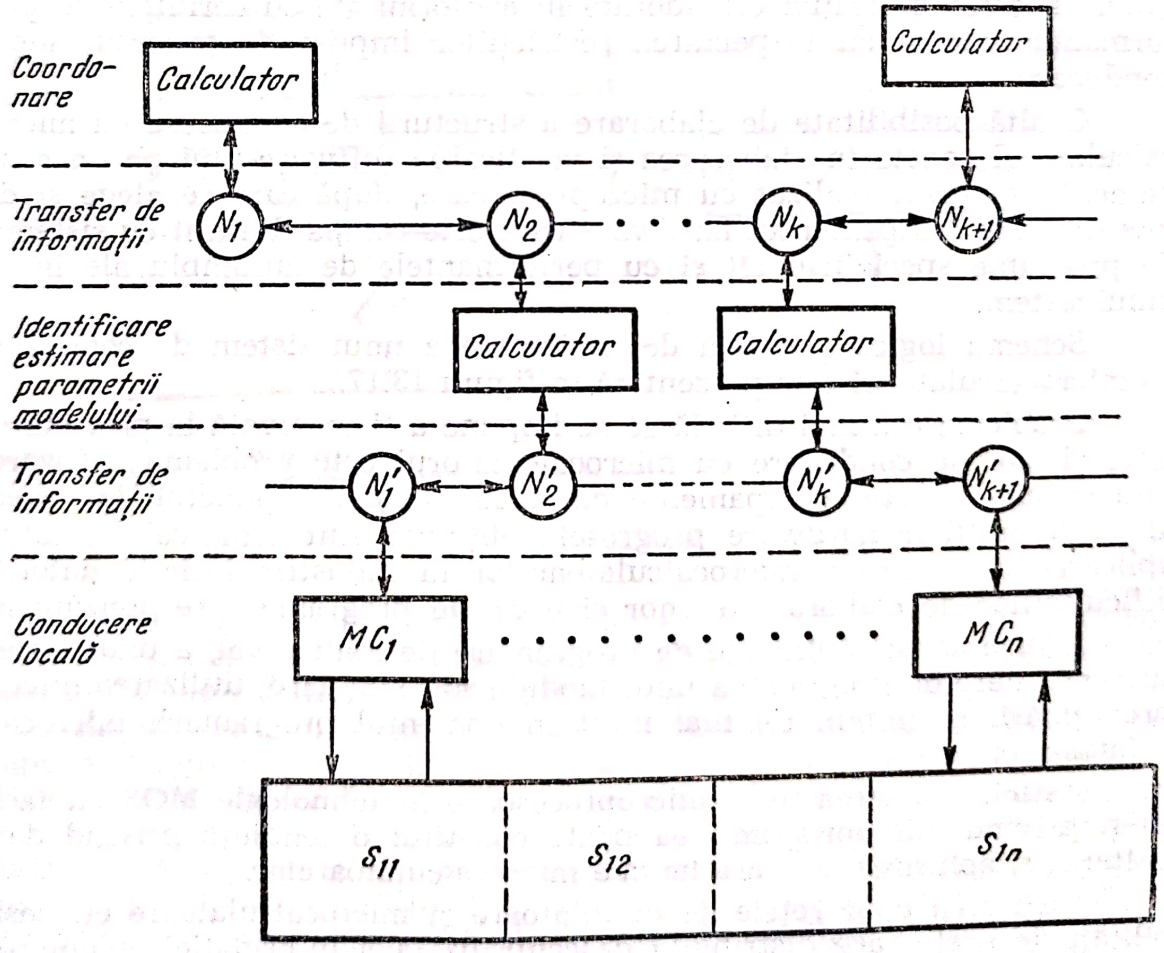


Fig. 13.16. Structură de conducere cu ajutorul unei rețele de microcalculatoare.

a procesului; luarea în considerare a unor factori de prioritate se impune la dimensionarea structurii magistralei de date.

Așa cum s-a arătat în subcapitolul 13.4, odată cu dezvoltarea rapidă a microprocesoarelor s-a impus în practica industrială utilizarea microcalculatoarelor pentru operații de culegere (achiziții) de date, operații de comandă secvențială, operații de reglare numerică, operații de identificare și simulare a proceselor tehnologice.

Evoluția performanțelor microprocesoarelor realizate pînă în prezent în ceea ce privește viteza de lucru, consumul de putere, lungimea cuvintelor cu care operează, permite a întrevedea largi aplicații ale acestora pentru conducerea proceselor. Astfel, microprocesoarele de tip Intel 8080 și Intel 8085, care operează cu lungimea cuvîntului pe 8 biți, și Intel 8086 care operează cu lungime de cuvînt de 16 biți pot fi utilizate cu înaltă eficiență pentru realizarea unor funcții complexe cu mare precizie și viteză.

Adoptarea unei soluții de automatizare cu microcalculatorul presupune rezolvarea problemelor privind echipamentele și sistemele de programe (hardware și software) în raport cu complexitatea procesului și cu funcția obiectiv urmărită prin procesul de automatizare sau conducere. Pornind de la unitatea centrală proprie microprocesorului se determină capacitatea de memorare, echipamentele de interfață etc., corespunzătoare aplicației, după care se trece la realizarea sistemului de programe necesar aplicației considerate în conformitate cu cerințele de performanță date și cu respectarea restricțiilor impuse de procesul supus conducerii.

O altă posibilitate de elaborare a structurii de conducere cu microcalculatorul constă în elaborarea și verificarea software-ului pe un echipament universal realizat cu microprocesoare, după care se alege și dimensionează echipamentul hardware care este compatibil atît cu sistemul de programe specializat cît și cu performanțele de ansamblu ale întregului sistem.

Schema logică generală de proiectare a unui sistem de conducere cu microcalculatorul este prezentată în figura 13.17.

Problema cea mai dificilă ce se impune a fi rezolvată la proiectarea unui sistem de conducere cu microcalculatorul este problema softwareului specific acestor echipamente de calcul. Deși din punctul de vedere al configurațiilor hardware progresele obținute sînt remarcabile, totuși aplicarea cu succes a microcalculatoarelor în industrie întîrzie datorită dificultăților de elaborare a unor sisteme de programe corespunzătoare.

Utilizarea unor limbaje de programare de înalt nivel, a unor structuri modulare de programe a unor module soft standard, utilizarea microprogramării se impun tot mai mult în domeniul programării microcalculatoarelor.

Astfel, utilizarea unor microprocesoare în tehnologie MOS cu facilități privind microprogramarea poate constitui o tendință privind dezvoltarea și aplicarea pe scară largă a microcalculatoarelor.

Utilizarea unor rețele de calculatoare și microcalculatoare cu posibilități de prelucrare distribuită descentralizată a informației, adoptarea soluției de transfer de informații pe baza unor magistrale de date, folo-

Scanned with OKEN Scanner

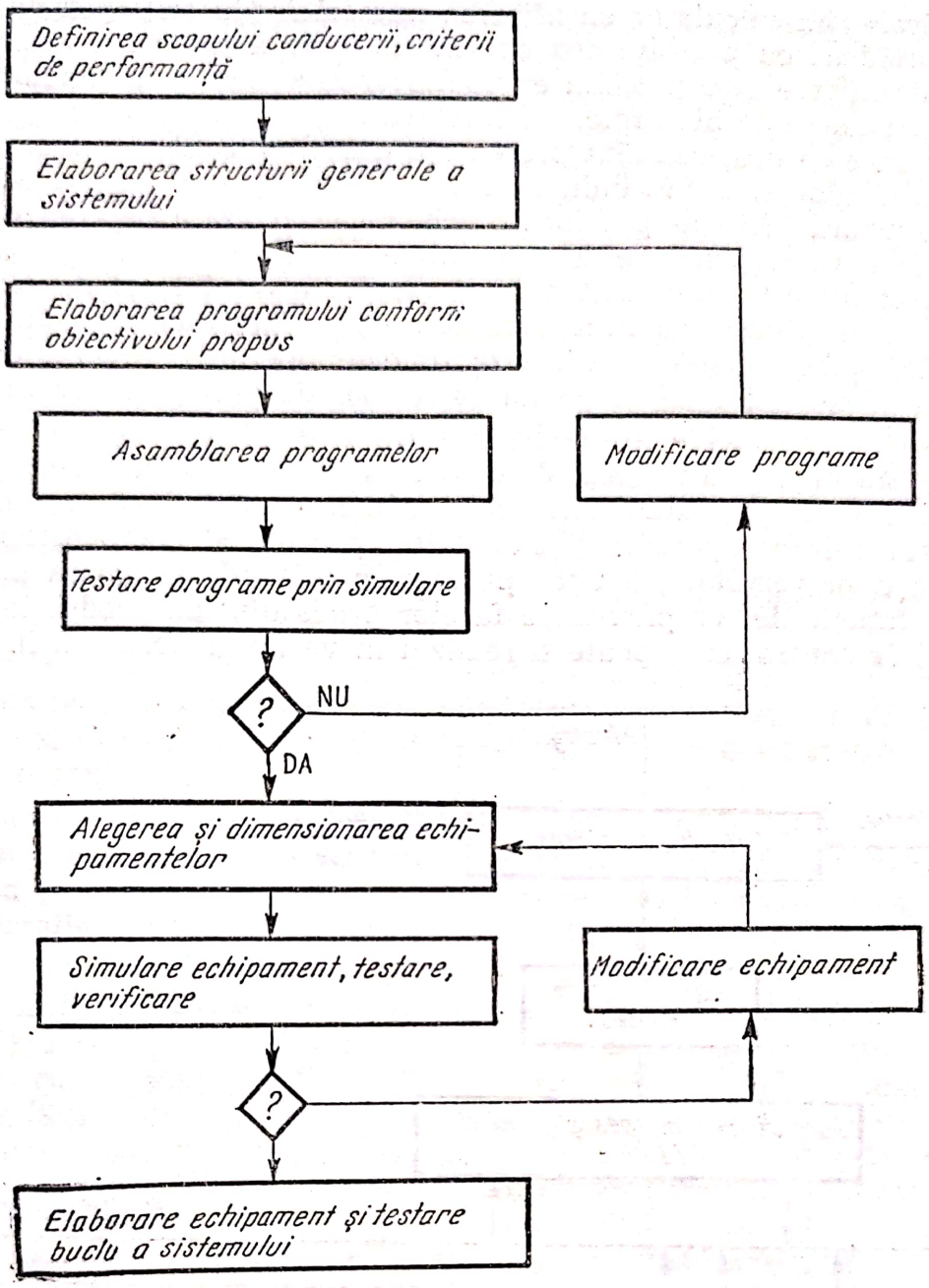


Fig. 13.17. Schema logică de proiectare a unui sistem de conducere cu microcalculator.

sirea unor sisteme redundante și implementarea unor programe de diagnosticare și depanare automată fac de asemenea posibilă extinderea domeniilor de aplicabilitate a microcalculatoarelor.

Exploatarea cu eficiență a unor asemenea sisteme de calcul presupune asigurarea unei înalte compatibilități cu operatorul uman. Se impune astfel alegerea corespunzătoare a sistemului de comunicare între microcalculator și operatorul uman. Printre sistemele de comunicare ce se impun a fi luate în considerare sînt: unități de afișare și conversaționale (display) integrate direct în camera de comandă, unități de afișare cu un anumit grad de inteligență (terminale inteligente), unități de afișare și conversaționale cu plasmă. Adoptarea unui sistem sau altul de

Scanned with OKEN Scanner

comunicare om-calculator cu afișarea numerică sau analogică a informației și evident cu posibilitatea operatorului de a interveni asupra sistemului de afișare face posibilă exploatarea cu succes a sistemelor de conducere cu calculatorul și microcalculatorul.

În cele ce urmează sînt prezentate unele aplicații ale calculatoarelor și microcalculatoarelor în industrie.

În figura 13.18 se prezintă o schemă ierarhizată de control al producției într-o întreprindere de automobile.

Sistemul este organizat pe trei nivele: nivelul local de control (cu calculator de proces, cu minicalculator sau microcalculator de proces a diverselor subsisteme ce realizează diverse operații), nivelul de supervizare a producției realizat cu un calculator de proces și nivelul de planificare și organizare a producției cu ajutorul unui calculator universal.

În cadrul nivelului local de control al diverselor faze ale procesului de producție sînt instalate terminale prin intermediul cărora se asigură comunicarea între operator și calculator, precum și echipamente pentru tipărirea unor rezultate, a unor protocoale privind realizarea producției.

În funcție de complexitatea fazelor procesului de producție se alege sistemul de control care poate fi realizat în varianta CNC sau în varianta

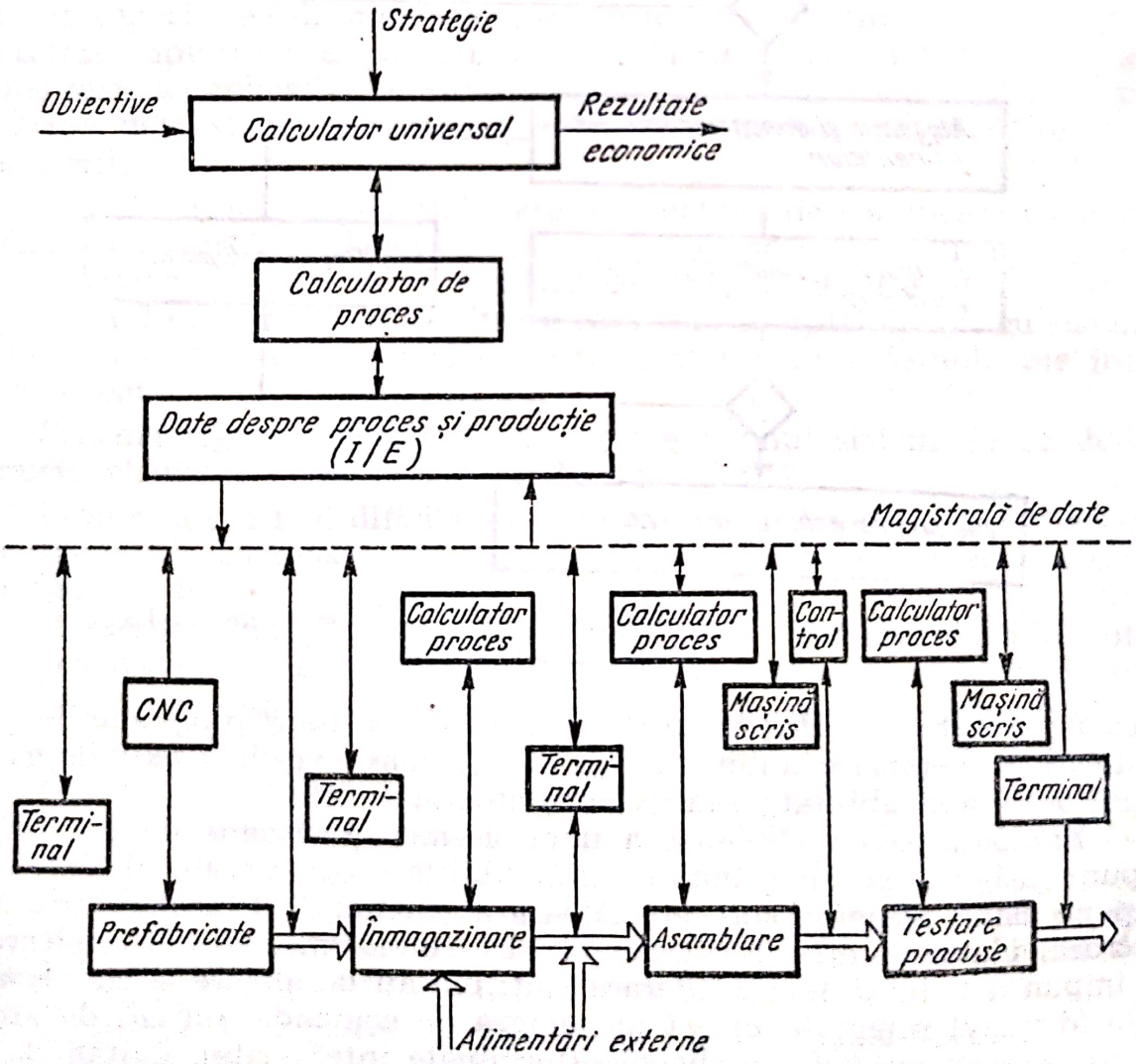


Fig. 13.18. Schema de control a producției într-o întreprindere de automobile.

cu minicalculator sau microcalculator conectate la magistrala de comunicare.

Supervizarea producției se realizează cu ajutorul unui calculator de proces care controlează referința sau programul sistemelor de control al fazei de prefabricare, al fazei de asamblare și al celei de transfer spre secția de testare. Informațiile privind desfășurarea procesului de producție sînt transmise acestui calculator de proces prin intermediul echipamentelor intrare/ieșire conectate la magistrala de date. Calculatorul de proces ce realizează supervizarea procesului de producție, este coordonat de calculatorul universal, situat la ultimul nivel. Acest calculator efectuează calcule economice, calcule de planificare a producției în funcție de cerere și stabilește strategia de evoluție a procesului de producție.

În figura 13.19 se prezintă o schemă de reglare numerică a unui proces de fermentație. Particularitățile proceselor de fermentație rezultate din faptul că aceste procese sînt discontinue, multivariabile, neliniare și variabile în timp determină adoptarea unor soluții moderne de automatizare ce pot fi implementate cu succes cu ajutorul microcalculatoarelor și minicalculatoarelor.

O metodă indirectă de determinare a desfășurării procesului de fermentație este cea bazată pe măsurarea concentrațiilor de O_2 și CO_2 din gazele evacuate, care dau indicații cu privire la activitatea biologică a microorganismelor.

Desfășurarea în cele mai bune condiții a procesului de fermentație impune asigurarea climatului optim necesar evoluției microorganismelor. Aceasta presupune asigurarea unei anumite cantități de oxigen (o anumită aerație), o anumită temperatură a mediului, o anumită concentrație *p*H, o anumită presiune în vas etc.

Controlul diverșilor parametri care asigură condițiile optime de evoluție a microorganismelor se poate realiza cu ajutorul unui microcalculator, care, primind informațiile de la proces, stabilește algoritmul de reglare (sau comandă) corespunzătoare a întregului proces de fermentație. Microcalculatorul poate fi utilizat atît pentru comanda secvențială a acestuia cît și pentru conducerea numerică directă. Comanda secvențială controlată cu ajutorul microcalculatorului asigură succesiunea logică a operațiilor evitîndu-se efectuarea unor manevre greșite la pornirea și oprirea fermentatorului, iar conducerea numerică a procesului de fermentație asigură realizarea climatului biologic optim de desfășurare a procesului de fermentație. În funcție de starea existentă în fermentator, obținută pe baza informațiilor date de traductoare, se elaborează algoritmul de reglare corespunzător pentru fiecare parametru.

Astfel se controlează turația agitatorului *SA*, debitul de aer introdus și evacuat, presiunea, temperatura și *p*H-ul din fermentator. O serie de date caracteristice evoluției procesului sînt afișate și înregistrate, iar de la consolă operatorul poate interveni asupra unor parametri caracteristici ai procesului de fermentație. Utilizarea unor pachete de programe adecvate poate asigura comanda optimală și adaptivă a procesului. În funcție de complexitatea problemelor impuse a fi rezolvate prin conducerea procesului se va alege structura optimă hardware și software. O conducere evoluată a unui asemenea proces implică determinarea modelului proce-

Scanned with OKEN Scanner

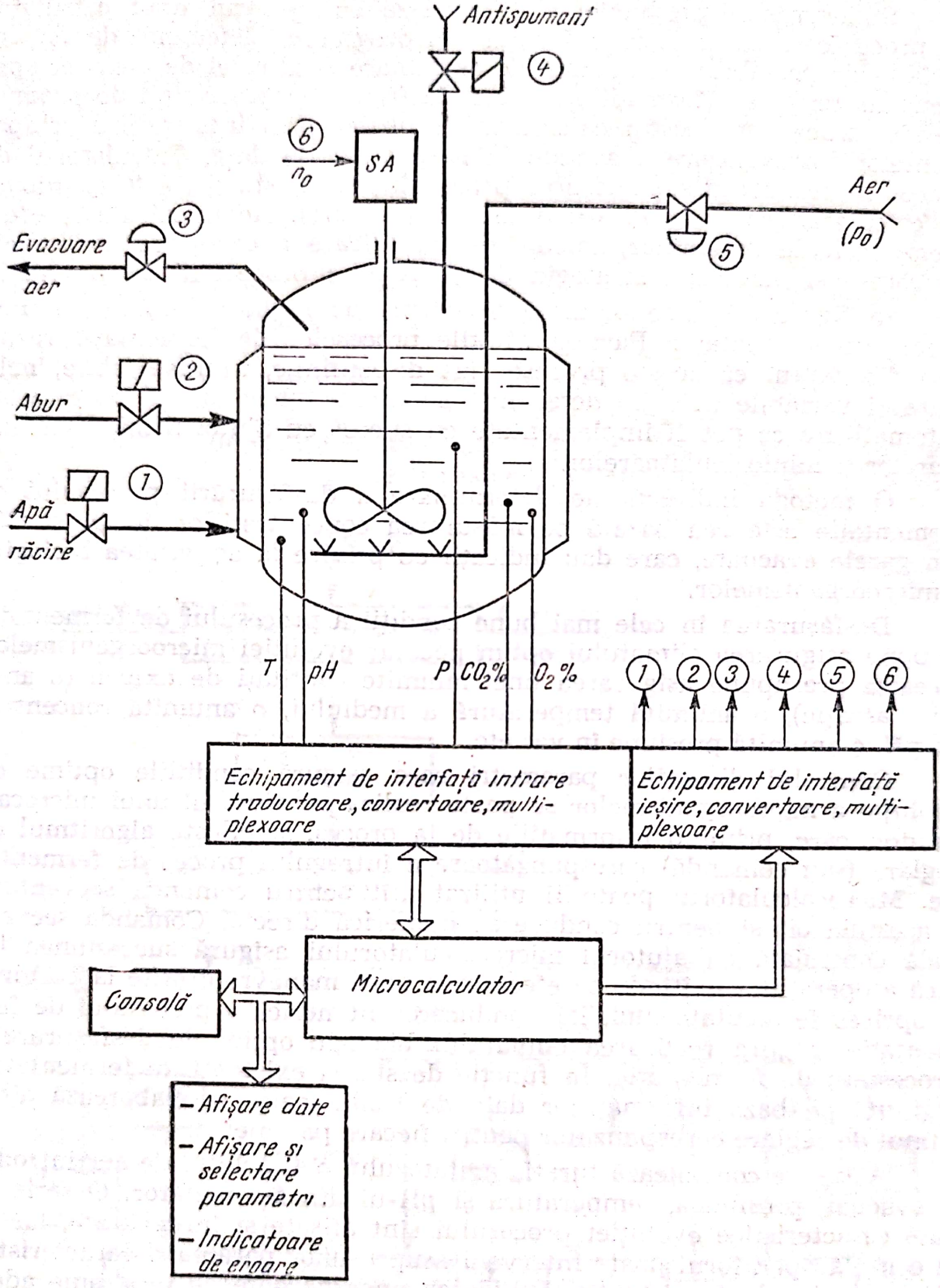


Fig. 13.19. Schema de conducere cu microcalculator a unui fermentator.

Scanned with OKEN Scanner

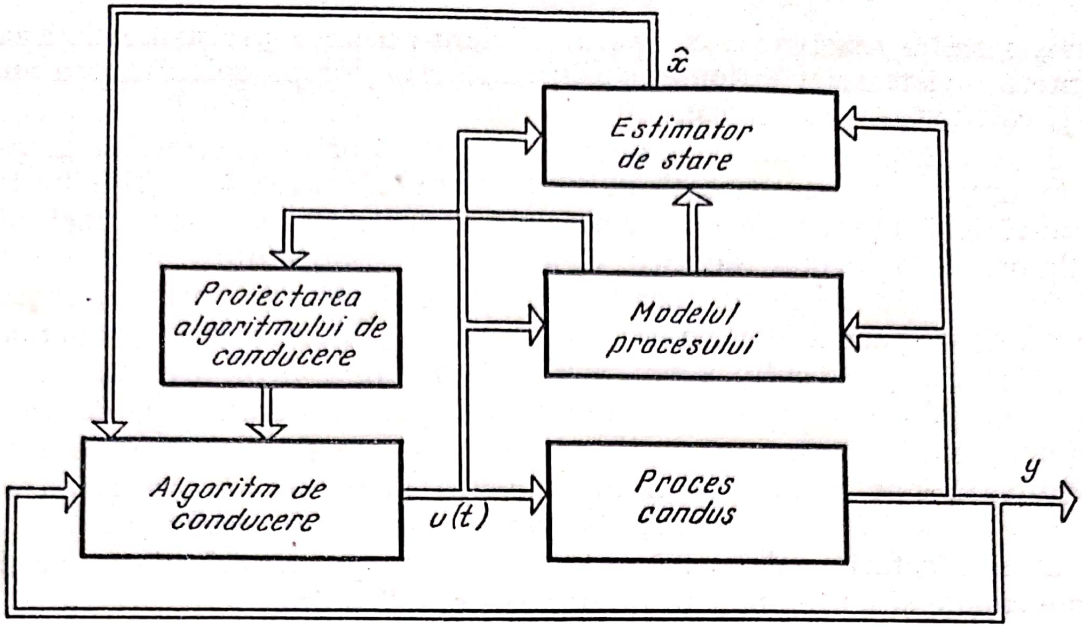


Fig. 13.20. Structură de conducere evoluată a proceselor tehnologice.

sului, estimarea stării, proiectarea algoritmului de conducere şi elaborarea comenzii optimale după stare ca în figura 13.20.

Prin utilizarea unei asemenea structuri evoluate de conducere a procesului se asigură identificarea continuă a procesului şi elaborarea algoritmului de reglare adaptivă a acestuia. Elaborarea strategiei de conducere se face în funcţie de variaţiile parametrilor modelului şi de starea estimată a procesului.

O serie de aplicaţii ale microcalculatoarelor în automatizarea proceselor, în culegerea şi prelucrarea de date, în transformarea datelor, controlul traficului rutier şi de cale ferată [1, 8] etc., ilustrează pregnant tendinţa de introducere pe scară largă pentru controlul proceselor industriale a acestor echipamente de calcul. Dezvoltarea unor programe specializate, a unor limbaje de înaltă eficienţă pentru microcalculatoare şi minicalculatoare, completează tot mai mult partea software a acestora făcînd posibilă implementarea cu rezultate bune în diverse domenii de activitate.

Problemele de reglare şi comandă a proceselor, prin utilizarea unor asemenea echipamente de conducere numerică, capătă alte dimensiuni, se pot implementa pe lîngă algoritmi clasici de reglare, algoritmi evoluaţi de reglare cu reacţie după stare, reglarea adaptivă şi optimală etc.

Structura distribuită de conducere şi cea ierarhizată, în cadrul cărora se asigură transferul optim de informaţie, conduc la realizarea unei înalte siguranţe în funcţionare, la creşterea flexibilităţii şi modularităţii sistemelor de conducere a proceselor.

13.6. SIMULAREA SISTEMELOR AUTOMATE CU AJUTORUL CALCULATOARELOR ANALOGICE ŞI NUMERICE

Accesibilitatea tot mai mare a inginerilor şi tehnicienilor la tehnica de calcul analogică şi numerică, paralel cu dezvoltarea continuă a calculatoarelor atît sub aspectul echipamentului cît şi al sistemului de pro-

Scanned with OKEN Scanner

grame, permite rezolvarea cu înaltă eficiență a unor probleme de analiză și sinteză a sistemelor automate prin simularea lor pe calculatoare analogice și calculatoare numerice.

În calculatorul analogic de curent continuu orice mărime fizică variabilă în timp este reprezentată de o tensiune electrică variabilă în timp, cele două legi de variație (cea a mărimii fizice reale și cea a tensiunii în calculator) fiind formal identice. O asemenea reprezentare a funcționării unui proces fizic (mecanic, termic, chimic, electric etc.) prin intermediul unor tensiuni poartă denumirea de *simularea analogică a fenomenului fizic*. Mărimile procesului fizic care se reprezintă prin intermediul tensiunilor variabile în cadrul calculatorului poartă denumirea de *mărimi simulate*. Relațiile între mărimile simulate și tensiunile cu care acestea se simulează sînt definite prin intermediul *factorilor de scară*, care pot fi *factori de scară pentru amplitudine* și *factori de scară pentru timp*. Cu ajutorul factorilor de scară pot fi simulate pe un calculator analogic sisteme rapide și lente, mărimi de diverse amplitudini.

Factorul de scară în amplitudine se definește ca raportul între valoarea maximă a mărimii fizice ce se impune a fi simulată y_{max} și valoarea maximă a tensiunii cu care lucrează calculatorul analogic u_{max}

$$N_a = \frac{y_{max}}{u_{max}}.$$

Factorul de scară pentru timp se definește ca raportul între timpul real și timpul de lucru al mașinii

$$N_t = \frac{t}{t_M}.$$

În calculatorul numeric orice mărime fizică se reprezintă prin valoarea ei numerică, fără a exista o corespondență fizică directă cu sistemul simulat. Rezultatele simulării unor sisteme cu ajutorul unui calculator numeric se obține sub forma unei liste de valori. Utilizarea unor limbaje de programare conversaționale permite intervenția operatorului asupra sistemului simulat, care are posibilitatea modificării unor parametri ai sistemului chiar în timpul simulării. Simularea numerică a sistemelor cu ajutorul unor limbaje specializate de simulare (sau programe specializate de simulare) permite studiul sistemelor automate cu mai mare eficiență și mai mare precizie decît simularea analogică. Limbajele CSMP, LSSC, SIMSID elaborate special pentru simularea numerică a sistemelor constituie mijloace eficiente pentru analiza și sinteza sistemelor liniare și neliniare cu ajutorul calculatorului numeric.

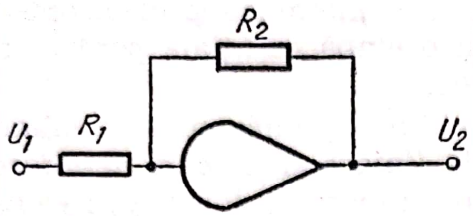
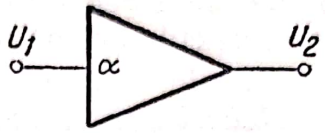
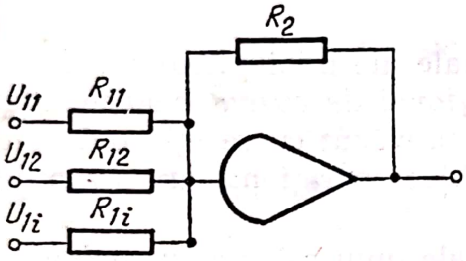
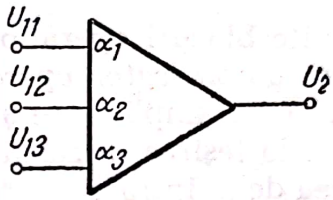
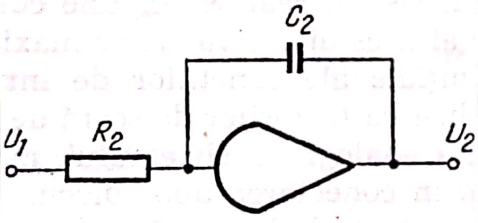
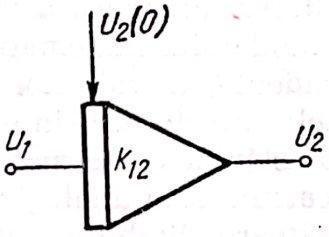
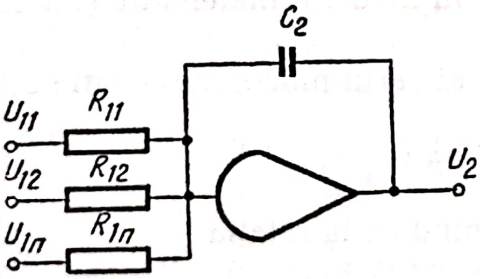
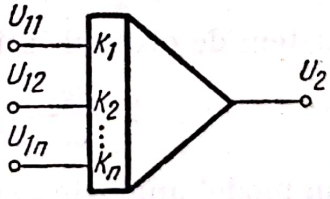
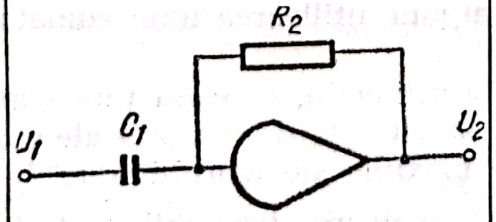
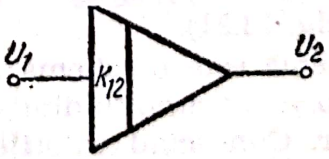
13.6.1. SIMULAREA SISTEMELOR AUTOMATE CU AJUTORUL CALCULATORULUI ANALOGIC

Un calculator analogic este alcătuit din mai multe subsisteme electronice denumite *blocuri operaționale*. Blocurile operaționale sînt alcătuite din amplificatoare operaționale sau alte circuite electronice și ele-

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 13.1

Principalele blocuri operaționale ale unui calculator analogic

Tipul elementului	Schema blocului operațional	Simbolul	Operația realizată
Element de înmulțire cu o constantă			$u_2=-\frac{R_2}{R_1}u_1$
Element de sumare			$u_2=-\sum_{i=1}^{n}\frac{R_2}{R_{1i}}u_{1i}$
Element de integrare			$u_2=-\frac{1}{R_1C_1}\int_0^t u_1dt+u_2(0)$
Element de sumare — integrare			$u_2=-\int_0^t\sum_1^n\frac{1}{R_{1i}C_2}\cdot u_{1i}dt$
Element de diferențiere			$u_2=-C_1R_2\frac{du_1}{dt}$

Scanned with OKEN Scanner

mente de circuit de tip R, C, diode etc. Tensiunea de la ieşirea unui bloc operaţional este determinată de tensiunea de la intrarea acestuia şi evident de proprietăţile „operaţionale" ale blocului.

Modelarea unui proces dat se realizează prin conectarea corespunzătoare a mai multor blocuri operaţionale, cu luarea în consideraţie a limitărilor inerente ale acestor blocuri (tensiune de lucru limitată, frecvenţă de lucru limitată de prezenţa dispozitivelor mecanice şi electromecanice). Alegerea factorilor de scară reprezintă o etapă esenţială pentru modelarea unui sistem pe un calculator analogic.

Blocurile operaţionale ce fac parte din structura unui calculator analogic se împart în *blocuri operaţionale liniare* şi *blocuri neliniare*. Astfel, blocurile care efectuează operaţii de integrare, derivare, inversare de semn, atenuare, sumare etc. sînt denumite *blocuri liniare*, iar multiplicatoarele de mărimi variabile, generatoare de funcţii etc. sînt denumite *blocuri neliniare*.

Cele mai multe blocuri operaţionale ale unui calculator analogic au în structura lor un *amplificator operaţional de curent continuu* (amplificator cu factor mare de amplificare şi prevăzut cu reacţie puternic negativă). Tensiunea de la ieşirea oricărui bloc operaţional are semnul schimbat în raport cu cea de la intrare.

Principalele blocuri operaţionale ale unui calculator analogic şi operaţiile realizate sînt prezentate în tabelul 13.1.

Pentru simularea analogică a unui sistem real se impune cunoaşterea cu precizie a modelului matematic al acestuia, a valorilor maxime ale variabilelor dependente, a valorilor iniţiale ale funcţiilor de intrare şi ieşire şi a derivatelor acestora. Prin utilizarea factorilor de scară de amplitudine şi de timp se întocmeşte modelul analogic al sistemului, model ce se transpune pe calculatorul analogic prin conectarea unor blocuri operaţionale corespunzătoare. Stabilirea unor factori de scară corecţi pentru amplitudine şi timp implică cunoaşterea cît mai exactă a valorilor maxime ale variabilelor dependente ce intervin în modelul matematic şi a constantelor de timp.

Pentru un sistem de ordinul întîi al cărui model matematic este

$$T\frac{dy}{dt}+y=ku,$$

se poate alcătui un model analogic pornind de la relaţia

$$\frac{dy}{dt}=\frac{K}{T}u-\frac{1}{T}y=\alpha_1 u-\alpha_2 y. \qquad (13.1)$$

Astfel, pentru simulare analogică se impune utilizarea unui sumator şi a unui integrator (fig. 13.21).

Această schemă este o schemă de principiu, care nu ţine seama de nici o restricţie privind amplitudinile şi vitezele de variaţie ale mărimilor din calculator. Cunoscînd valorile maxime ale mărimilor ce intervin în model $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{max}$, y_{max} şi u_{max}, precum şi valoarea tensiunii u_0 de lucru a

Scanned with OKEN Scanner

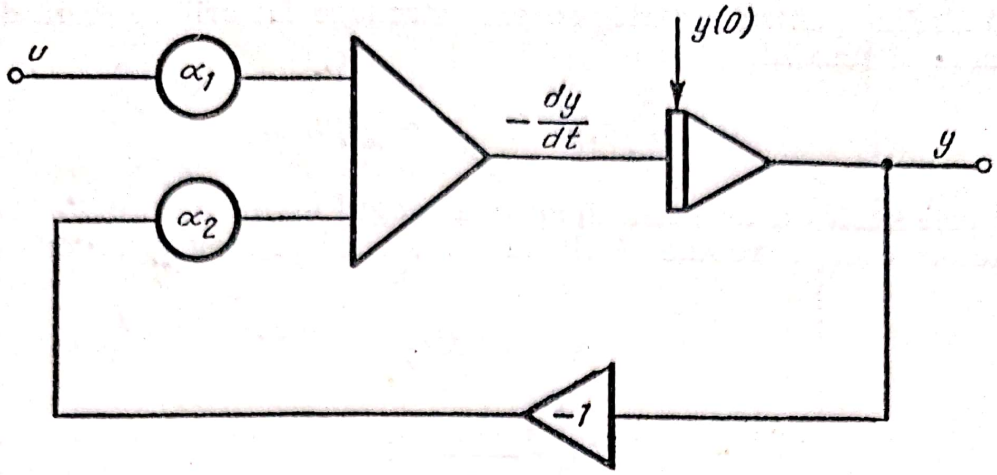


Fig. 13.21. Simularea analogică a unui sistem de ordinul întîi.

mașinii, frecvența maximă ω_M de lucru a mașinii și timpul t_M, se determină factorii de scară astfel:

$$N_{a0}=\frac{y_{max}}{u_0};\quad N_{a1}=\frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)_{max}}{u_0};\quad N'_{aa}=\frac{u_{max}}{u_0};\quad N_t=\frac{t}{t_M};\quad N_\omega=\frac{\omega}{\omega_M}.$$

Pentru integrator, introducerea factorilor de scară conduce la o relație între tensiunile de la intrare u_i și ieșire u_j ale acestuia, de forma

$$u_j(\omega_M t_M)=K_{ij}\int_0^{t_M} u_i(\omega_M t_M)\,dt_M, \tag{13.2}$$

care corespunde relației de integrare, în forma generală

$$x_j(\omega t)=\int_0^t x_i(\omega t)\,dt. \tag{13.3}$$

Pe baza factorilor de scară N_x, N_t definiți anterior, se poate scrie următoarea relație

$$\frac{1}{N_{xj}}\cdot x_j\left(\frac{\omega}{\omega_M}\cdot\frac{t}{N_t}\right)=K_{ij}\cdot\frac{1}{N_{xi}\cdot N_t}\int_0^t x_i\left(\frac{\omega t}{N_\omega}\cdot\frac{t}{N_t}\right)dt. \tag{13.4}$$

Pentru ca ecuațiile (13.4) și (13.3) să fie identice, este necesar să fie îndeplinite relațiile:

$$K_{ij}=\frac{N_{xi}}{N_{xj}}N_t,\quad N\omega\cdot N_t=1 \tag{13.5}$$

sau

$$K_{ij}=\frac{\left(\frac{dx_j}{dt}\right)_{max}}{x_{j\,max}}N_t.$$

Scanned with OKEN Scanner

În mod similar pentru sumator se pot introduce factorii de scară dacă se ține seama că ecuațiile:

$$u_\Sigma = \sum_1^n \alpha_i u_i \quad \text{și} \quad x_\Sigma = \sum_1^n a_i x_i,$$

unde x_i este analogul tensiunii u_i iar a_i analogul lui α_i.

Aceste ecuații trebuie să fie identice dacă se aleg următorii factori de scară:

$$N_{x_i} = \frac{x_{i\,max}}{u_0};$$

$$N_{x_\Sigma} = \frac{x_{\Sigma\,max}}{u_0};$$

$$\frac{x_\Sigma}{N_{x_\Sigma}} = \sum_1^n \alpha_i \frac{x_i}{N_{x_i}}.$$

Pentru asigurarea identității celor două ecuații, simulată și cea reală, trebuie îndeplinită relația

$$\alpha_i = a_i \cdot \frac{N_{x_i}}{N_{x_\Sigma}}. \tag{13.6}$$

În mod similar se pot introduce factorii de scară și pentru operații neliniare.

Pentru modelarea unui sistem de ordinul doi, a cărui ecuație de funcționare este de forma

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = K\omega_n^2 u(t),$$

se scrie ecuația diferențială sub forma

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = K\omega_n^2 u(t) - 2\zeta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} - \omega_n^2 y(t). \tag{13.7}$$

Modelul analogic al ecuației (13.7) se realizează cu ajutorul a două integratoare și al unui sumator (fig. 13.22).

Introducerea factorilor de scară de amplitudine și de timp implică luarea în considerare în modelul analogic a coeficienților K_{10} și K_{21} pentru integratoare și α_i pentru intrările în sumator.

În cazul general, pentru un sistem descris de ecuația diferențială

$$\frac{d^ny}{dt^n} + a_{n-1} + \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_n \frac{d^nu}{dt^n} + \ldots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u$$

se poate întocmi modelul analogic pornind de la ecuația

$$\frac{d^ny}{dt^n} = b_n \frac{d^nu}{dt^n} + \left(b_{n-1} \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}} - a_{n-1} \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right) + \left(b_{n-2} \frac{d^{n-2}u}{dt^{n-2}} - a_{n-2} \frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}}\right) +$$

$$+ \left(b_1 \frac{du}{dt} - a_1 \frac{dy}{dt}\right) + (b_0 u - a_0 y). \tag{13.8}$$

Scanned with OKEN Scanner

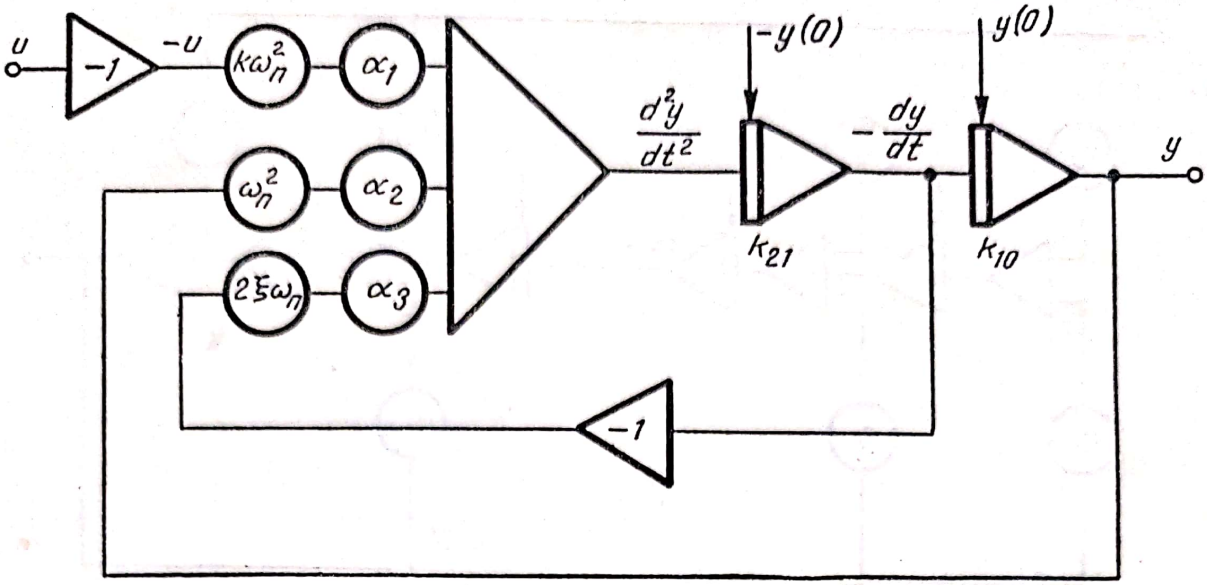


Fig. 13.22. Simularea analogică a unui sistem de ordinul doi.

Pentru a obține soluția ecuației se impune efectuarea unei succesiuni de integrări de ordinul n

$$y(t)=\underbrace{\iint\ldots\int}_{n}\frac{d^n y}{dt^n}\,dt=b_n u(t)+\int\{(b_{n-1}u-a_{n-1}y)+\int[b_{n-2}u-a_{n-2}y\int(\ldots+$$

$$+\int\{b_1 u-a_1 y+\int(b_0 u-a_0 y)dt\ \ldots)dt'\ dt''\}dt''':\qquad(13.9)$$

Diagrama de simulare pentru relația (13.9) este prezentată în figura 13.23.

În condițiile în care $m<n$, o serie de termeni ce conțin derivatele funcției de la intrare sînt zero, iar modelul analogic este mai simplificat. De remarcat faptul că numărul de integratoare necesar simulării unui sistem este determinat de ordinul ecuației diferențiale ce descrie funcționarea sistemului.

Dacă ieșirile integratoarelor le notăm cu variabilele de stare x_i, se poate obține reprezentarea sistemului prin intermediul acestor variabile de stare:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1&=-a_{n-1}[x_1+b_n u]+b_{n-1}u+x_2;\\
\dot{x}_1&=-a_{n-1}x_1+x_2+(b_{n-1}-a_{n-1}b_n)u;\\
\dot{x}_2&=-a_{n-2}x_1+x_3+(b_{n-2}-a_{n-2}b_n)u;\\
&\vdots\\
\dot{x}_{n-1}&=-a_1x_1+x_n+(b_1-a_1b_n)u;\\
\dot{x}_n&=-a_0x_1+(b_0-a_0b_n)u;\\
y&=x_1+b_nu.
\end{aligned}\qquad(13.10)$$

Scanned with OKEN Scanner

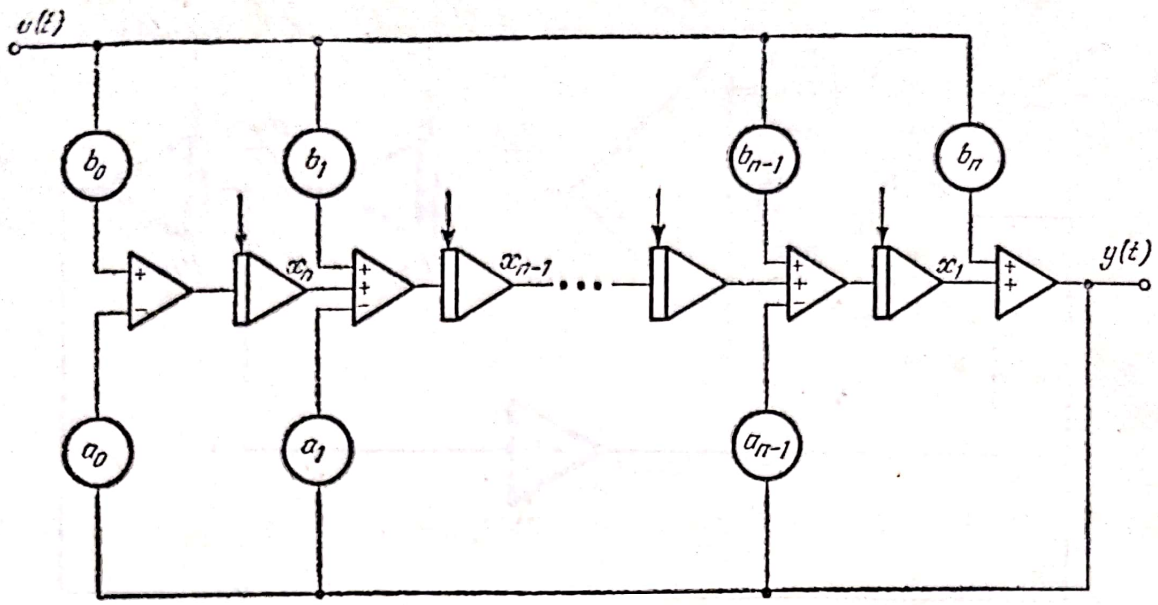


Fig. 13.23. Simularea analogică a unui sistem de ordinul n.

În reprezentare matriceal-vectorială, ecuaţiile (13.10) capătă forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 \dots 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 \dots 0 \\ & & \\ & & \\ -a_0 & 0 & 0 \dots 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{n-1} - a_{n-1} b_n \\ b_{n-2} - a_{n-2} b_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_0 - a_0 b_n \end{bmatrix} \cdot u \qquad (13.11)$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0 \dots 0] \cdot \mathbf{x} + b_n u$$

sau:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$
$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x},$$

unde matricele **A**, **b**, $\mathbf{c}^T$ au semnificaţia şi forma deduse din (13.11).

Un alt mod de obţinere a modelului analogic pentru un sistem de ordinul n este prezentat în figura 13.24.

Şi în acest caz ieşirile integratoarelor le notăm prin x_i şi le considerăm ca variabile de stare pentru sistem. Ecuaţiile ce descriu funcţionarea sistemului punînd în evidenţă aceste variabile de stare sînt:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u(t) - a_{n-1}x_1 - a_{n-2}x_2 - \dots - a_1 x_{n-1} - a_0 x_n; \\ \dot{x}_2 &= x_1; \\ \dot{x}_3 &= x_2; \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \dot{x}_n &= x_{n-1}; \end{aligned} \qquad (13.12)$$

$$y = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + b_2 x_{n-2} + \dots + b_{n-1} x_1 + b_n x_0.$$

În acest caz matricele **A**, **b**, $\mathbf{c}^T$ au altă formă.

Scanned with OKEN Scanner

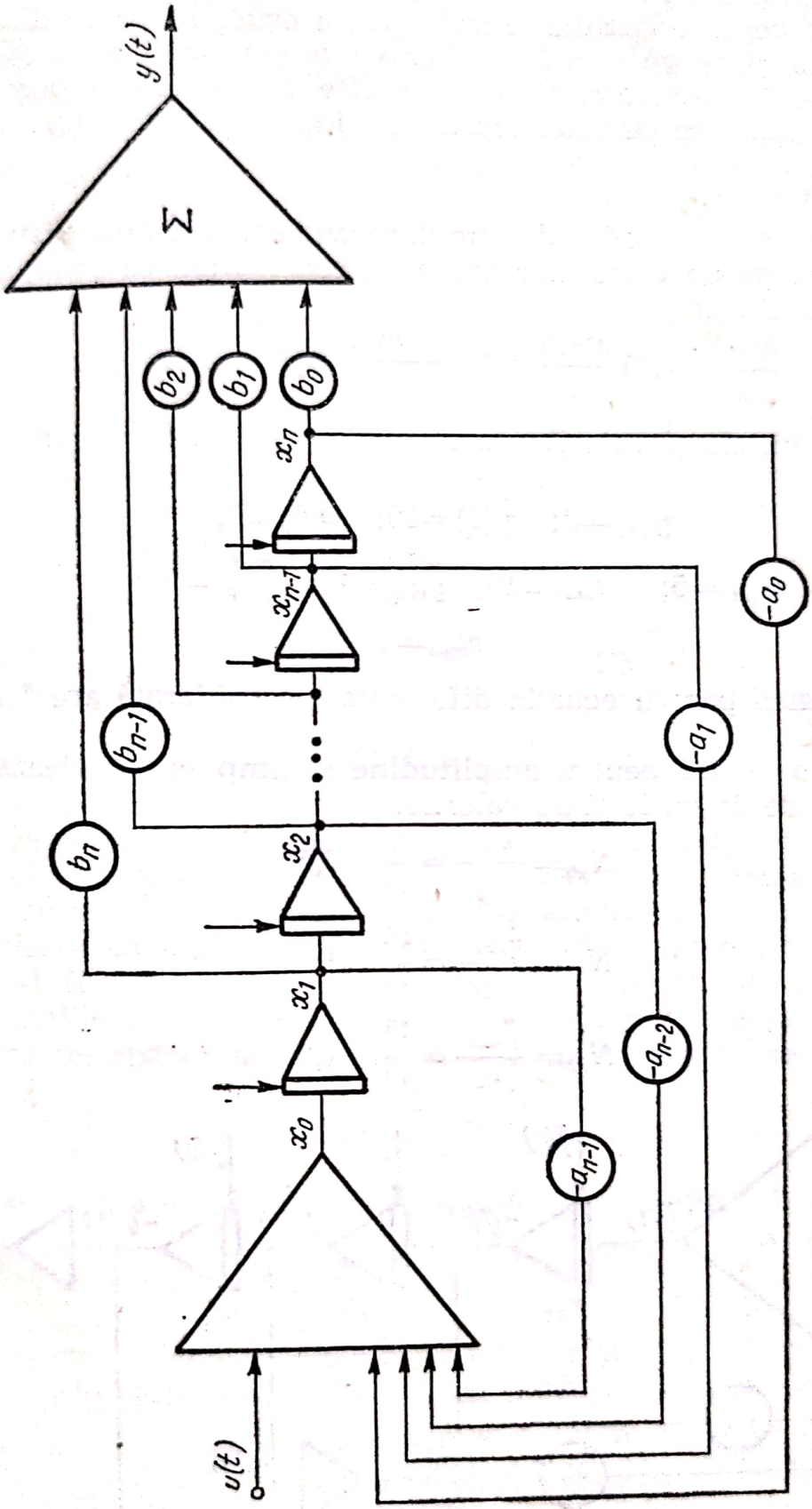


Fig. 13.24. Modelul analogic pentru un sistem de ordinul n.

De remarcat faptul că pornind de la modelul analogic al unui sistem, printr-o alegere corespunzătoare a variabilelor de stare se obține reprezentarea matriceal-vectorială a sistemului. Cunoașterea condițiilor inițiale precum și a valorilor maxime ale mărimilor ce intervin în modelul matematic permite simularea analogică a oricărui sistem dinamic. Introducerea factorilor de scară atît pentru integratoare K_{ij} cît și pentru sumator asigură obținerea rezultatelor dorite prin simulare, pornind de la ecuația diferențială ce caracterizează funcționarea sistemului.

Exemplul 13.1

Pentru a ilustra modul de simulare analogică a unui sistem de reglare automată pe un calculator analogic, considerăm că ecuația diferențială a sistemului este

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3}+2{,}5\frac{d^2y(t)}{dt^2}+0{,}9\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=3r(t),$$

iar condițiile inițiale și valorile maxime ale variabilelor de intrare și ieșire sînt:

$$y(0)=0;\quad \dot{y}(0)=10;\quad \ddot{y}(0)=0;$$

$$y_{max}=5;\quad \dot{y}_{max}=10;\quad \ddot{y}_{max}=15;\quad \dddot{y}_{max}=25;$$

$$r_{max}=1.$$

Schema analogică pentru ecuația diferențială considerată are forma dată în figura 13.25.

Factorii de scară pentru amplitudine și timp se calculează cu ajutorul relațiilor de definiție și au valorile:

$$N_{y0}=\frac{y_{max}}{u_0}=\frac{5}{10}=0{,}5;$$

$$N_{y1}=\frac{\dot{y}_{max}}{u_0}=\frac{10}{10}=1;$$

$$N_{y2}=\frac{\ddot{y}_{max}}{u_0}=\frac{15}{10}=1{,}5;$$

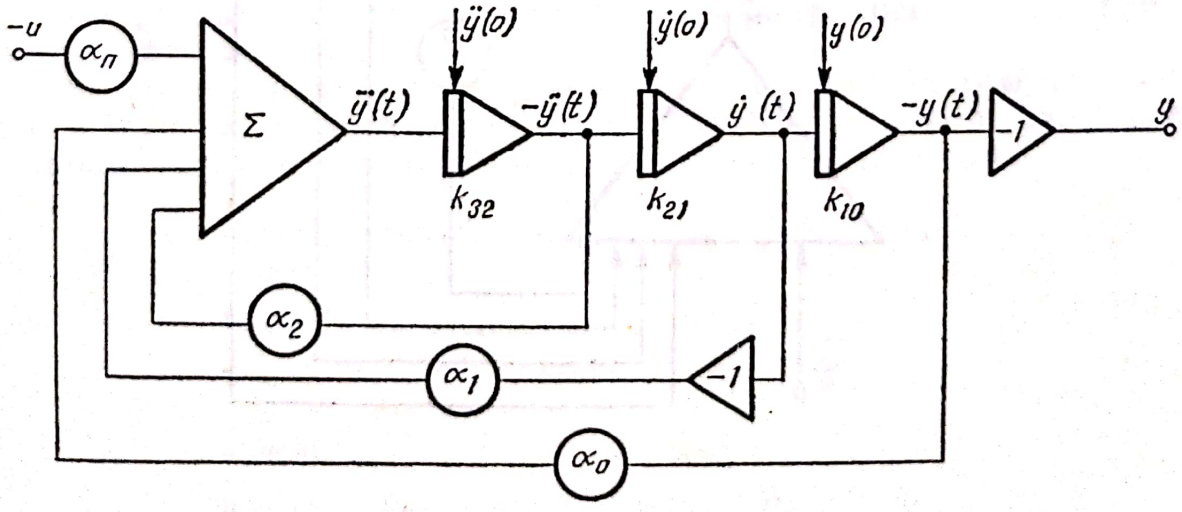


Fig. 13.25. Schema analogică pentru sistemul considerat în exemplul 13.1.

Scanned with OKEN Scanner

$$N_{y3}=\frac{\dddot{y}_{max}}{u_0}=\frac{25}{10}=2{,}5;$$

$$N_t=1;$$

$$N\omega=1.$$

Folosind aceiaşi factori de scară se calculează coeficienţii K_{ij} pentru integratoare şi α_i pentru sumator:

$$K_{10}=\frac{\dot{y}_{max}}{y_{max}}\cdot N_t=2;$$

$$K_{21}=\frac{\ddot{y}_{max}}{\dot{y}_{max}}\cdot N_t=\frac{15}{10}\cdot 1=1{,}5;$$

$$K_{32}=\frac{\dddot{y}_{max}}{\ddot{y}_{max}}\cdot N_t=\frac{25}{15}\cdot 1=1{,}66;$$

$$\alpha_0=\frac{a_0}{a_3}:\frac{y_{max}}{\dddot{y}_{max}}=\frac{3}{1}\cdot\frac{5}{25}=0{,}6;$$

$$\alpha_1=\frac{a_1}{a_3}\cdot\frac{\dot{y}_{max}}{\dddot{y}_{max}}=\frac{0{,}9}{1}\cdot\frac{10}{25}=0{,}36;$$

$$\alpha_2=\frac{a_2}{a_3}\cdot\frac{\ddot{y}_{max}}{\dddot{y}_{max}}=\frac{2{,}5}{1}\cdot\frac{15}{25}=1{,}5;$$

$$\alpha_r=\frac{b}{a_3}:\frac{r(t)_{max}}{\dddot{y}_{max}}=\frac{3}{1}\cdot\frac{1}{25}=0{,}12.$$

Introducerea condiţiilor iniţiale pentru fiecare integrator şi ajustarea potenţiometrelor la valorile α_i şi respectiv K_{ij} permite calculul răspunsului sistemului de reglare automată pentru un semnal de intrare $r(t)$ dat.

Simularea analogică a sistemelor de reglare automată se poate realiza folosind funcţia de transfer ce descrie funcţionarea întregului sistem sau funcţiile de transfer ale blocurilor componente ale sistemului.

Pentru un sistem de ordinul întîi a cărui funcţie de transfer este

$$H(s)=\frac{K}{Ts+1}=\frac{Y(s)}{U(s)},$$

se obţine schema analogică dacă scriem această relaţie sub forma

$$Y(s)=\frac{K}{T}\cdot\frac{U(s)}{s}-\frac{1}{T}\cdot\frac{Y(s)}{s}. \qquad (13.13)$$

Schema pentru modelarea relaţiei (13.13) este prezentată în figura 13.26.

În cazul în care funcţia de transfer a sistemului este dată sub forma

$$H(s)=\frac{b_2s^2+b_1s+b_0}{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}=\frac{Y(s)}{U(s)},$$

se poate întocmi schema analogică dacă se scrie următoarea relaţie

$$sY(s)=b_2U(s)-a_2Y(s)+[b_1U(s)-a_2Y(s)]\cdot\frac{1}{s}+[a_0U(s)-b_0Y(s)]\frac{1}{s^2}. \qquad (13.14)$$

Scanned with OKEN Scanner

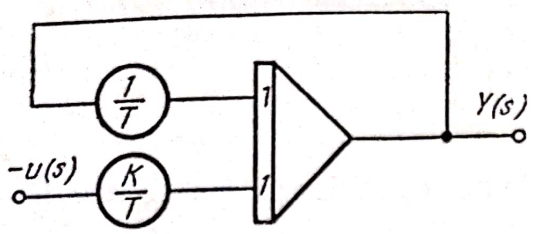


Fig. 13.26. Modelul analogic pentru funcția de transfer a sistemului de ordinul întîi.

Prin efectuarea unor operații de integrare succesivă se alcătuiește schema analogică ca în figura 13.27.

În această schemă integratoarele efectuează și operația de însumare iar prin intermediul potențiometrelor α_i se introduc parametrii sistemului:

$$\alpha_1=a_0;\ \alpha_2=b_0;\ \alpha_3=a_1;$$

$$\alpha_4=b_1;\ \alpha_5=a_2;\ \alpha_6=b_2.$$

Pentru a ușura modelarea funcțiilor de transfer în cazul unor structuri complexe de sisteme automate, schemele analogice pentru cele mai uzuale subsisteme ce compun un sistem automat sînt tabelate. În tabelul 13.2 sînt prezentate schemele analogice pentru unele funcții de transfer uzuale întîlnite în automatică.

Cunoașterea schemei analogice pentru diverse componente ale unui sistem de reglare automată permite ușor întocmirea schemei analogice generale.

Pentru un sistem la care sînt cunoscute funcția de transfer a părții fixate și funcția de transfer a regulatorului se poate ușor întocmi schema analogică.

Exemplul 13.2

Considerăm, pentru exemplificare, un sistem de reglare a cărui schemă funcțională este prezentată în figura 13.28, iar funcțiile de transfer ale celor două blocuri componente sînt:

$$H_R(s)=\frac{K_R(1+sT_1)}{T_1 s}$$

și

$$H_F(s)=\frac{K_f}{(1+sT_f)\ (1+sT_\Sigma)}\ .$$

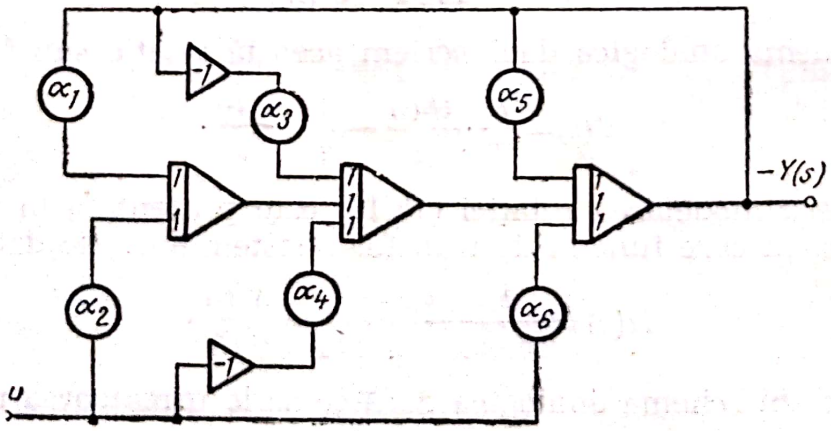
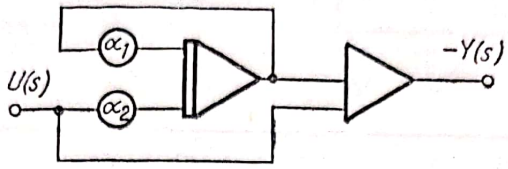
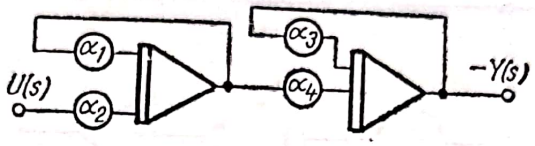
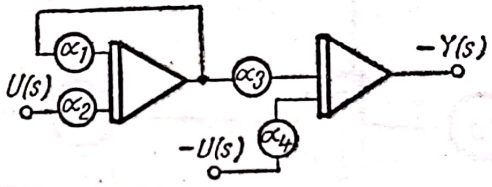
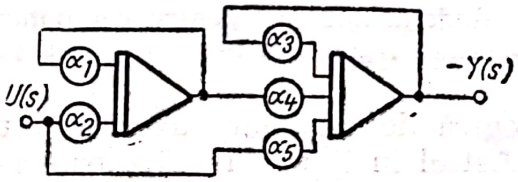
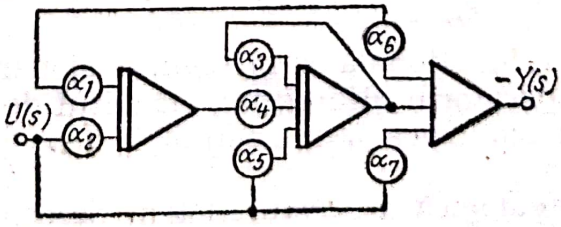


Fig. 13.27. Schema analogică pentru funcția de transfer a sistemului de ordinul doi.

Modelarea analogică a funcțiilor de transfer

Tabelul 13.2

Funcția de transfer	Schema analogică	Valorile potențiometrelor
$H(s)=\dfrac{sT}{1+sT}$		$\alpha_1=\alpha_2=\dfrac{1}{T}$
$H(s)=\dfrac{1}{(1+sT_1)\,(1+sT_2)}$		$\alpha_1=\alpha_2=\dfrac{1}{T_1}$ $\alpha_3=\alpha_4=\dfrac{1}{T_2}$
$H(s)=\dfrac{1+sT_1}{1+sT_2}\ (T_2>T_1)$		$\alpha_1=\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$ $\alpha_3=\dfrac{T_2-T_1}{T_2}$ $\alpha_4=\dfrac{T_1}{T_2}$
$H(s)=\dfrac{s}{(1+sT_1)\,(1+sT_2)}$		$\alpha_1=\dfrac{1}{T_1}$ $\alpha_2=\dfrac{1}{T_1^2}$ $\alpha_3=\alpha_4=\dfrac{1}{T_2}$ $\alpha_5=\dfrac{1}{T_1T_2}$
$H(s)=\dfrac{s(1+sT_1)}{(1+sT_2)\,(1+sT_3)}$		$\alpha_1=\alpha_2=\dfrac{1}{T_2}$ $\alpha_3=\dfrac{1}{T_3}$ $\alpha_4=\dfrac{T_1-T_2}{T_2T_3^2}$ $\alpha_5=\dfrac{T_1}{T_2T_3^2}$ $\alpha_6=\dfrac{T_1-T_2}{T_2T_3}$ $\alpha_7=\dfrac{T_1}{T_2\,T_3}$

Scanned with OKEN Scanner

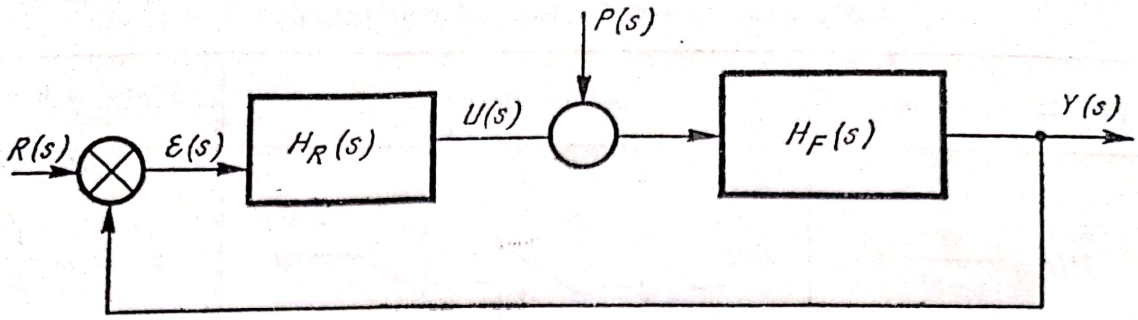


Fig. 13.28. Schema simplificată a unui sistem de reglare automată.

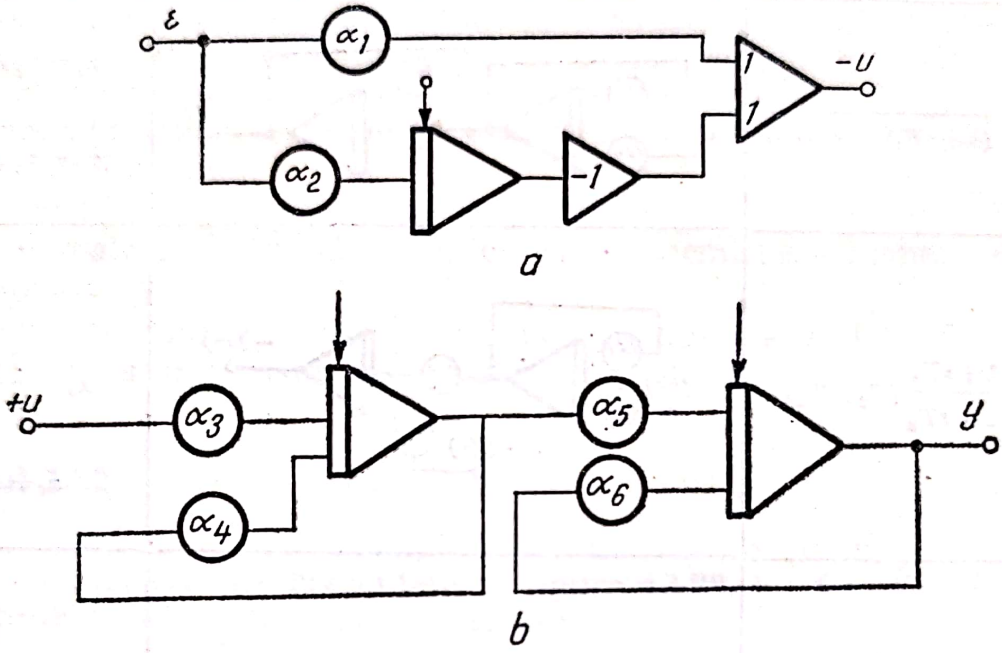


Fig. 13.29. Modelul analogic pentru componentele sistemului:
a — pentru regulatorul *PI*; *b* — pentru partea fixată.

Schema analogică de modelare a celor două funcţii de transfer se realizează simplu. Astfel în figura 13.29, *a* este reprezentată schema principială de modelare a funcţiei de transfer a regulatorului, iar în figura 13.29, *b* schema principială de modelare a funcţiei de transfer a părţii fixate:

$$\alpha_1 = K_R; \qquad \alpha_2 = \frac{K_R}{T_i}; \qquad \alpha_3 = \frac{K_f}{T_f};$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{T_f}; \qquad \alpha_5 = \frac{1}{T_\Sigma}; \qquad \alpha_6 = 1/T_\Sigma.$$

Pentru modelarea funcţională a întregului sistem automat se simulează de asemenea comparatorul diferenţial, circuitul de reacţie negativă şi perturbaţia. Schema analogică a întregului sistem modelat este prezentată în figura 13.30.

Modelarea analogică a acestui sistem permite a efectua atît analiza cît şi proiectarea algoritmului optim de proiectare. Astfel, prin modificarea parametrilor regulatorului, respectiv modificarea potenţiometrelor ce determină valorile α_1 şi α_2 pentru o intrare dată şi o perturbaţie cunoscută, se urmăreşte răspunsul sistemului.

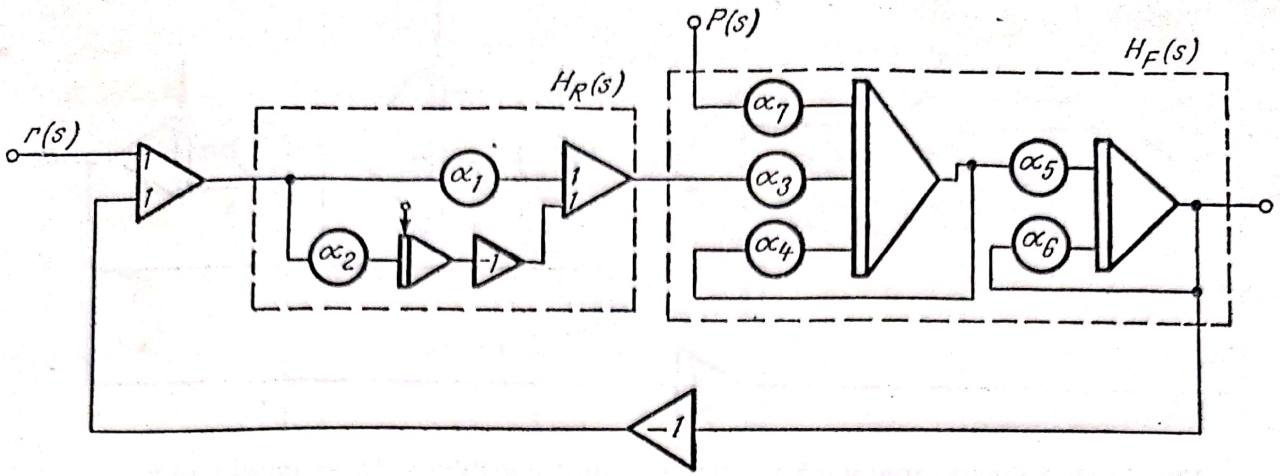


Fig. 13.30. Schema analogică a întregului sistem considerat în exemplul 13.2.

Exemplul 13.3

Pentru un sistem a cărui parte fixată este caracterizată de funcția de transfer

$$H_F(s)=\frac{10}{(1+0{,}5s)\ (1+0{,}02s)},$$

conform variantei Kessler a criteriului modulului, rezultă un algoritm de reglare de tip *PI* avînd funcția de transfer

$$H_R(s)=\frac{1{,}25\ (1+0{,}5s)}{0{,}5s}.$$

Prezența unor constante mici de timp în funcția de transfer implică folosirea unor valori mari ale coeficienților de amplificare pentru blocurile operaționale. În acest scop se micșorează scara de timp de 10 ori ($t'=10\,t$) sau în funcția de transfer se înlocuiește $s=10\,s'$, unde s' este noua variabilă:

$$H_F(s')=\frac{10}{(1+5s')\ (1+0{,}2s')};$$

$$H_R(s')=\frac{1{,}25\ (1+5s')}{5s'}.$$

Modelînd sistemul descris prin cele două funcții de transfer în variabila s' se obține schema din figura 13.30, însă coeficienții α_i au valorile α_i':

$$\alpha_1'=K_R=1{,}25;\qquad \alpha_2'=\frac{K_R}{T_i}=1{,}25\cdot 0{,}2=0{,}25;\qquad \alpha_3'=\frac{T_1'}{K_f'}=\frac{10}{5}=2$$

$$\alpha_4'=\frac{1}{T_f'}=\frac{1}{5}=0{,}2;\qquad \alpha_5'=\alpha_6'=\frac{1}{T_\Sigma'}=\frac{1}{0{,}2}=5.$$

Deoarece este necesar ca $\alpha_i\leqslant 1$ (utilizînd potențiometre cu factor de transfer subunitar), se impune utilizarea unor coeficienți α_i'', schema generală de modelare a sistemului fiind prezentată în figura 13.31.

Scanned with OKEN Scanner

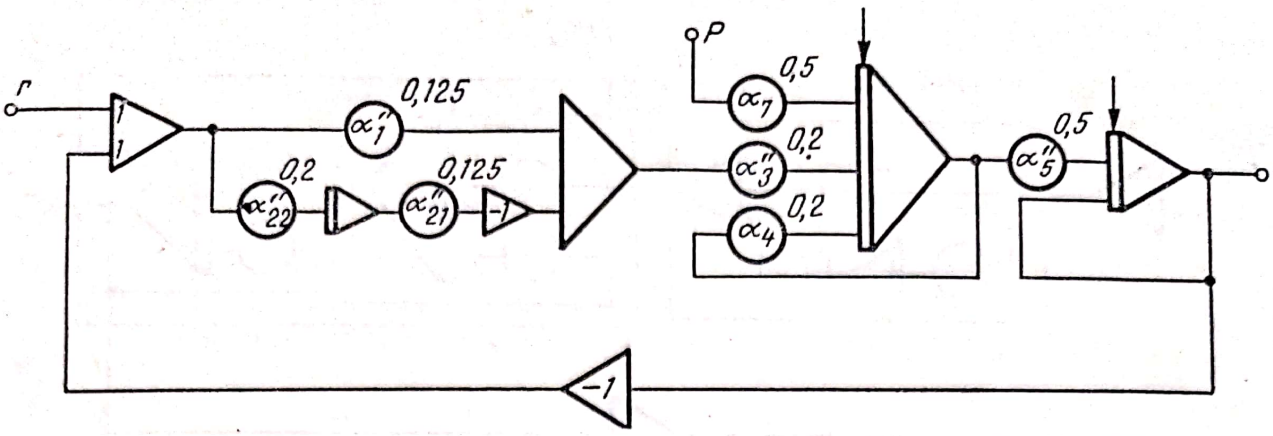


Fig. 13.31. Schema analogică pentru sistemul considerat în exemplul 13.3.

Prin modificarea parametrilor de acord, respectiv a potențiometrelor α_1'' și α_{21}'', și înregistrarea răspunsului se urmărește influența acestor parametri asupra răspunsului și, evident, se pot determina valorile lor optime în cazul în care performanțele obținute corespund cerințelor impuse.

Pentru acordarea optimă a unui regulator se poate utiliza o schemă de simulare ca cea prezentată în figura 13.32. După simularea sistemului, semnalul ce reprezintă eroarea sistemului este ridicat la pătrat prin intermediul unui bloc neliniar de înmulțire iar rezultatul este integrat. Modificarea nominală a parametrilor de acord prin schimbarea potențiometrelor corespunzătoare acestora va conduce la minimizarea criteriului de performanță impus, respectiv minimizarea valorii integralei erorii pătratice.

Cu ajutorul calculatorului analogic pot fi simulate, de asemenea, sistemele neliniare. Utilizarea blocurilor operaționale liniare și neliniare permite întocmirea unor scheme analogice și pentru sistemele neliniare. Simularea analogică a sistemelor neliniare reprezintă o metodă eficientă pentru analiza sistemelor neliniare, fiind posibilă simularea directă a diverselor neliniarități ce apar în funcționarea sistemelor neliniare.

În tabelul 13.3 se prezintă schemele analogice pentru simularea unor neliniarități statice frecvent întîlnite în funcționarea sistemelor neliniare.

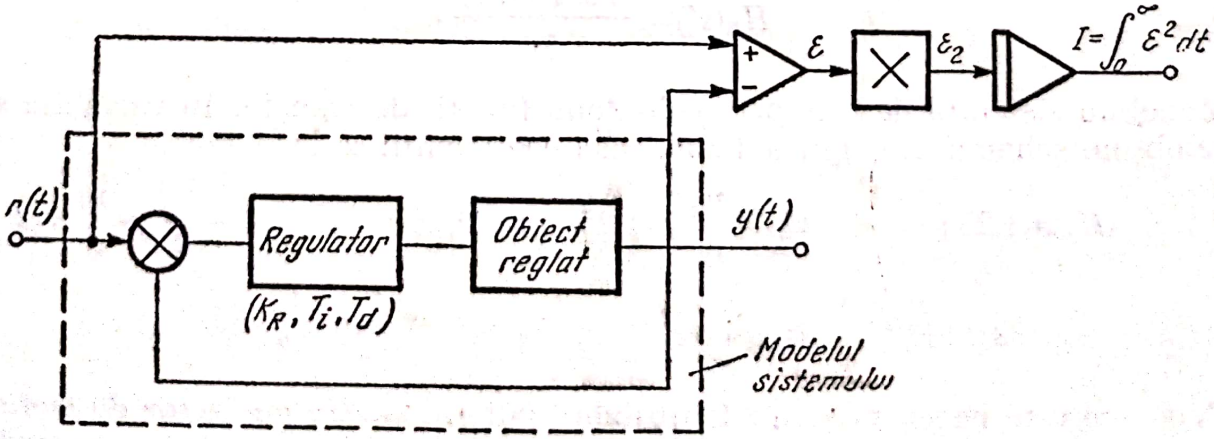
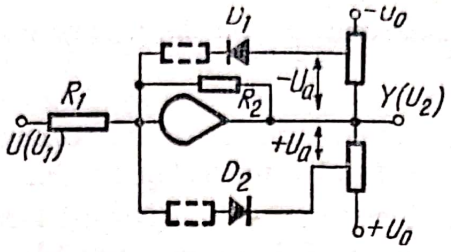
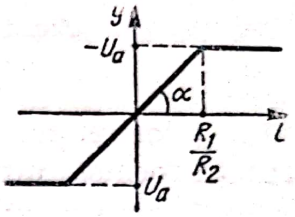
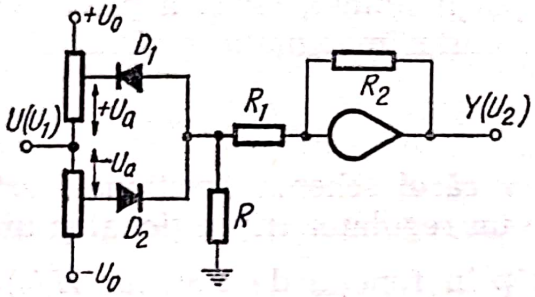
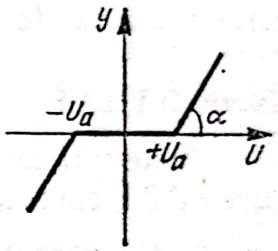
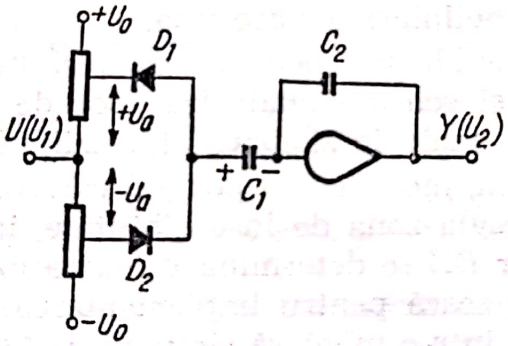
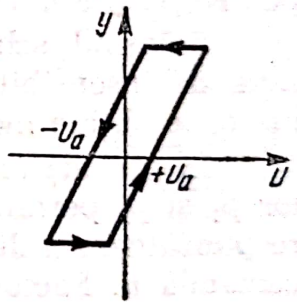
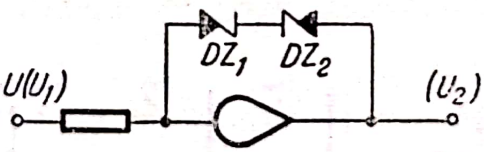
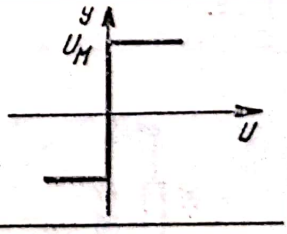
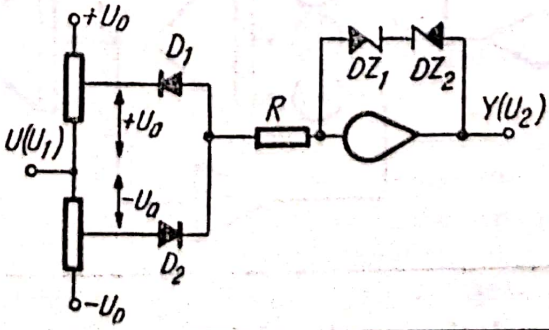
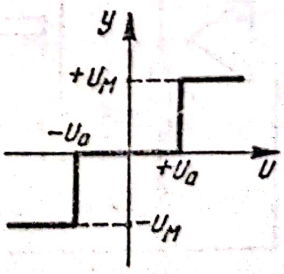


Fig. 13.32. Schemă pentru acordarea optimă a unui regulator prin simulare analogică.

Modelarea analogică a neliniarităților tip

Denumirea neliniarității	Schema analogică	Caracteristica
Saturație		
Zona de insensibilitate		
Histerezis		
Releu ideal		
Releu cu zona de insensibilitate		

Scanned with OKEN Scanner

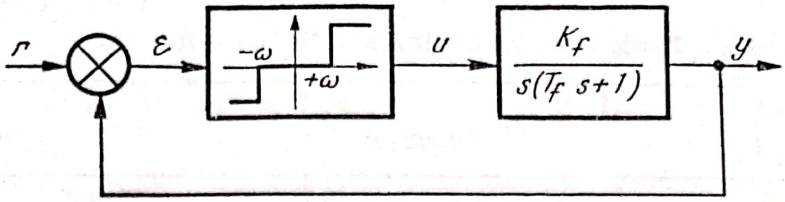


Fig. 13.33. Schema unui sistem de reglare cu regulator tripoziţional.

Sînt folosite pentru modelare amplificatoare operaţionale prevăzute cu reacţii formate din elemente de circuit *RC* şi diode.

Pentru simularea unui sistem ce conţine atît blocuri funcţionale neliniare cît şi blocuri funcţionale liniare, se aleg blocurile operaţionale necesare simulării atît a părţii liniare, cît şi a părţii neliniare şi se interconectează conform modelului matematic general al sistemului.

Exemplul 13.4

Sistemul automat a cărui schemă funcţională este prezentată în figura 13.33, care conţine un regulator tripoziţional şi un obiect reglat (partea fixată) caracterizat prin funcţia de transfer $H_f(s)=\frac{K_f}{s(T_f s+1)}$, poate fi simulat pe un calculator analogic utilizînd o schemă corespunzătoare pentru părţile liniară şi neliniară ale acestuia.

Folosind schema analogică pentru neliniaritatea de tip releu cu zonă de insensibilitate şi schema analogică uşor de realizat a părţii liniare, se obţine modelul analogic al sistemului neliniar ca în figura 13.34.

În schema analogică, modificarea poziţiei cursoarelor potenţiometrelor p_1 şi p_2 permite a regla zona de insensibilitate, iar prin alegerea corespunzătoare a diodelor *DZ* se determină valoarea maximă a mărimii de comandă u. Factorii de scară pentru implementarea schemei pe un calculator analogic se aleg într-o manieră similară ca în cazul sistemelor liniare.

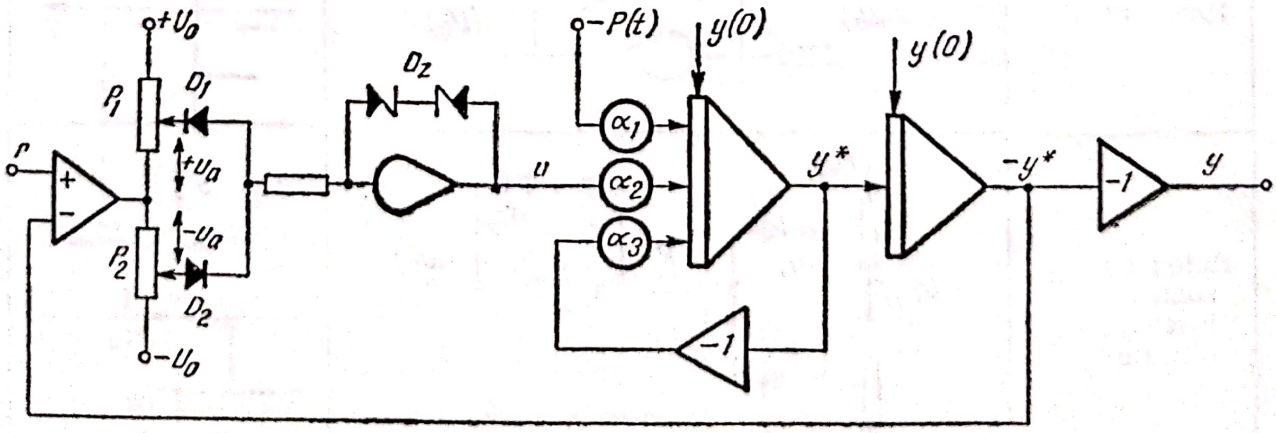


Fig. 13.34. Schema analogică a sistemului considerat în exemplul 13.4.

Scanned with OKEN Scanner

13.6.2. SIMULAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE REGLARE AUTOMATĂ

Calculatoarele numerice pot fi utilizate pentru analiza și sinteza sistemelor automate, fie prin programarea directă a anumitor calcule specifice analizei și sintezei, fie prin utilizarea unor programe generale de simulare numerică.

Programarea directă este realizată de obicei în limbaje superioare, FORTRAN sau ALGOL, fiind deci posibilă în toate cazurile în care calculatorul utilizat dispune de compilatorul corespunzător. Organizarea unor biblioteci de programe sau subprograme pentru calculul răspunsului sistemelor automate, pentru obținerea caracteristicilor de frecvență, pentru calculul matricei de tranziție etc., ușurează rezolvarea problemelor de analiză și sinteză prin programarea directă a calculatoarelor numerice.

Utilizarea calculatoarelor de mare capacitate a permis scrierea unor programe generale de simulare a sistemelor automate. Acestea permit utilizatorului să întreprindă studii complexe asupra comportării sistemului, să obțină cu ușurință răspunsul în timp sau în frecvnță, precum și alte diagrame trasate direct cu ajutorul consolelor de afișare.

Cele mai uzuale programe de simulare numerică elaborate și implementate pe diverse calculatoare numerice prezintă o serie de avantaje, determinînd o superioritate a tehnicilor de simulare numerică în raport cu tehnicile de simulare analogică. Printre avantajele simulării numerice remarcăm:

— operația de programare (pregătirea modelului pentru simularea pe calculatorul numeric) este simplă și rapidă chiar și pentru nespecialiști în domeniul programării calculatoarelor;

— eliminarea normalizării variabilelor modelului (lipsa factorilor de scară), valorile minime și maxime de amplitudine admise fiind similare cu cele admise pentru reprezentarea numerelor în calculatorul numeric utilizat;

— creșterea preciziei și a fiabilității modelului;

— timpul de introducere a modelului pe calculator este incomparabil mai mic decît timpul necesar cablării sale analogice;

— afișarea rezultatelor se poate realiza cu ajutorul consolelor de afișare (display).

Simularea numerică se poate face pe baza modelului matematic general al sistemului sau pe baza schemei funcționale, unde fiecare subsistem component poate fi simulat. Pentru aceasta se pot utiliza fie programe specializate pentru simulare fie *limbaje de simulare.*

Limbajele de simulare a sistemelor continue dezvoltate pînă în prezent sînt *orientate pe blocuri funcționale* (simulatoare analog-numerice) sau *pe blocuri funcționale și expresii.*

În primul caz limbajul furnizează un număr de blocuri funcționale și un program adecvat necesar specificării interconexiunii între blocuri.

În cel de-al doilea caz, al *simulatoarelor numerice*, limbajul furnizează facilități de simulare pe blocuri printr-un program specific de intrare, alcătuit din expresii și în plus importante facilități de modelare algebrice și logice.

Scanned with OKEN Scanner

Simulatoarele numerice (orientate pe blocuri și expresii), ca orice limbaj automat, dispun de compilatoare adecvate în vederea traducerii.

În literatură [24, 38] sînt prezentate mai multe limbaje de simulare a sistemelor dinamice (CSMP, LSSC, SELFRIDGE, PACTOLUS etc.).

În cele ce urmează se prezintă modul de utilizare a limbajului SIMSID pentru analiza și sinteza sistemelor de reglare automată, implementat pe calculatorul FELIX C-256 din cadrul centrului de calcul al I.P.B.

Programul SIMSID conține o serie de subrutine scrise în limbajul FORTRAN, care permit calculul răspunsului unui sistem dinamic pe cale numerică. Prin intermediul subrutinei principale SIMSID sînt apelate în funcție de complexitatea sistemului un număr mai mare sau mai redus de subrutine cu ajutorul cărora se simulează sistemul. Astfel sînt apelate subrutina DERFUN în cadrul căreia se rezolvă ecuații diferențiale de ordinul întîi folosind metoda RUNGE-KUTTA de ordinul patru, subrutina INTRARE care asigură introducerea tuturor datelor referitoare la sistemul simulat, subrutina IEȘIRE care asigură tipărirea și afișarea rezultatelor simulării, subrutina PARMOD care permite modificarea parametrilor modelului simulat și alte subrutine care descriu funcționarea unor neliniarități tip, cum ar fi: ELIM, RELEU, INEG etc.

Pot fi scrise de asemenea și alte subrutine, în funcție de tipul subsistemelor ce intervin în structura de sistem ce trebuie simulat, subrutine ce pot fi apelate în cadrul subrutinei XVAL.

Pentru descrierea problemelor de simulat se folosesc variabilele Y(I) pentru ieșirile integratoarelor și variabilele X(I) pentru ieșirile elementelor neintegratoare. Descrierea problemelor de simulat se realizează în cadrul subrutinelor DERFUN și XVAL. Pot fi folosite pentru descrierea funcționării sistemului de simulat diverse modele, ca: funcții de transfer, ecuații diferențiale, ecuații de stare sau grafuri de semnal.

Forma generală a modelului matematic ce poate fi simulat cu ajutorul programului SIMSID este:

$$\begin{aligned} Y_i &= F_i(Y_1, Y_2, \ldots, Y_{NJ+1}, X_1, X_2, \ldots, X_{Nx}, P_1, P_2, \ldots, P_{Np}); \\ X_j &= G_j(Y_1, Y_2, \ldots, Y_{NJ+1}, X_1, X_2, \ldots, X_{Nx}, P_1, P_2, \ldots, P_{Np}); \\ i &= 1, 2, \ldots NY; \\ j &= 1, 2, \ldots NX. \end{aligned} \tag{13.15}$$

Programul principal în cadrul căruia se apelează subrutina SIMSID are forma:

```
IXVAL=1
IER=0
CALL SIMSID (IXVAL, IER)
STOP
END
```

Folosirea subrutinei XVAL în cadrul căreia se introduc relațiile de definiție a variabilelor X(I) implică IXVAL=1, iar în cazul în care această subrutină nu este utilizată variabila IXVAL ia valoarea zero (IXVAL=0). Variabila IER ia valoarea 1 (IER=1) în cazul în care utilizatorul dorește

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 13.4

Organizarea cartelei cu parametri de control

Coloana	Specificații
1...2	Un non zero implică citirea constantelor referitoare la integrare: pasul de integrare, valoare inițială a variabilei timp, valoarea finală etc.
3...4	Un non zero trecut în aceste coloane determină citirea condițiilor inițiale pentru toate variabilele Y
5...6	Un non zero determină citirea variabilelor parametrilor
7...8	Un non zero determină citirea cartelelor referitoare la tipărirea și trasarea grafică a soluțiilor
9...10	Un non zero trecut în aceste coloane determină suprimarea tipăririi constantelor de integrare a condițiilor inițiale pentru variabilele X și Y și a valorilor parametrilor
11...12	Acest parametru este folosit numai cînd se dorește o nouă rulare a aceleiași probleme. Un non zero în aceste coloane determină reinițializarea variabilelor Y pentru noua rulare (variabilele Y primesc aceleași valori inițiale ca în rularea anterioară) Un zero trecut în această zonă determină continuarea simulării de la punctul unde s-a terminat
13...14	Un non zero trecut în aceste coloane specifică existența unuia sau mai multor elemente cu timp mort. Dacă nu există elemente cu timp mort în sistemul de simulat, în această zonă a cartelei se trece valoarea zero
15...16	Un non zero trecut în această zonă implică chemarea subrutinei PARMOD și determinarea execuției programului
17...18	Un zero (0) trecut în această zonă determină ca fiecare ieșire care se trasează grafic să aibă factor de scară propriu Deci în acest caz pentru fiecare ieșire se calculează un factor de scară. Un unu (1) trecut în această zonă determină calcularea unui factor de scară comun pentru toate ieșirile care se trasează grafic Un doi (2) trecut în această zonă determină ca toate ieșirile sistemului ce trebuie trasate grafic să aibă un factor de scară comun Utilizatorul trebuie însă să indice limita minimă și maximă în care variază variabilele de ieșire ce trebuie trasate grafic
21...80	Se descrie problema

Scanned with OKEN Scanner

tipărirea tuturor variabilelor Y și X și ia valoarea zero (IER=0) dacă nu se dorește tipărirea tuturor variabilelor.

Etapele simulării unui sistem cu ajutorul programului SIMSID sînt:

— formularea matematică a problemei sub formă accesibilă pentru programul SIMSID;

— definirea subrutinelor necesare simulării în funcție de tipul subsistemelor componente;

— se definesc condițiile inițiale, valorile parametrilor, valorile timpilor inițial și final, pasul de integrare etc.;

— prepararea cartelelor de date.

În cadrul programului SIMSID pot fi descrise problemele de simulat sub formă de schemă bloc, funcții de transfer, ecuații de stare, grafuri de semnal. Important este a obține relații în cadrul cărora se evidențiază variabilele Y(I) și X(I).

Gradul de complexitate al sistemului determină numărul și tipul subrutinelor ce trebuie aflate în cadrul programului.

Pregătirea cartelelor pentru rularea unui program SIMSID presupune pe de o parte descrierea sistemului cu ajutorul instrucțiunilor FORTRAN folosind variabilele X și Y, iar pe de altă parte pregătirea cartelelor care definesc intrările, ieșirile, parametrii etc.

Prima cartelă conține nouă parametri de control și o zonă de comentariu și are organizarea indicată în tabelul 13.4.

Pentru prima rulare a oricărei probleme, parametrii de control 1 . . . 4 sînt unu (1).

O cartelă albă plasată după cartelele de date indică terminarea rulării. Cartela cu opțiunile trebuie să fie prezentă la fiecare rulare a problemei. Următoarele cartele de date pot fi sau nu prezente în funcție de cerințele problemei, însă trebuie respectată ordinea lor.

Cartela a doua conține constantele pentru integrare, ce trebuie inclusă pentru prima rulare a oricărei probleme. Modul de organizare a datelor pe această cartelă este dat în tabelul 13.5.

A treia cartelă conține valorile inițiale pentru toate variabilele Y din cadrul problemei. Aceste condiții inițiale se introduc cîte 8 pe o cartelă cu punct perforat în zone de cîte 10 coloane. Un număr mai mare de condiții inițiale implică utilizarea unui număr corespunzător de cartele ce cuprind toate aceste condiții inițiale.

Pentru prima rulare, chiar dacă condițiile inițiale sînt zero, acestea trebuie trecute pe cartelă.

După cartelele ce conțin condițiile inițiale se introduc cartelele ce conțin parametrii problemei. Aceste cartele se folosesc, evident, numai atunci cînd se impune ca parametrii să fie citiți de pe cartelele de date.

Se trec maximum 8 (opt) parametri pe o cartelă în zone de cîte 10 coloane cu punctul perforat.

1 10 11 20 21 30 31 40 41 50 51 60 61 70 71 80

Prezența elementelor cu timp mort implică introducerea cartelelor ce definesc datele acestor elemente. Pe cartela 1 din cadrul celor patru cartele se definesc elementele cu timp mort, în coloanele 1 . . . 5 se trece

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 13.5

Organizarea cartelei cu constantele de integrare

Coloana	Format	Specificații
1...5	I5	Se trece numărul de variabile Y sau ordinul sistemului: $1 \lhd NY \leq 20$
6...10	I5	Se trece aliniat la dreapta numărul de variabile X prezente în instrucțiunile care descriu problema: $0 \lhd NX \leqslant 50$
11...15	I5	Se trece numărul de parametri utilizați în cadrul instrucțiunilor ce definesc problema: $0 < NP \leq 50$
16...20	I5	Se trece un număr care indică la ce număr de pași să fie tipărite valorile variabilelor cerute. Numărul trecut trebuie să fie mai mare sau cel mult egal cu pasul de integrare
21...30	F10.0	Se trece valoarea inițială a variabilei timp de unde începe integrarea
34...40	F10.0	Se trece valoarea finală a variabilei timp unde se termină procesul de integrare
41...50	F10.0	Se trece pasul de integrare

numărul elementelor cu timp mort. Dacă acest număr este zero, aceste cartele sînt omise.

Pe cartelele 2...4 se trec toate datele referitoare la elementele cu timp mort. Aceste date se trec în zone de cîte 20 coloane cu următoarea subdiviziune în cadrul acestor zone:

Coloanele 1...3 — Se trece indicele pentru intrarea elementului cu timp mort. Intrarea poate fi de la un element cu ieșirea X sau Y.

Coloanele 4...6 — Se trece indicele variabilei X asociată ieșirii elementului cu timp mort.

Coloanele 7...9 — Se trece zero dacă intrarea în elementul cu timp mort se face de la un bloc neintegrator și se trece un număr diferit de zero dacă intrarea în element se face de la un bloc integrator (cu ieșirea Y).

Coloanele 10...20 — Se trece valoarea timpului mort. Această valoare trebuie să fie un număr întreg de pași de integrare.

După aceste cartele se introduc cartelele cu specificații asupra ieșirii sistemului în număr de patru. Astfel, pe cartela 1 în 10 zone de cîte cinci

Scanned with OKEN Scanner

coloane se trec indicii variabilelor Y ale căror valori dorim să le tipărim. Indicii se aliniază la dreapta în zonele respective.

Cartela a doua conține indicii variabilelor Y ale căror valori dorim să le reprezentăm grafic. Se organizează în mod similar ca prima cartelă, adică în zece zone a cîte cinci coloane.

În cadrul cartelei a treia se trec indicii variabilelor X ale căror valori dorim să le obținem tipărite.

Pe cartela a patra se trec indicii variabilelor X pe care dorim să le trasăm grafic.

Toți acești indici ai variabilelor X se aliniază la dreapta în cadrul a zece zone a cîte cinci coloane.

Ultima cartelă de date pentru rularea unui program folosind SIMSID este cartela care conține informații despre modul de trasare grafică. Această cartelă se folosește numai dacă în coloana (18) de pe cartela cu parametri de control este trecută valoarea 2. Modul de înscriere a limitărilor pe această cartelă este următorul:

Coloanele 1 . . . 10 — Se trece valoarea minimă a variabilei ce dorim să fie trasată grafic.

Coloanele 11 . . . 20 — Se trece valoarea maximă a variabilei ce dorim să fie trasată grafic.

Folosind acest mod de introducere a datelor, utilizatorul, oricît de complexă ar fi problema, nu va folosi mai mult de 20 cartele de date. Limitările privind ordinul sistemului de simulat și numărul de parametri pot fi eliminate în condițiile utilizării unui calculator cu memorie disponibilă mai mare.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 14

PROIECTAREA SISTEMELOR DE REGLARE AUTOMATĂ. APLICAȚII NUMERICE

Pentru a ilustra modul de alegere și dimensionare a echipamentelor de automatizare pentru procese tehnologice date, se vor prezenta în cadrul acestui capitol cîteva exemple privind proiectarea unor sisteme de reglare. Vor fi aplicate metodele și criteriile de alegere și acordare a echipamentelor de automatizare pentru procese tehnologice lente și rapide.

Algoritmul de proiectare constă în următoarele etape:

— se definește tema de proiectare, indicîndu-se caracteristicile procesului și performanțele ce se impun sistemului;

— se stabilește modelul matematic al procesului, calculîndu-se parametrii caracteristici ai acestuia;

— se aleg traductorul de măsură și elementul de execuție ținînd seama de tipul procesului, de performanțele impuse sistemului, conform cu indicațiile prezentate în capitolul 6;

— se alege tipul regulatorului și se acordează optim ținînd seama de amplitudinea și frecvența perturbațiilor precum și de tipul intrării;

— se verifică performanțele sistemului proiectat.

14.1. PROIECTAREA UNUI SISTEM DE REGLARE A TURAȚIEI UNUI MOTOR DE CURENT CONTINUU

Tema de lucru constă în proiectarea unui sistem de reglare automată a turației unui motor de curent continuu cu excitație independentă comandat pe indus, utilizînd ca element de execuție o punte cu tiristoare cu următoarele date inițiale:

— puterea nominală	P_n=11 kW;
— tensiunea nominală	U_n=440 V;
— randamentul	η=0,77;
— turația nominală	n=300 rot/min;
— momentul de inerție al rotorului	GD_r^2 =2,5 kgm^2;

Scanned with OKEN Scanner

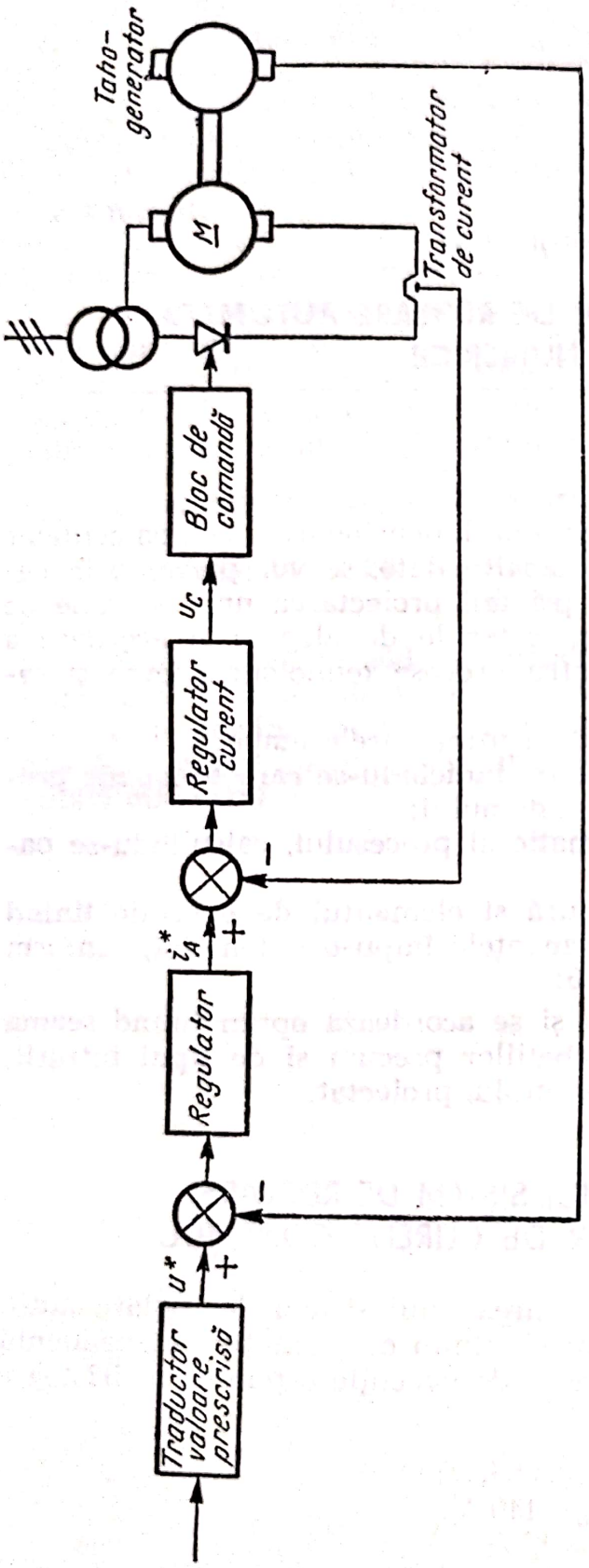


Fig. 14.1. Schema generală de reglare în cascadă a turației și curentului unui motor de c.c.

— momentul de inerție al sarcinii
$GD_s^2 = 1{,}5$ kgm²;
— gama de reglare a turației
$\Delta_n = 30 \ldots 3\,000$ rot/min;
— perturbația principală este cuplul rezistent considerat ca o treaptă.

Performanțele impuse sistemului de reglare:

$\sigma \leqslant 8\%$

pentru intrare treaptă

$\varepsilon_{st} = 0$

pentru intrare treaptă

$\varepsilon_{st} = 0$

pentru variații treaptă ale cuplului de sarcină.

Curentul de pornire se impune a fi limitat la valoarea $I_{lim} = 1{,}8\ I_n$. Precizia reglării turației va fi mai mică de $\pm 5\%$ (raportată la turația minimă cînd sarcina variază de la zero la sarcina nominală). Tensiunea rețelei variază cu $\pm 10\%$ iar temperatura mediului variază între 10 și 40°C.

1. *Întocmirea schemei funcționale a sistemului.* Pentru reglarea turației se alege o schemă de reglare în cascadă (fig. 14.1). Mărimea de referință pentru turație este furnizată de un traductor de valoare prescrisă și este comparată cu valoarea efectivă a turației, care este transmisă prin calea de reacție de un generator tahometric. Mărimea de ieșire a regulatorului de turație reprezintă valoarea prescrisă pentru regulatorul de curent rotoric inclus în circuit.

Valoarea efectivă a acestei mărimi reglate auxiliare i_A este sesizată de un traductor de

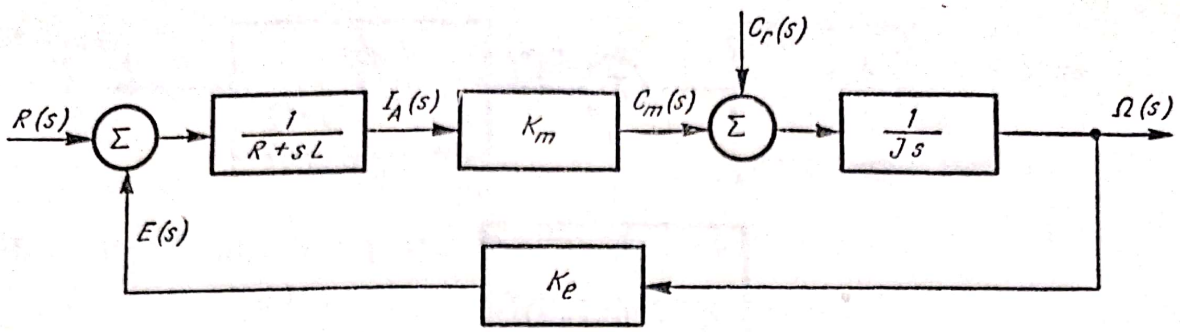


Fig. 14.2. Schema echivalentă a motorului de curent continuu cu excitație independentă.

nivel pentru curentul rotoric și este transmisă la intrarea regulatorului de curent. Regulatorul curentului rotoric produce o tensiune continuă de comandă u_c, care prin intermediul unui echipament de emitere a impulsurilor pentru aprinderea tiristoarelor comandă mutatorul și modifică prin acesta tensiunea de alimentare a motorului de curent continuu.

2. *Identificarea procesului tehnologic.* Procesul supus automatizării în acest caz este motorul electric, al cărui model matematic a fost stabilit în capitolul 2, și poate fi reprezentat ca în figura 14.2 în condițiile în care curentul de excitație este constant. În acest caz motorul se consideră ca sistem monovariabil, având ca intrare tensiunea u de alimentare a rotorului și ca ieșire viteza unghiulară Ω (turația). Perturbația principală ce se impune a fi luată în considerare este cuplul rezistent C_r.

Funcția de transfer a motorului poate fi scrisă ca produs al funcțiilor $H_1(s)$ și $H_2(s)$:

$$H_1(s)=\frac{I_A(s)}{U(s)}=\frac{\frac{T_m}{R}s}{(T_m s+1)(Ts+1)}; \tag{14.1}$$

$$H(s)=\frac{\Omega(s)}{I_A(s)}=\frac{R}{K_e T_m s}; \tag{14.2}$$

$$H(s)=\frac{\Omega(s)}{U(s)}=H_1(s)\cdot H_2(s)=\frac{\frac{1}{K_e}}{(T_m s+1)(Ts+1)}; \tag{14.3}$$

unde: $T_m=\frac{J\cdot R}{K_m\cdot K_e}$ este constanta de timp electromecanică;

$T=\frac{L}{R}$ — constanta de timp electrică a indusului.

Considerînd ca mărime intermediară curentul rotoric I_A și mărimea de ieșire turația, după unele transformări ale schemei date în figura 14.2, modelul matematic al motorului ca obiect supus automatizării poate fi reprezentat ca în figura 14.3. Ținînd seama de datele de proiectare rezultă valorile pentru constantele de timp ale procesului.

Rezistența indusului se compune din rezistența rotorică a motorului, rezistența cablului de racord și rezistența internă a sursei. Curentul nominal rotoric se calculează cu relația

$$I_n=\frac{P_n}{\eta\cdot U_n}=\frac{11\,000}{0{,}77.440}=31{,}5\ \text{A}, \tag{14.4}$$

Scanned with OKEN Scanner

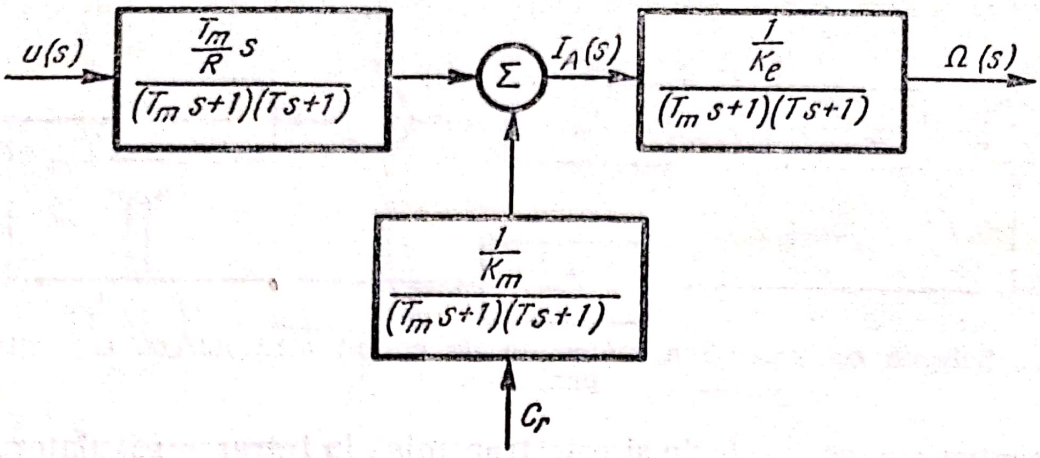


Fig. 14.3. Modelul matematic al motorului de c.c.

iar curentul limită este dat de relația

$$I_{lim}=1{,}8\ I_n=1{,}8\cdot 31{,}5=56{,}7\ \text{A}. \tag{14.5}$$

Dacă se admite căderea de tensiune pe bobina de filtraj a circuitului cu redresare în momentul pornirii egală cu 10 V, rezultă rezistența

$$R_b=\frac{\Delta U_b'}{I_{lim}}=\frac{10}{56{,}7}=0{,}175\ \Omega.$$

Rezistența rotorică se calculează cu relația

$$R_r=0{,}055\cdot\frac{U_n}{I_n}=0{,}055\cdot\frac{440}{31{,}5}=0{,}77\ \Omega.$$

Inductanța indusului motorului fără înfășurare de compensare se calculează cu relația [70]

$$L_r=\frac{5{,}6\ U_n}{n_n\cdot p\cdot I_n}=\frac{5{,}6\cdot 440}{3\,000\cdot 2\cdot 31{,}5}=13\ \text{mH},$$

iar inductanța bobinei de filtrare se stabilește din condiția de obținere a unui regim de curent neîntrerupt la unghiuri de comandă între 0 și 90° în regim de mers în gol. În aceste condiții rezultă $L_b=91$ mH. Rezistența bobinei de filtrare se calculează apreciind că $R_b\cdot I_{lim}=10$ V, ceea ce conduce la o valoare, $R_b=0{,}175\ \Omega$.
Neglijînd inductanța și rezistența transformatorului de alimentare rezultă

$$L=L_r+L_b=13\ \text{mH}+91=104\ \text{mH}$$

și

$$R=R_r+R_b=0{,}77+0{,}175=0{,}945.$$

Constanta de timp a indusului se calculează cu ajutorul relației

$$T=\frac{L}{R}=\frac{104\cdot 10^{-3}}{0{,}945}=123\ \text{ms}.$$

Constanta electromecanică se calculează cu relația

$$T_m=\frac{GD^2}{375}\cdot\frac{R}{(K_e\cdot\varphi)\cdot(K_m\cdot\varphi)},$$

Scanned with OKEN Scanner

în care:

$$K_e \cdot \varphi = \frac{e}{n} = \frac{u_a - R_r \cdot i}{n} = \frac{440 - 0{,}77 \cdot 31{,}5}{3\,000} = 0{,}1419 \text{ V/rot/min};$$

$$K_m \cdot \varphi = \frac{K_e \cdot \varphi}{1{,}03} = \frac{0{,}142}{1{,}03} = 0{,}141 \text{ kgm/A}.$$

Momentul de giraţie raportat la arborele motorului este:

$$GD^2 = GD^2_{rot} + GD^2_{mec} = 2{,}5 + 1{,}5 = 4 \text{ kgm}^2;$$

$$T_m = \frac{4}{375} \cdot \frac{0{,}945}{0{,}1419 \cdot 0{,}141} = 450 \text{ ms}.$$

3. *Alegerea şi dimensionarea traductoarelor de măsură şi a elementului de execuţie.* Pentru măsurarea curentului rotoric se foloseşte un şunt al cărui factor de transfer se calculează cu relaţia

$$K_{ri} = \frac{u_{e\ trad}}{u_{s\ trad}} \cdot \frac{U_{şunt}}{I_{şunt}} = \frac{10}{0{,}1} \cdot \frac{0{,}075}{100} = 0{,}075 \text{ V/A}.$$

Filtrarea armonicilor de tensiune ale traductorului impune utilizarea unei întîrzieri dată printr-o canstantă de timp T_{ri}=2,5 ms (dacă se admite un factor de atenuare de 4,8 pentru armonica de 300 Hz proprie curentului redresat).

Funcţia de transfer a circuitului de măsură a curentului (neglijînd inductanţa şuntului) rezultă:

$$G_{ri}(s) = \frac{K_{ri}}{T_{ri}s + 1} = \frac{0{,}075}{1 + 0{,}0025s}. \qquad (14.6)$$

Măsurarea turaţiei se face printr-un tahogenerator a cărui funcţie de transfer are forma

$$G_{rn}(s) = \frac{K_{TG}}{1 + T_{rn}s} = \frac{0{,}1}{1 + 0{,}010s}, \qquad (14.7)$$

unde impunem K_{TG}=0,1 V/rot/min, iar T_{rn}=10 ms, fiind aleasă această întîrziere pentru a filtra componentele alternative ale tensiunii tahogeneratorului.

Elementul de execuţie pentru acest proces este format din puntea de redresoare şi dispozitivul de comandă pe grilă.

Pentru datele impuse prin tema de proiectare trebuie dimensionate: transformatorul de alimentare, tiristoarele din puntea redresoare, bobina de filtraj şi circuitele de protecţie la supracurenţi şi supratensiuni. Metodologia de calcul a acestor circuite este prezentată în [70].

În cele ce urmează vom considera puntea redresoare ca un element cu timp mort descrisă prin funcţia de transfer

$$H_p(s) = K_p \cdot e^{-\tau_p s} = 10 \cdot e^{-0{,}00167\, s}, \qquad (14.8)$$

unde τ_p şi K_p se calculează cu relaţiile:

$$\tau_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{f} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{50} = 1{,}67 \text{ ms};$$

$$K_p = \frac{U_{di} \cdot}{180} = \frac{1{,}35 \cdot 440 \cdot 3{,}14}{180} = 10 \text{ V/grad}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Valoarea factorului maxim de amplificare al punții redresoare se calculează pentru $\alpha=90°$.

Dispozitivul de comandă pe grilă se consideră ca element neinerțial și este caracterizat prin funcția de transfer

$$H_{DG}(s)=K_{DCG}=\frac{180°}{16\ V}=11{,}3\ \text{grad/V}.$$

Dacă aproximăm elementul cu timp mort cu un element de întîrziere de ordinul întîi

$$e^{s}\ \tau_p\simeq(1/+s\tau_p).$$

putem scrie funcțiile de transfer corespunzătoare părții fixate ale sistemului sub forma

$$H_{f1}(s)=H_{DG}(s)\cdot H_1(s)\cdot H_p(s)\cdot G_{ri}(s)$$

sau, după înlocuirea expresiilor corespunzătoare ale funcțiilor de transfer elementare, se obține

$$H_{f1}(s)=K_{DCG}\cdot\frac{K_p}{1+s\tau_p}\cdot\frac{K_{ri}}{T_{ri}s+1}\cdot\frac{1}{R_r}\cdot\frac{T_m s}{(T_m s+1)\ (Ts+1)}.$$

După înlocuirea valorilor determinate ale constantelor de timp, factorilor de amplificare și efectuarea calculelor, se obține expresia funcției de transfer a părții fixate, care are ca intrare comanda de la regulatorul de curent și drept ieșire — curentul rotoric

$$H_{f1}(s)=\frac{10}{(1+0{,}00167s)\ (1+0{,}0025s)}\cdot\frac{0{,}450s}{(0{,}450\,s+1)\ (0{,}123s+1)} \qquad (14.9)$$

Funcția de transfer corespunzătoare părții fixate, care are ca intrare curentul rotoric iar ca ieșire turația la axul motorului, este:

$$H_{f2}(s)=G_m(s)\cdot H_2(s)=\frac{K_{TG}}{1+T_{rn}s}\cdot\frac{R_r}{K_e\cdot\varphi}\cdot\frac{1}{T_m s};$$

$$H_{f2}(s)=\frac{0{,}1}{(1+0{,}01s)}\cdot\frac{0{,}945}{0{,}142}\cdot\frac{1}{0{,}0562s}=\frac{10{,}2}{s\,(1+0{,}01s)}. \qquad (14.10)$$

4. *Alegerea și acordarea regulatoarelor.* Pentru bucla interioară corespunzătoare reglării curentului rotoric, avînd în vedere expresia funcției de transfer $H_{f1}(s)$, se recomandă, conform criteriului modulului (varianta Kessler), un regulator *PI*.

Funcția de transfer $H_{f1}(s)$ se poate scrie evidențiind constantele parazite $T_\Sigma=1{,}67+2{,}5=4{,}17$ ms și ținînd seama că $T_m\gg 2T_\Sigma$

$$H_{f1}(s)=\frac{K_f}{(T_\Sigma s+1)\ (T_f s+1)}=\frac{10{,}2}{(0{,}00417s+1)\ (0{,}123s+1)},$$

unde:

$$K_f=K_{DCG}\cdot K_p\cdot K_{ri}\cdot\frac{1}{R_a}=\frac{11{,}3\cdot 10\cdot 0{,}075}{0{,}945}=10{,}2;$$

$$T_f=0{,}123\ \text{s};$$

$$H_{RI}(s)=\frac{0{,}123\,s+1}{2\cdot 10{,}2\cdot T_\Sigma s}=K_R\left(1+\frac{1}{T_i s}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin acordarea optimă rezultă:

$$K_R=\frac{T_R}{2K_fT_\Sigma}=\frac{0{,}123}{2\cdot 10{,}2\cdot 0{,}00417}=1{,}48;$$

$$T_i=T_f=0{,}123 \text{ s.}$$

Cu acest regulator funcția de transfer a sistemului deschis al buclei de reglare a curentului se reduce la

$$H_{d1}(s)=H_{RI}(s)\cdot H_{f1}(s)=\frac{1}{2T_\Sigma s(T_\Sigma s+1)}=\frac{120}{s(0{,}00417s+1)}.$$

Performanțele realizate în cadrul acestei bucle de reglare sînt cele cunoscute, corespunzătoare acordării regulatoarelor cu ajutorul variantei Kessler $\varepsilon_{st}=0$; $\sigma=4{,}3\%$; $t_t=8\,T_\Sigma=33{,}5$ ms. Pentru alegerea și acordarea regulatorului de turație ținem seama de expresia funcției de transfer $H_{f2}(s)$ și

$$H_{0I}(s)=\frac{1}{2T_\Sigma^2s^2+2T_\Sigma s+1}\cdot\frac{T_{ri}s+1}{K_{ri}}\simeq\frac{1}{K_{ri}}\cdot\frac{T_{ri}s+1}{2T_\Sigma s+1}=\frac{13{,}3\,(0{,}0025\,s+1)}{0{,}00834\,s+1}.$$

Astfel, funcția de transfer a părții fixate pentru reglarea turației are expresia

$$H'_{f2}(s)=\frac{10{,}2}{s(1+0{,}01\,s)}\cdot\frac{13{,}3\,(0{,}0025\,s+1)}{0{,}00834\,s+1}. \qquad (14.11)$$

Se vede că funcția de transfer (14.11) conține trei termeni necompensabili, unul la numărător și doi la numitor, ce pot fi grupați într-unul singur

$$T_{\Sigma\Omega}=0{,}01+0{,}00834-0{,}0025=0{,}01584 \text{ s.}$$

Cu aceasta, funcția de transfer $H'_{f2}(s)$ devine

$$H'_{f2}(s)=\frac{1}{0{,}450\,s\,(0{,}01584\,s+1)}=\frac{K_{f2}}{T_ms\,(T_{\Sigma\Omega}s+1)}.$$

Întrucît în funcționarea regulatorului de turație este esențială comportarea la perturbații a sistemului, se recomandă alegerea regulatorului astfel încît să se asigure eroare nulă la variația treaptă a perturbației C_r, care se transmite la ieșire prin integrarea efectuată de blocul cu funcția de transfer $1/5\,s$. Pentru aceasta este necesar ca regulatorul turației să fie de tip *PI*, iar acordarea să se efectueze după criteriul simetriei, rezultînd un pol de ordinul doi în origine și deci eroare staționară nulă la rampă. Conform acestui criteriu rezultă

$$H_{Rn}(s)=\frac{T_m(4T_{\Sigma\Omega}s+1)}{8T^2_{\Sigma\Omega}\cdot K_{f2}\cdot s}=K_R\left(1+\frac{1}{T_is}\right).$$

Introducînd valorile lui T_m, $T_{\Sigma\Omega}$ și K_{f2} în funcția de transfer a regulatorului rezultă

$$H_{Rn}(s)=\frac{0{,}0450\,(4\cdot 0{,}01584\,s+1)}{8\,(0{,}01584)^2\cdot 8\cdot s}=2{,}8\,\frac{(0{,}063\,s+1)}{s}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Identificînd valorile lui K_R și T_i se obține:

$$K_{R\,opt}=44{,}3;$$

$$T_{i\,opt}=0{,}063 \text{ s}.$$

Pentru verificarea performanțelor sistemului se folosește una din metodele prezentate în capitolul 3.

14.2. PROIECTAREA UNUI SISTEM DE REGLARE A DEBITULUI

1. *Tema de proiectare.* Să se proiecteze un SRA a debitului de apă dintr-o conductă de alimentare astfel încît să fie satisfăcute performanțele:

— eroarea staționară $\varepsilon_{st}=0$ pentru intrare treaptă;

— suprareglajul $\sigma=4{,}3\%$;

— timpul tranzitoriu $t_t<3T_m$ unde T_m este constanta de timp semnificativă a procesului.

Se cunosc:

— debitele $Q_0=0{,}5$ m³/h; $Q_{min}=0{,}4$ m³/h; $Q_{máx}=0{,}6$ m³/h;

— coeficientul de debit $C_d=0{,}9$;

— lungimea conductei între punctul de măsură și de amplasare a elementului de execuție $L=10$ m;

— diametrul conductei $D_c=0{,}022$ m;

— presiunea la sursă și la consumator și pierderile pe linie (conductă și robinet de reglare): $p_s=4$ bar; $p_c=1{,}7$ bar; $\Delta p_c=1{,}2$ bar; $\Delta p_r=1{,}1$ bar;

— mediul măsurat și reglat, apă la 22°C;

— regimul de curgere turbulent.

Schema sistemului de reglare este prezentată în figura 14.4.

2. *Identificarea procesului tehnologic.* Pornind de la relația de legătură între debit și căderea de presiune

$$Q=C_dA\sqrt{\frac{2g\cdot\Delta p}{\gamma}}=C_dA\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}, \qquad (14.12)$$

rezultă căderea de presiune în sistem sub forma

$$\Delta p=\frac{\rho Q^2}{2C_d^2A^2}.$$

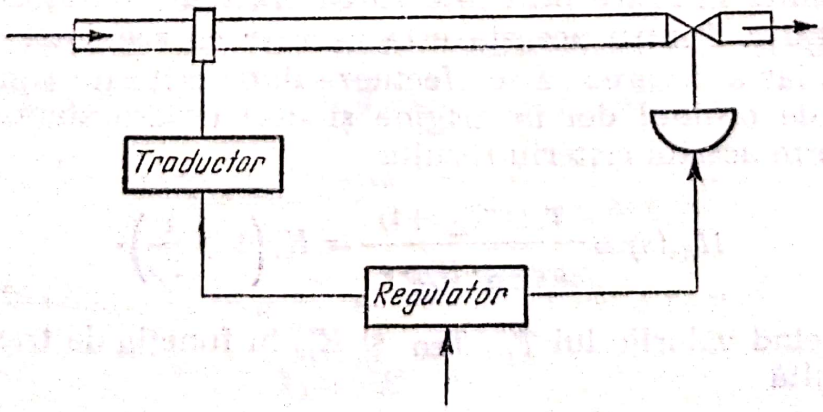


Fig. 14.4. Schema unui sistem de reglare a debitului pe o conductă.

Scanned with OKEN Scanner

Relaţia de echilibru în regim staţionar între forţa de apăsare a lichidului şi forţa de reacţiune este

$$A\Delta p_0 - \frac{\rho Q_0^2}{2C_d^2 A} = 0. \tag{14.13}$$

Pentru un regim dinamic variaţiile debitului determină variaţii de viteză, deci apariţia unor forţe inerţiale

$$A\Delta p(t) - \frac{\rho Q^2(t)}{2C_d^2 A} = \frac{M}{A} \cdot \frac{dQ(t)}{dt}, \tag{14.14}$$

unde $\Delta p(t) = \Delta p_0 + \Delta(\Delta p(t)) \equiv \Delta p_0 + \Delta p'(t)$, $Q(t) = Q_0 + \Delta Q(t)$ şi M este masa lichidului din conductă.

Ţinînd seama de relaţia (14.13) şi neglijînd infinitul mic de ordinul doi din ridicarea la pătrat a lui $Q(t)$ se obţine

$$A\Delta p'(t) - \frac{2\rho Q_0 \Delta Q(t)}{2C_d^2 A} = \frac{M}{A} \cdot \frac{d\Delta Q(t)}{dt}, \tag{14.15}$$

unde $\Delta p'(t) = \Delta(\Delta p(t))$.

După normarea la valorile nominale rezultă modelul matematic al conductei în formă adimensională

$$y(t) + \frac{MC_d^2 A}{A\rho Q_0} \frac{dy}{dt} = \frac{\Delta p_0 C_d^2 A^2}{\rho Q_0^2} u(t) \tag{14.16}$$

unde:

$$y(t) = \frac{\Delta Q(t)}{Q_0}; \qquad u(t) = \frac{\Delta p'(t)}{\Delta p_0}$$

sau

$$T_{iT} \cdot \frac{dy}{dt} + y = K_{iT} \cdot u(t); \tag{14.17}$$

unde:

$$T_{iT} = \frac{M \cdot C_d^2 A_0}{A \cdot \rho \cdot Q_0} = \frac{\rho \cdot V \cdot C_d^2 A}{A \cdot \rho \cdot Q_0} = C_d^2 \frac{L \cdot A}{Q_0} \tag{14.18}$$

$$K_{IT} = \frac{\Delta p_0 C_d^2 A^2}{\rho Q_0^2}.$$

Efectuînd calculele pentru valorile date prin temă rezultă:

$$T_{iT} = 16 \text{ s}; \qquad K_{IT} = 0{,}5,$$

deci:

$$H_{iT}(s) = \frac{0{,}5}{16\ s+1}. \tag{14.19}$$

3. *Alegerea şi dimensionarea traductorului de măsură şi a elementului de execuţie.* Pentru măsurarea debitului de apă cu valori între 0,4 şi 0,6 m³/h se poate utiliza un traductor de debit electromagnetic cu domeniul 0 ... 1 m³/h cu un diametru nominal al conductei detectorului de 25 mm.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru conversia semnalului se foloseşte un adaptor tensiune-curent care furnizează la ieşire un semnal unificat, spre exemplu 2 . . . 10 mA. Factorul de transfer al blocului traductor-adaptor este

$$K_{Tr}=\frac{I/I_0}{Q/Q_0}=\frac{\frac{8\ mA}{6\ mA}}{\frac{0{,}2\ m^3/h}{0{,}5\ m^3/h}}=3{,}3. \qquad (14.20)$$

Ca element de execuţie recomandăm utilizarea unui robinet cu servomotor pneumatic.

Etapele alegerii robinetului de reglare sînt:

— întrucît căderile de presiune pe linie şi pe robinet sînt date la debitul maxim, se calculează valorile lor la debitul minim:

$$\Delta p_{Lm}=\frac{Q_m^2}{Q_m^2}\cdot\Delta p_{LM}=0{,}53 \text{ bar};$$

$$\Delta p_{rm}=P_{SM}-P_{CM}-\Delta p_{Lm}=1{,}77 \text{ bar};$$

— se evaluează raportul $R_r=\frac{P_{rM}}{P_{SM}}=\frac{1{,}1}{4}=0{,}29<0{,}6$, deci rezultă o caracteristică logaritmică $Q=f(h)$;

— se calculează coeficientul K_v la debit maxim şi minim:

$$K_{vM}=\frac{Q_M}{\sqrt{\Delta P_{rM}/\rho}}=\frac{0{,}6}{\sqrt{1{,}1/1}}=0{,}57;$$

$$K_{vm}=\frac{Q_m}{\sqrt{\Delta p_{rm}/\rho}}=\frac{0{,}4}{\sqrt{1{,}77/1}}=0{,}3;$$

— se alege $K_{vs}=(1{,}1 \ldots 1{,}4)K_{vM}$ şi anume $K_{vs}=1{,}26$ $K_{vM}=0{,}72$;

— se verifică gradul de închidere şi deschidere al robinetului:

$$\pi_m=\frac{K_{vm}}{K_{vs}}=\frac{0{,}3}{0{,}72}=0{,}41;$$

$$\pi_M=\frac{K_{vM}}{K_{vs}}=\frac{0{,}57}{0{,}72}=0{,}79.$$

Robinetul este corect ales. În funcţie de valoarea K_{vs} şi de pierderile de presiune se extrag din tabele [43] caracteristicile organului de reglare şi ale servomotorului pneumatic:

— diametrul nominal al organului de reglare, $D_n=20$ mm;
— diametrul scaunului ventilului, $D_s=4$ mm;
— cursa maximă, $h_M=30$ mm;
— diametrul membranei elastice, $D_m=135$ mm;
— constanta de elasticitate a resortului, $K_e=4{,}6\cdot10^{-6}$ daNs/m²;
— greutatea părţilor mobile, $G_m=2{,}5$ kg.

Scanned with OKEN Scanner

Constanta de timp a elementului de execuţie se deduce din relaţia [15].

$$T_E=\frac{128\cdot\eta}{\pi}\frac{L}{d^4}\left[\frac{\pi D^2}{4p}\cdot\frac{\Delta p\cdot f+G_m}{K_e}+\frac{f\cdot(\Delta p\cdot f+G_m)}{K_e\cdot\Delta p}+\frac{\pi d^2\cdot L}{4p}\right]=1{,}3\text{ s},$$

unde:

η este viscozitatea dinamică a aerului instrumental ($4{,}6\cdot10^{-6}$ daNs/$/m^2$);
L — lungimea traseului pneumatic al semnalului de comandă (10 m);
d — diametrul conductei de aer (6 mm);
p — presiunea maximă a aerului instrumental (1 bar);
Δp — variaţia de presiune a aerului instrumental (0,8 bar);

$$f=\frac{\pi}{12}(D_m^2+D_m\cdot d_1+d_1^2)=1{,}16\cdot10^4\text{ mm}^2;$$

d_1 — diametrul discului de rigidizare ($d_1=0{,}8\ D_m=108$ mm).

Factorul de amplificare k_{EA} se determină astfel

$$k_{EA}=\frac{\Delta h/h_0}{\Delta p/p_0}=\frac{10/6{,}7}{0{,}8/0{,}67}=1{,}2.$$

Pentru organul de reglare, presupus element proporţional, se determină

$$k_{QR}=\left.\frac{\partial Q}{\partial h}\right|_{\Delta pr_0}\cdot\frac{h_0}{Q_0}=0{,}93,$$

unde:

$$Q=K_{v_s}\left(0{,}04+0{,}96\frac{h}{h_M}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{\Delta p_r}{\rho}}\right);$$

$h_0=6{,}7$ mm din caracteristica $Q=f(h)$;
$Q_0=0{,}5$ m^3/h debit nominal;
$\Delta p_{r0}=p_s-p_c-\Delta pL_0=1{,}57$ bar;

deoarece

$$\Delta p_{L0}=\frac{Q_0^2}{Q_M^2}\cdot\Delta p_{LM}=0{,}83\text{ bar},$$

rezultă următoarea funcţie de transfer pentru elementul de execuţie

$$H_{EE}=\frac{1{,}2\cdot0{,}93}{1+1{,}3s}=\frac{1{,}1}{1+1{,}3s}. \qquad (14.21)$$

4. *Alegerea şi acordarea regulatorului.* Este convenabil să lucrăm pe un sistem echivalent de ordinul doi şi să efectuăm acordarea prin metoda polizerouri.

Alegem o lege de reglare *PI* care introduce un pol în origine. În acest fel, pentru o variaţie în treaptă a mărimii de intrare se obţine o eroare staţionară nulă.

— Se calculează funcţia de transfer a părţii fixate

$$H_f(s)=\frac{0{,}5}{1+16\cdot s}\cdot3{,}3\cdot\frac{1{,}2}{1+1{,}3\cdot s}\cdot\frac{2}{(1+1{,}3\cdot s)\ (1+16\cdot s)}. \qquad (14.22)$$

— Se determină parametrii de acordare ai regulatorului:

Scanned with OKEN Scanner

a. Se alege constanta de timp de integrare egală cu constanta semnificativă din $H_f(s)$, deci $T_i=16$ s. Funcţia de transfer pe cale directă rezultă:

$$H_d(s)=\frac{K_R\,(1+16\cdot s)}{16\cdot s}\cdot\frac{2}{(1+1{,}3\cdot s)\;(1+16\cdot s)}=\frac{\frac{2}{16}\cdot K_R}{s\,(1+1{,}3\cdot s)};$$

$$H_d(s)=\frac{0{,}125\cdot K_R}{s\,(1+1{,}3\cdot s)}. \tag{14.23}$$

Funcţia de transfer a sistemului închis este de formă standard

$$H_0(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n\cdot s+\omega_n^2}. \tag{14.24}$$

Printr-o identificare simplă rezultă relaţiile:

$$\frac{\omega_n}{2\zeta}=\frac{0.125\;K_p}{1{,}3}=0{,}09\;K_R;$$

$$2\;\zeta\omega_n=\frac{1}{1{,}3}=3{,}3. \tag{14.25}$$

b. Se determină factorul de amplificare (banda de proporţionalitate) a regulatorului din performanţele impuse:

$$\sigma=4{,}3\%;$$

$$t_t\leqslant 4\cdot T\leqslant 4\cdot 16=64\text{ s}.$$

Pentru $\sigma=4{,}3\%$, din relaţia

$$\sigma=e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}};$$

rezultă

$$\zeta=0{,}7.$$

Din relaţia aproximativă pentru evaluarea timpului de răspuns

$$t_t\simeq\frac{4}{\zeta\cdot\omega_n},$$

pentru $\zeta=0{,}7$ şi $t_t\leqslant 32$ s se determină marginea de pusaţii naturale

$$\omega_n\geqslant\frac{4}{t_t\cdot\zeta}\geqslant\frac{4}{32\cdot 0{,}7}\geqslant 0{,}18\text{ rad/s}.$$

Dacă se rezolvă ecuaţia a doua a sistemului se obţine

$$\omega_n=\frac{3{,}3}{2\cdot\zeta}=2{,}2\text{ rad/s}>\omega_l.$$

Pentru $\omega_n=2{,}2$ rad/s, din prima ecuaţie a sistemului rezultă

$$K_R\leqslant\frac{\omega_n}{0{,}125\cdot 2\zeta}\leqslant\frac{2{,}2}{0{,}125\cdot 2\cdot 0{,}7}=\frac{2{,}2}{0{,}175}\simeq 13{,}1.$$

Se alege $K_R=10$, adică $BP=10\%$.

Scanned with OKEN Scanner

5. *Verificarea rezultatelor calculului.* Se poate face cu sistemul în funcțiune prin aplicarea unui criteriu experimental de acordare pentru o lege de reglare *PI*. Dacă se folosește criteriul Ziegler-Nichols pentru sisteme fără timp mort, trebuie să se obțină la limita de stabilitate a sistemului (cu regulatorul pe lege *P*) aproximativ următorii parametri:

$$K_{R\,lim}=\frac{10}{0{,}45}=22;\quad BP=\frac{1}{22}\cdot 100\simeq 4\%;$$

$$T_0=\frac{16}{0{,}8}=20\ \text{s}.$$

Eventualele diferențe se datorează faptului că prin criteriul Ziegler-Nichols nu se obțin performanțe individualizate de regim staționar și dinamic ci o performanță globală, care presupune minimizarea unui indice pătratic de eroare.

14.3. PROIECTAREA UNUI SISTEM DE REGLARE A NIVELULUI

1. *Tema de proiectare.* Se cere proiectarea unui sistem de reglare automată a nivelului dintr-un rezervor știind că evacuarea lichidului se face sub presiunea hidrostatică a coloanei. Se impun următoarele performanțe pentru variații în treaptă ale mărimii perturbatoare (debitul evacuat în funcție de cerințele consumatorilor):

— eroare staționară $\varepsilon_{st}=0$;

— suprareglaj, $\sigma\leqslant 20\%$;

— timp de răspuns, t_t minim posibil.

Se cunosc următoarele date de proiectare:

— mărimea de execuție este debitul de alimentare

$$Q_{a0}=10\ \text{m}^3/\text{h};\quad Q_{min}=8\ \text{m}^3/\text{h};\quad Q_M=12\ \text{m}^3\text{h};$$

— diametrul rezervorului $D_n=100$ cm;

— răspunsul indicial al părții fixate a sistemului (instalația de automatizare în care este inclus traductorul de măsură pentru nivel și elementul de execuție) este reprezentat prin valorile din tabelul de mai jos.

$\Delta h\ (l)$	0,01	0,03	0,048	0,062	0,072	0,081	0,090	0,098	0,104	0,108	0,11
t [s]	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1 000	1 100

Răspunsul indicial a fost determinat experimental prin aplicarea unui salt treaptă de debit $\Delta Q_a=1$ m³/h față de valoarea de regim normal Q_{a0}.

Scanned with OKEN Scanner

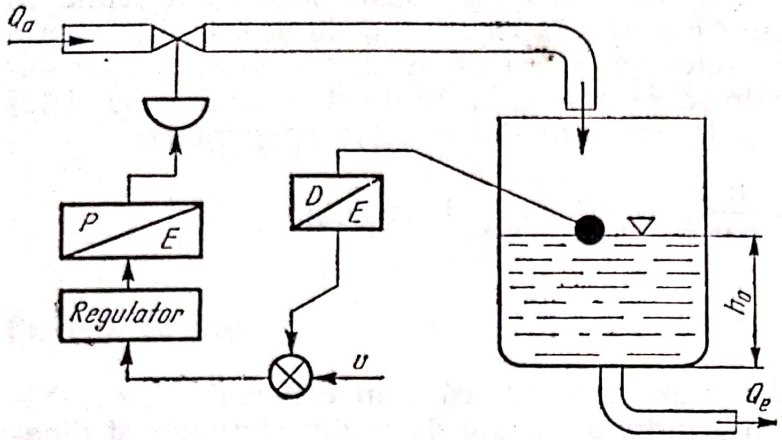


Fig. 14.5. Schema de principiu a unui sistem de reglare a nivelului.

Schema cu elementele componente ale sistemului este reprezentată în figura 14.5.

2. *Determinarea funcției de transfer a părții fixate.* Funcția de transfer $H_f(s)$ rezultă din prelucrarea răspunsului indicial ridicat experimental, printr-o metodă grafo-analitică. Cea mai comodă procedură este cea prin care se aproximează comportarea instalației automatizate cu cea a unui element de întîrziere de ordinul întîi cu timp mort (răspunsul fiind aperiodic), figura 14.6.

Pe cale grafică, luînd valoarea subtangentei în orice punct la curba răspunsului indicial, rezultă constanta de timp T_f=590 s, iar printr-un calcul simplu — factorul de amplificare

$$k_f = \frac{\Delta h/h_0}{\Delta Q_a/Q_{a0}} = \frac{\Delta h}{\Delta Q_a}\cdot\frac{Q_{a0}}{h_0} = \frac{0{,}11}{1}\cdot\frac{10}{1} = 1{,}1.$$

Dacă se adaugă și timpul mort τ=20 s atunci

$$H_f(s) = \frac{k_f}{1+T_f\cdot s}\cdot e^{-\tau s} = \frac{1{,}1}{1+590\cdot s}\cdot e^{-20s}.$$

O verificare a rezultatului la determinarea grafică a constantei de timp se poate face printr-un calcul analitic.

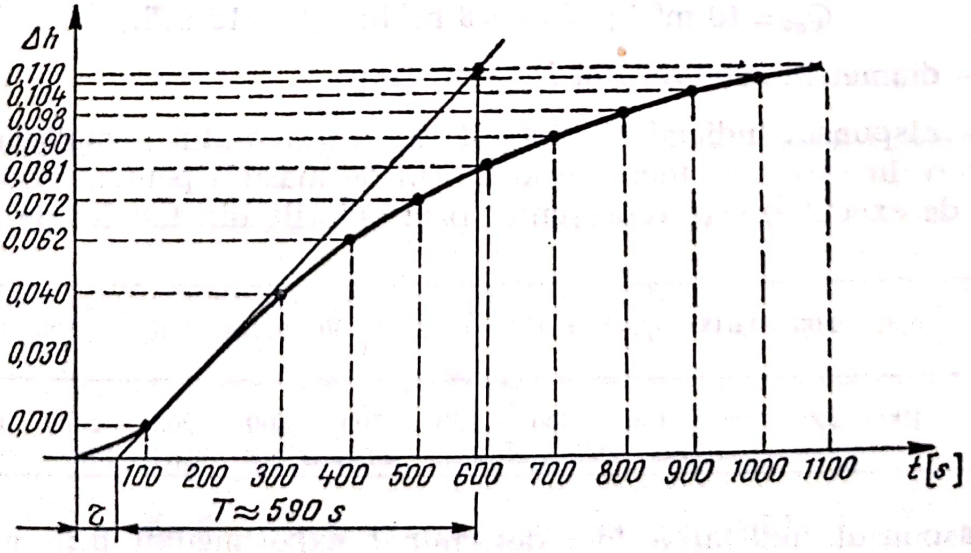


Fig. 14.6. Variația nivelului h în vas la o variație în treaptă a debitului la intrare.

Scanned with OKEN Scanner

Se poate determina funcţia de transfer a instalaţiei tehnologice $H_{iT}(s)$ fără element de execuţie şi traductor) dintr-o ecuaţie de bilanţ. Pentru regimul staţionar al procesului de umplere-golire

$$Q_{r0}=Q_{e0}, \tag{14.26}$$

iar pentru regimul dinamic

$$Q_a(t)-Q_e(t)=A\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t), \tag{14.27}$$

unde:

$$\begin{aligned} Q_a(t)&=Q_{a0}+\Delta Q_a(t);\\ h(t)&=h_0+\Delta h(t);\\ Q_e(t)&=Q_{e0}+\Delta Q_e(t). \end{aligned} \tag{14.28}$$

Între Q_e şi h există dependenţa neliniară dată prin legea Toricelli

$$Q_e=k\cdot\sqrt{h}. \tag{14.29}$$

Dacă se liniarizează (14.29) în jurul lui h_0 rezultă

$$Q_e(t)=Q_{e0}+\left.\frac{\partial Q_e(t)}{\partial h}\right|_{h=h_0}\cdot\Delta h(t), \tag{14.30}$$

adică

$$\Delta Q_e(t)=k\cdot\frac{1}{2\sqrt{h_0}}\cdot\Delta h(t). \tag{14.31}$$

Revenind în relaţia (14.27) avem

$$\Delta Q_a(t)-\frac{k}{2\sqrt{h_0}}\cdot\Delta h(t)=A\,\frac{\mathrm{d}(\Delta h(t))}{\mathrm{d}t}. \tag{14.32}$$

Prin urmare, cu notaţiile noi se obţine

$$\frac{k\cdot h_0}{2\sqrt{h_0}}y(t)+A\cdot h_0\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=Q_{a0}\cdot\frac{2\sqrt{h_0}}{k\cdot h_0}u(t), \tag{14.33}$$

unde:

$$u(t)=\frac{\Delta Q_a(t)}{Q_{a0}};\qquad y(t)=\frac{\Delta h(t)}{h_0}. \tag{14.34}$$

Se observă că (14.33) devine

$$y(t)+\frac{2V_0}{Q_{a0}}\cdot\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=2\cdot u(t). \tag{14.35}$$

Din (14.35) rezultă constanta de timp şi factorul de amplificare ale instalaţiei tehnologice:

$$T_{iT}=\frac{2V_0}{Q_{a0}}=\frac{2\cdot\frac{\pi 1^2}{4}\cdot 1}{10/3\,600}=565\ \mathrm{s};$$

$$k_{iT}=2.$$

Scanned with OKEN Scanner

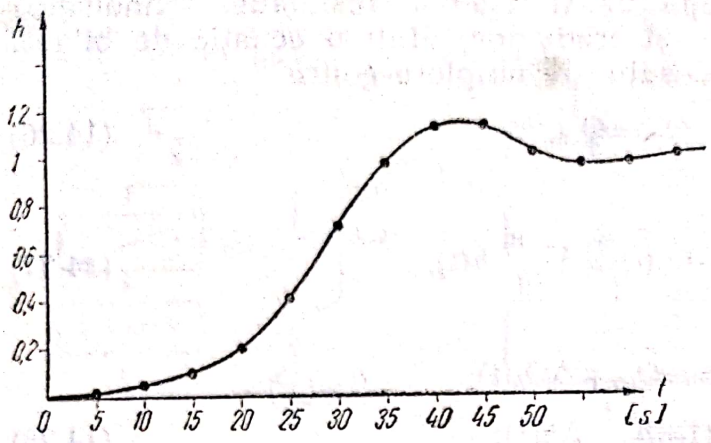


Fig. 14.7. Răspunsul sistemului.

Într-adevăr se observă că instalaţia tehnologică dă constanta semnificativă (constantele elementului de execuţie şi traductorului fiind de ordinul secundelor se neglijează).

Întrucît $T_{iT} \simeq T_f$, determinarea lui T_f a fost făcută corect (aproximarea suficient de bună).

3. *Alegerea şi acordarea optimă a regulatorului.* Pentru obţinerea performanţelor impuse se recomandă alegerea unui regulator *PI*, iar acordarea se va face cu ajutorul unui criteriu experimental care asigură performanţe bune la variaţia perturbaţiei.

Se recomandă utilizarea relaţiilor Chien, Hrones, Reswick, care asigură o comportare optimă la perturbaţii şi un răspuns cu timp tranzitoriu minim:

$$K_{Ropt}=0{,}7\,\frac{T_f}{\tau \cdot K_f}=0{,}7\cdot\frac{560}{20\cdot 2}=9{,}8;$$

$$T_{iopt}=2{,}3\cdot\tau=2{,}3\cdot 30=46 \text{ s}.$$

Cu aceste valori ale parametrilor de acord rezultă un răspuns optim al sistemului de reglare.

4. *Verificarea rezultatelor.* Funcţia de transfer a sistemului deschis, fără a lua în considerare constantele de timp ale elementului de execuţie şi ale traductorului de măsură, care au valori neglijabile în raport cu constanta de timp a procesului, este

$$H_d(s)=H_R(s)\cdot H_f(s)=\frac{9{,}8}{46\cdot s}\cdot(46\,s+1).\ \frac{2\cdot e^{-20.s}}{560\,s+1}\cdot$$

Simulînd acest sistem cu ajutorul limbajului SIMSID se obţine pentru aceste valori optime ale parametrilor de acord răspunsul prezentat în figura 14.7. Performanţele obţinute se încadrează în limitele impuse prin tema de proiectare, deci regulatorul a fost ales şi acordat bine.

Particularităţile proceselor cu timp mort legate de dificultăţile de determinare exactă a modelului matematic necestă o atenţie deosebită la alegerea şi acordarea regulatorului. Verificarea rezultatelor obţinute prin proiectare se impune a fi făcută întotdeauna.

Scanned with OKEN Scanner

Tabel cu transformate Laplace și transformate în z

Funcția în domeniul real $f(t)$	Transformata Laplace $F(s)$	Transformata z $F(z)$	Transformata z — modificată $F(z, m)$
1	2	3	4
$\delta(t)$	1	1	0
$\delta(t-nT)$	e^{-nTs}	z^{-n}	z^{-n-1+m}
$u(t)$	$\frac{1}{S}$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{1}{z-1}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$\frac{mT}{z-1}+\frac{T}{(z-1)^2}$
t^{n-1}	$\frac{(n-1)!}{s^n}$	$\lim_{a\to 0}(-1)^{n-1}\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\left(\frac{z}{z-e^{-aT}}\right)$	$\lim_{a\to o}(-1)\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\left(\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}\right)$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$	$\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$	$\frac{Te^{-amT}e^{-aT}+m(z-e^{-aT})}{(z-e^{-aT})^2}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\frac{z\sin aT}{z^2-2z\cos aT+1}$	$\frac{z\sin amT+\sin(1-m)aT}{z^2-2z\cos aT+1}$
$\cos at$	$\frac{s^2}{s^2+a^2}$	$\frac{z(z-\cos aT)}{z^2-2z\cos aT+1}$	$\frac{z\cos amT-\cos(1-m)aT}{z^2-2z\cos aT+1}$
$\sin h\, at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\frac{2\sin h\, aT}{z^2-2z\cos h\, aT+1}$	$\frac{z\sin h\, amT+\sin h(1-m)aT}{z^2-2z\cos h\, aT+1}$
$\cos h\, at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\frac{z(z-\cos h\, aT)}{z^2-2z\cos h\, aT+1}$	$\frac{z\cos h\, amT+\cos h(1-m)aT}{z^2-2z\cos h\, aT+1}$
$e^{-aT}\cos bT$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos bT}{z^2-2ze^{-aT}\cos bT+e^{-2aT}}$	$\frac{e^{-amT}z\cos bmT+e^{-aT}\sin(1-m)bT}{z^2-2ze^{-aT}\cos bT+e^{-2aT}}$

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

ANEXA 1

TRANSFORMATA LAPLACE

O funcție reală $f(t)$ de o variabilă reală $t>0$ admite o *transformată Laplace* definită prin relația [56]

$$\mathcal{L}f(t)=F(s)=\lim_{\substack{T\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int_{\varepsilon}^{T} f(l)\ e^{-sl}dl=\int_{0+}^{\infty} f(l)\,e^{-sl}dl \qquad (A.1)$$

$$0<\varepsilon<T$$

unde s este o variabilă complexă definită prin $s=\sigma+j\,\omega$, σ și ω sînt variabile reale și $j=\sqrt{-1}$.

Limita inferioară a integralei de definiție a transformatei Laplace a funcției $f(t)$ $t=\varepsilon>0$ este folosită pentru funcții care prezintă discontinuități la $t=0$. Funcția $f(t)$ admite o transformată Laplace $F(s)$ dacă este univocă pentru $t>0$ și $F(\sigma)$ este absolut convergentă pentru orice σ_0 și pentru Re $(s)>\sigma_0$

$$\int_{0+}^{\infty}|f(l)|\,e^{-\sigma_0 t}dt=\lim_{\substack{T\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int_{\varepsilon}^{T}|f(l)|\,e^{-\sigma_0 t}\,dl<+\infty,\ 0<\varepsilon<T. \qquad (A.2)$$

Funcția e^{-t} este transformabila Laplace deoarece

$$\int_{0+}^{\infty}|e^{-t}|\,e^{-\sigma t_0}dl=\int_{0+}^{\infty}e^{(-1+\sigma_0)\,t}dl=$$

$$=\frac{1}{-(1+\sigma_0)}\cdot e^{-(1+\sigma_0)t}\Big|_{0+}^{\infty}=\frac{1}{1+\sigma_0}<+\infty$$

dacă $1+\sigma_0>0$ sau $\sigma_0>-1$.

Transformata Laplace transformă o problemă din domeniul real al timpului în domeniul variabilei complexe s. Pentru trecerea inversă din domeniul complex în domeniul real se folosește *transformata Laplace inversă* definită prin integrala de contur

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]\equiv f(l)=\frac{1}{2\pi J}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F(s)\ e^{st}\,ds, \qquad (A.3)$$

unde $c>\sigma_0$.

PROPRIETĂȚI ALE TRANSFORMATEI LAPLACE DIRECTĂ ȘI INVERSĂ

1. Transformata Laplace este o transformată liniară între funcțiile definite în domeniul t și funcțiile definite în domeniul s. Astfel, dacă $F_1(s)$ și $F_2(s)$ sînt transformatele Laplace ale lui $f_1(t)$ și $f_2(t)$, atunci $a_1F_1(s)+a_2F_2(s)$ reprezintă transformatele Laplace ale lui $a_1f_1(t)+a_2f_2(t)$, unde a_1 și a_2 sînt constante arbitrare. Dacă se aplică transformata Laplace sumei $a_1f_1(t)+a_2f_2(t)$, rezultă:

$$\mathfrak{L}[a_1f_1(t)+a_2f_2(t)]=\int_{0+}^{\infty}[a_1f_1(t)+a_2f_2(t)]\,e^{-st}\,dt=$$

$$=\int_{0+}^{\infty}a_1f_1(t)\,e^{-st}\,dt+\int_{0+}^{\infty}a_2(t)\,e^{-st}\,dt=$$

$$=a_1\int_{0+}^{\infty}f_1(t)\,e^{-st}\,dt+a_2\int_{0+}^{\infty}f_2(t)\,e^{-st}\,dt=$$

$$=a_1\,\mathfrak{L}[f_1(t)]+a_2\,\mathfrak{L}[f_2(t)];$$

$$\mathfrak{L}[a_1f_1(t)+a_2f_2(t)]=a_1F_1(s)+a_2F_2(s). \tag{A.4}$$

2. Transformata Laplace inversă este o transformată liniară între funcțiile definite în domeniul s și funcțiile definite în domeniul t. Astfel, dacă $f_1(t)$ și $f_2(t)$ sînt transformatele inverse ale lui $F_1(s)$ și respectiv $F_2(s)$, atunci $b_1f_1(t)+b_2f_2(t)$ reprezintă transformata Laplace inversă a funcției $b_1F_1(s)+b_2F_2(s)$, unde b_1 și b_2 sînt constante arbitrare

$$\mathfrak{L}^{-1}[b_1F_1(s)+b_2F_2(s)]=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}[b_1F_1(s)+b_2F_2(s)]\cdot e^{st}\,ds=$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}b_1F_1(s)\,e^{st}\,ds+\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}b_2F_2(s)\,e^{st}\,ds=$$

$$=b_1\cdot\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F_1(s)\,e^{st}\,ds+b_2\cdot\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F_2(s)\,e^{st}\,dt.$$

Dacă $f_1(t)=\mathfrak{L}^{-1}[F_1(s)]$ și $f_2(t)=\mathfrak{L}^{-1}[F_2(s)]$, proprietatea (2) este demonstrată

$$b_1\,\mathfrak{L}^{-1}[F_1(s)]+b_2\,\mathfrak{L}^{-1}[F_2(s)]=b_1f_1(t)+b_2f_2(t). \tag{A.5}$$

3. Transformata Laplace a derivatei funcției $f(t)$ care admite o transformată Laplace $F(s)$ este dată de relația

$$\mathfrak{L}\left[\frac{df}{dt}\right]=sF(s)-f(0+), \tag{A.6}$$

unde $f(0+)$ este valoarea inițială a funcției $f(t)$, evaluată ca o limită a funcției $f(t)$ cînd t se apropie de zero de la valori pozitive.

Prin definiție, $\mathfrak{L}\left[\frac{df}{dt}\right]=\lim\limits_{\substack{T\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int_{\varepsilon}^{T}\left[\frac{df}{dt}\right]e^{-st}\,dt.$

Scanned with OKEN Scanner

Integrînd prin părți se obține

$$\lim_{\substack{T\to\infty\\ \varepsilon\to\infty}} \int_{\varepsilon}^{T} \frac{df}{dt} e^{-st}\, dt = \lim_{\substack{T\to\infty\\ \varepsilon\to\infty}} [f(t) e^{-st}]_{\varepsilon}^{T} + s\int_{\varepsilon}^{T} f(t) e^{-st}\, dt =$$

$$= -f(0+) + sF(s),$$

unde $\lim_{\varepsilon\to 0} f(\varepsilon) = f(0+)$.

4. Transformata Laplace a integralei $\int_0^t f(\tau)\, d\tau$ a funcției $f(t)$, a cărei transformată Laplace este $F(s)$, este

$$\mathfrak{L}\left[\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}, \tag{A.7}$$

dedusă astfel:

$$\int_0^t f(\tau)\, d\tau = \int_{0+}^{\infty}\int_0^t f(\tau)\, d\tau e^{-st}\, dt = \int_{0+}^{\infty} f(\tau) \int_{\tau}^{\infty} e^{-st}\, dt\, d\tau =$$

$$= \int_{0+}^{\infty} f(\tau) \left[-\frac{1}{s} e^{-st}\Big|_{\tau}^{\infty}\right] d\tau = \int_{0+}^{\infty} f(\tau)\, \frac{e^{-s\tau}}{s}\, d\tau = \frac{F(s)}{s}.$$

5. Valoarea inițială $f(0+)$ a funcției $f(t)$, a cărei transformată Laplace este $F(s)$, este dată de relația

$$f(0+) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s), \quad t>0. \tag{A.8}$$

Această relație este denumită *teorema valorii inițiale*

$$\mathfrak{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0+) = \lim_{\substack{T\to\infty\\ \varepsilon\to\infty}} \int_{\varepsilon}^{T} \frac{df}{dt} e^{-st}\, dt;$$

$$\lim_{s\to\infty} [sF(s) - f(0+)] = \lim_{s\to\infty} \left[\lim_{\substack{T\to\infty\\ \varepsilon\to 0}} \int_{\varepsilon}^{T} \frac{df}{dt} e^{-st}\, dt\right]$$

sau, prin schimbarea limitelor, avem

$$\lim_{s\to\infty} \left[\lim_{\substack{T\to\infty\\ \varepsilon\to 0}} \int_{\varepsilon}^{T} \frac{df}{dt} e^{-st}\, dt\right] = \lim_{\substack{T\to\infty\\ \varepsilon\to 0}} \int_{\varepsilon}^{T} \frac{df}{dt} (\lim e^{-st})\, dt.$$

Dar $\lim_{s\to\infty} e^{-st} = 0$ și rezultă $\lim_{s\to\infty} aF(s) = f(0+)$.

Scanned with OKEN Scanner

6. Valoarea finală $f(\infty)$ a funcției $f(t)$, a cărei transformată Laplace este $F(s)$, este dată de relația

$$f(\infty)=\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s) \tag{A.9}$$

dacă există $\lim_{t\to\infty} f(t)$.

Această relație este denumită *Teorema valorii finale*

$$sF(s)-f(0+)=\lim_{\substack{T\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int_{\varepsilon}^{T}\frac{df}{dt}e^{-st}\,dt.$$

Calculăm limita acestei relații pentru $s\to 0$

$$\lim_{s\to 0}[sF(s)+f(0+)]=\lim_{s\to 0}\left[\lim_{\substack{T\to\infty\\ \varepsilon\to\infty}}\int_{\varepsilon}^{T}\frac{df}{dt}e^{-st}\,dt\right]=$$

$$=\lim_{\substack{T\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int_{\varepsilon}^{T}\frac{df}{dt}\left(\lim_{s\to 0}e^{-st}\right)dt=\lim_{\substack{T\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int_{\varepsilon}^{T}\frac{df}{dt}dt=f(\infty)-f(0+).$$

Adăugînd $f(0+)$ la ambele părți ale ultimei ecuații se obține

$$\lim_{s\to 0} sF(s)=f(\infty) \text{ dacă } f(\infty)=\lim_{t\to\infty} f(t).$$

7. Transformata Laplace a unei funcții $f(t/a)$ este

$$\mathfrak{L}[f(t/a)]=aF(as), \tag{A.10}$$

unde

$$F(s)=\mathfrak{L}[f(t)].$$

Prin definiție $\mathfrak{L}[f(t/a)]=\int_{0+}^{\infty} f(t/a)\,e^{-st}\,dt.$

Făcînd schimbarea de variabilă $\tau=t/a$

$$\mathfrak{L}[f(t/a)]=a\int_{0+}^{\infty} f(\tau)\,e^{-(as)\tau}\,d\tau=aF(as).$$

8. Transformata inversă a funcției $F(s/a)$ este

$$\mathfrak{L}^{-1}[F(s/a)]=af(at), \tag{A.11}$$

unde $\mathfrak{L}^{-1}[F(s)]=f(t)$.

Prin definiție, $\mathfrak{L}^{-1}[F(s/a)]=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s/a)\,e^{+st}\,ds.$

Făcînd schimbarea de variabilă $\alpha=s/a$

$$\mathfrak{L}^{-1}[F(s/a)]=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(\alpha)\,e^{a\alpha(at)}\,d\alpha=af(at).$$

Scanned with OKEN Scanner

9. Transformata Laplace a funcției $f(t-\tau)$ unde $\tau>0$ și $f(t-\tau)=0$, pentru $t \leqslant \tau$, este

$$\mathfrak{L}[f(t-\tau)]=e^{-s\tau}F(s), \tag{A.12}$$

unde

$$F(s)=\mathfrak{L}[f(t)].$$

Prin definiție, $\mathfrak{L}[f(t-\tau)]=\int_{0+}^{\infty} f(t-\tau)\,e^{-st}\,dt=\int_{T}^{\infty} f(t-\tau)\,e^{-st}\,dt.$

Făcînd schimbarea de variabilă $\theta=t-\tau$,

$$\mathfrak{L}[f(t-\tau)]=\int_{0+}^{\infty} f(\theta)\,e^{-s\theta}\,e^{-s\tau}\,d\theta=e^{-s\tau}.\,F(s).$$

10. Transformata Laplace a funcției $e^{-at}f(t)$ este dată prin

$$\mathfrak{L}[e^{-at}f(t)]=F(s+a), \tag{A.13}$$

unde $F(s)=\mathfrak{L}[f(t)]$.

11. Transformata Laplace a produsului a două funcții $f_1(t)$ și $f_2(t)$ este dată prin integrala de convoluție complexă

$$\mathfrak{L}[f_1(t)\cdot f_2(t)]=\frac{1}{2\pi j}\int_{c\ j\infty}^{c+j\infty} F_1(\alpha)\cdot F_2(s-\alpha)\,d\alpha, \tag{A.14}$$

unde: $F_1(s)=\mathfrak{L}[f_1(t)]$; $F_2(s)=\mathfrak{L}[f_2(t)]$.

Prin definiție, $\mathfrak{L}[f_1(t)\cdot f_2(t)]=\int_{0+}^{\infty} f_1(t)\cdot f_2(t)\cdot e^{-st}\,dt.$

Dar: $f_1(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(\alpha)\,e^{\alpha t}\,d\alpha$

$$\mathfrak{L}[f_1(t)\cdot f_2(t)]=\frac{1}{2\pi j}\int_{0+}^{\infty}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(\alpha)\,e^{\alpha t}\,d\alpha f_2(t)\,e^{-st}\,dt.$$

Schimbînd ordinea de integrare avem

$$\mathfrak{L}[f_1(t)\cdot f_2(t)]=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(\alpha)\int_{0+}^{\infty} f_2(t)\,e^{-(s-\alpha)t}\,dt\,d\alpha.$$

Dacă

$$\int_{0+}^{\infty} f_2(t)\,e^{-(s-\alpha)t}\,dt=F_2(s-\alpha),$$

atunci

$$\mathfrak{L}[f_1(t)\cdot f_2(t)]=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(\alpha)\cdot F_2(s-\alpha)\,d\alpha.$$

Scanned with OKEN Scanner

12. Transformata Laplace inversă a produsului a două transformate $F_1(s)$ și $F_2(s)$ este dată prin integralele de convoluție

$$\mathfrak{L}^{-1}[F_1(s)\cdot F_2(s)]=\int_{0+}^{t} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_{0+}^{t} f_2(\tau)f_1(t-\tau)\mathrm{d}\tau. \qquad \text{(A.15)}$$

Prin definiție, $\mathfrak{L}^{-1}[F_1(s)\cdot F_2(s)]=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{c-\mathrm{j}\infty}^{c+\mathrm{j}\infty} F_1(s)\,F_2(s)\,\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s,$

dar $F_1(s)=\int_{0+}^{\infty} f_1(\tau)\,\mathrm{e}^{-s\tau}\,\mathrm{d}\tau.$

Prin urmare

$$\mathfrak{L}^{-1}[F_1(s)\cdot F_2(s)]=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{c-\mathrm{j}\infty}^{c+\mathrm{j}\infty}\int_{0+}^{\infty} f_1(\tau)\,\mathrm{e}^{-s\tau}\,\mathrm{d}\tau F_2(s)\;\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s$$

Schimbînd ordinea de integrare se obține:

$$\mathfrak{L}^{-1}[F_1(s)\cdot F_2(s)]=\int_{0+}^{\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{c-\mathrm{j}\infty}^{c+\mathrm{j}\infty} F_2(s)\,\mathrm{e}^{s(t-\tau)}\,\mathrm{d}s\,f_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau;$$

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{c-\mathrm{j}\infty}^{c+\mathrm{j}\infty} F_2(s)\,\mathrm{e}^{s(t-\tau)}\mathrm{d}s=f_2(t-\tau);$$

$$\mathfrak{L}^{-1}[F_1(s)\cdot F_2(s)]=\int_{0+}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{0+}^{t} f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau,$$

unde a doua egalitate este adevărată dacă $f_2(t-\tau)=0$ pentru $\tau\geqslant t$. Soluția unei ecuații diferențiale de forma

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\frac{\mathrm{d}^i y}{\mathrm{d}t^i}=\sum_{\mathrm{j}=0}^{m} b_{\mathrm{j}}\,\frac{\mathrm{d}^{\mathrm{j}}u}{\mathrm{d}t^{\mathrm{j}}}$$

se obține folosind transformata Laplace și proprietățile acesteia:

$$\mathfrak{L}\left[\sum_{0}^{m} a_i\,\frac{\mathrm{d}^i y}{\mathrm{d}t^i}\right]=\mathfrak{L}\left[\sum_{0}^{m} b_{\mathrm{j}}\,\frac{\mathrm{d}^{\mathrm{j}}u}{\mathrm{d}t^{\mathrm{j}}}\right],$$

$$\sum_{i=0}^{n}\left[a_i\left(s^i y(s)-\sum_{k=0}^{i-1} s^{i-1-k}\,y(0)^k\right)\right]=\sum_{\mathrm{j}=0}^{m}\left[b_{\mathrm{j}}\left(s^{\mathrm{j}}U(s)-\sum_{k=0}^{\mathrm{j}-1} s^{\mathrm{j}-1-k}\,u(0)^k\right)\right]; \qquad \text{(A.16)}$$

$$Y(s)=\frac{\sum_{0}^{m} b_j s^j}{\sum_{0}^{n} a_i s^i}\cdot U(s)-\frac{\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{i-1} b_j s^{j-1-k}\,u(0)^k}{\sum_{0}^{n} a_i s^i}+\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i-1} a_i s^{i-1-k}\,y(0)^k}{\sum_{0}^{n} a_i s^i}. \qquad \text{(A.17)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluția în timp se obține prin aplicarea transformatei Laplace inverse relației (A.17)

$$y(t)=\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{\sum_{j=0}^{m} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}\cdot u(s)-\frac{\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{j-1} b_j s^{j-1-k} u(0)^k}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}\right]+$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i-1} a_i s^{i-1-k} y(0)^k}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}\right]. \qquad (A.18)$$

ANEXA 2

TRANSFORMATA Z

O funcție eșantionată $f^*(t)$ admite o transformată Laplace

$$\mathfrak{L}[f^*(t)]=\mathfrak{L}\left[\sum_0^\infty f(nT)\,\delta(t-nT)\right]=\sum_0^\infty f(nT)\,e^{-nTs}=\sum_0^\infty f(nT)\,z^{-n}, \qquad (A.19)$$

$$F(z)=F^*\left(s=\frac{1}{T}\ln z\right)=\mathcal{Z}[f(t)].$$

Transformata z a funcției $f(t)$ este identică cu transformata Laplace a funcției eșantionate $f^*(t)$. Astfel, orice funcție continuă care are o transformată Laplace are și o transformată z.

Transformata z inversă se calculează cu relația

$$f(nT)=\frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma F(z)\,z^{n-1}\,dz, \qquad (A.20)$$

unde Γ este un cerc de rază $z=e^{cT}$ cu centrul în originea planului z și c are o asemenea valoare astfel încît toți polii lui $Y(z)$ să fie incluși în interiorul cercului.

PROPRIETĂȚI ȘI TEOREME ALE TRANSFORMATEI Z

1. Adunarea și scăderea

Dacă $f_1(t)$ și $f_2(t)$ sînt transformabile Laplace și $F_1(z)=\mathcal{Z}[f_1(t)]$ $F_2(z)=\mathcal{Z}[f_2(t)]$, atunci

$$\mathcal{Z}[f_1(t)\pm f_2(t)]=F_1(z)\pm F_2(z). \qquad (A.21)$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin definiție,

$$\mathcal{Z}[f_1(t)\pm f_2(t)]=\sum_{n=0}^{\infty}[f_1(nT)\pm f_2(nT)]z^{-n}=\sum_{0}^{\infty}f_1(nT)\,z^{-n}\pm\sum_{0}^{\infty}f_2(nT)\,z^{-n}=F_1(z)\pm F_2(z).$$

2. Multiplicarea cu o constantă

Dacă $F(z)$ este transformata z a funcției $f(t)$, atunci

$$\mathcal{Z}[af(t)]=a\mathcal{Z}[f(t)]=aF(z). \tag{A.22}$$

Prin definiție,

$$\mathcal{Z}[af(t)]=\sum_{n=0}^{\infty}af(nT)\,z^{-n}=a\sum_{n=0}^{\infty}f(nT)\,z^{-n}=aF(z).$$

3. Deplasarea reală

Dacă funcția $f(t)$ este transformabilă Laplace și are transformata z, $F(z)$ atunci:

$$\mathcal{Z}[f(t-nT)]=z^{-n}F(z) \tag{A.23}$$

și

$$\mathcal{Z}[f(t+nT)]=z^{-n}\left[F(z)-\sum_{k=0}^{n-1}f(kT)\,z^{-k}\right]. \tag{A.24}$$

Prin definiție,

$$\mathcal{Z}[f(t-nT)]=\sum_{k=0}^{\infty}f(kT-nT)\,z^{-k}=z^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}f(kT-nT)\,z^{-(k-n)}.$$

Dacă $f(t)$ este zero pentru $t<0$, ultima relație devine:

$$\mathcal{Z}[f(t-nT)]=z^{-n}\sum_{k=n}^{\infty}f(kT-nT)z^{-(k-n)}=z^{-n}F(z);$$

$$\mathcal{Z}[f(t+nT)]=\sum_{k=0}^{\infty}f(kT+nT)z^{-k}=z^{n}\sum_{k=0}^{\infty}f(kT+nT)z^{-(k+n)}=$$

$$=z^{n}\sum_{k=-n}^{\infty}f(kT+nT)z^{-(k+n)}-z^{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(kT)\,z^{-k}=z^{n}F(z)-z^{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(kT)\,z^{-k}.$$

4. Deplasarea în complex

Dacă $f(t)$ are transformata z egală cu $F(z)$, atunci

$$\mathcal{Z}[e^{\pm at}f(t)]=\mathcal{Z}[F(s+a)] \tag{A.25}$$

Prin definiție,

$$\mathcal{Z}[e^{\mp at}f(t)=\sum_{0}^{\infty}f(nT)=e^{\mp anT}\,z^{-n}.$$

Dacă punem $z_1=z\,e^{\pm aT}$ atunci se obține

$$\mathcal{Z}[e^{\pm at}f(t)]=\sum_{0}^{\infty}f(nT)\,z_1^{-n}=F(z_1)=F(z\,e^{\pm aT}).$$

Scanned with OKEN Scanner

5. Teorema valorii inițiale

Dacă funcția $f(t)$ are transformata în z funcția $F(z)$ și dacă există limita $\lim_{z\to\infty} F(z)$, atunci

$$\lim_{t\to 0} f^*(t) = \lim_{z\to\infty} F(z). \tag{A.26}$$

Prin definiție,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, z^{-n} = f(0) + f(T)\, z^{-1} + \dots$$

$$\lim_{z\to\infty} F(z) = f(0) = \lim_{t\to 0} f^*(t).$$

6. Teorema valorii finale

Dacă funcția $f(t)$ are transformata z, $F(z)$ și dacă funcția $(1-z^{-1})\,F(z)$ nu are poli în interiorul cercului sau pe cercul de rază unitate în planul z, atunci

$$\lim_{t\to\infty} f^*(t) = \lim_{n\to\infty} f(nT) = \lim_{z\to 1} (1-z^{-1})F(z). \tag{A.27}$$

Considerăm două secvențe finite:

$$\sum_{k=0}^{n} f(kT)z^{-k} f(0) + f(T)z^{-1} + \dots + f(nT)z^{-n}$$

și

$$\sum_{k=0}^{n} [f(k-1)T]z^{-k} = f(0)z^{-1} + f(T)z^{-2} + \dots + f\ (n-1)Tz^{-n}.$$

Comparînd cele două secvențe rezultă

$$\sum_{k=0}^{n} f[(k-1)T]z^{-k} = z^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(kT)z^{-k}.$$

Scăzînd ultima ecuație din prima secvență considerată și luînd limita acestei ecuații pentru $z \to 1$, obținem:

$$\lim_{z\to 1} \left[\sum_{k=0}^{n} f(kT)z^{-k} - z^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(kT)z^{-k} \right] = \sum_{k=0}^{n} f(kT) - \sum_{k=0}^{n-1} f(kT) = f(nT)\ ;$$

$$\lim_{n\to\infty} f(nT) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \lim_{z\to 1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} - z^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(kT)z^{-k} \right] \right\}.$$

Schimbînd limitele între ele și observînd că

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(kT)z^{-k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(kT)z^{-k} = F(z),$$

rezultă

$$\lim_{n\to\infty} f(nT) = \lim_{z\to 1} (1-z^{-1})\ F(z).$$

Scanned with OKEN Scanner

7. Convoluția reală și complexă

Dacă funcțiile $f_1(t)$ și $f_2(t)$ au transformatele $F_1(z)$ și $F_2(z)$ și dacă $f_1(t)=f_2(t)=0$ pentru $t<0$, atunci

$$F_1(z)\cdot F_2(z)=\mathcal{Z}\left[\sum_{n=0}^{k} f_1(nT)\cdot f_2(kT-nT)\right]; \tag{A.28}$$

$$\mathcal{Z}[f_1(t)\cdot f_2(t)]=\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma}\frac{F_1(\zeta)\cdot F_2(\zeta-1)}{\zeta}\,d\zeta, \tag{A.29}$$

unde Γ este un cerc plasat în regiunea descrisă prin:

$$\sigma_1<|\zeta|<\frac{|z|}{\sigma_2}; \qquad |z|>\max(\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_1\sigma_2)$$

cu: σ_1 — raza de convergență a lui $F_1(\zeta)$;

σ_2 — raza de convergență a lui $F_2(\zeta)$.

Demonstrațiile se efectuează într-o manieră similară ca pentru domeniul complex s.

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

1. Aumiaux, Miche. *L'émploi microprocesseurs.* Paris, Masson, 1977.
2. Auslander, D. M. *Direct digital process control Practice and algorithms for microprocessor application.* În: Procedings of the I.E.E.E., vol. 66, nr. 3, 1978.
3. Besekerskii, B. *Teoria reglării automate.* Culegere de probleme, București, Editura tehnică, 1964.
4. Besekerskii, V. A. *Teoria sistem automaticescovo regulirovanie.* Moscova, Izd. Nauka, 1966.
5. Brogan, W. *Modern control theory.* New York, Quntum Publishers Inc. 1974.
6. Boudarel, L. *Commande optimale des processes.* Tome I, Paris, Dounod, 1967.
7. Bryson, H. *Applied optimal control.* New York, McGraw-Hill, 1970.
8. Butler, J. L. *Comparative Criteria for Minicomputers.* În: Instrumentation Technology, vol. 17, nr. 10, 1970.
9. Călin, S. *Controller design in multivariabile systems.* Procedings of International Cybernetics and systems Congres, 1977.
10. Călin, S. *Regulatoare automate.* București, Editura didactică și pedagogică, 1976.
11. Călin, S. și Belea, C. *Sisteme adaptive și optimale.* București, Editura tehnică, 1971.
12. Călin, S. și Belea, C. *Sisteme automate complexe.* București, Editura tehnică, 1973.
13. Călin, S. ș.a. *Automatizări electronice.* București, Editura didactică și pedagogică, 1973.
14. Chen, C. T. *Introduction to linear system theory.* Holt, Rinehart and Winston, 1970.
15. Crăciunoiu, V. *Elemente de execuție.* București, Editura tehnică, 1973.
16. Dahlin, E. B. *Designing and Tuning Digital Controllers.* În: Instruments and control systems vol. 40, nr. 11, 1967.
17. Distefano, J. J. ș.a. *Feedbak and control systems.* New York, McGraw-Hill Book Company, 1967.
18. Dumitrache, I. *Tehnica reglării automate.* I.P.B., 1977.
19. Dumitrache, I. *Elemente de teoria sistemelor automate.* I.P.B., 1976.
20. Dumitrache, I. ș.a. *Algoritmi de calcul ai sistemelor automate.* I.P.B., 1973.
21. Dumitrache, I. ș.a. *Sinteza sistemelor cu reacție după stare.* În: Automatica și Electronica, nr. 1, 1974.
22. Dumitrache, I. și Dumitriu, S. *Considerații privind conducerea cu calculator a proceselor de fermentație.* Comunicare sesiunea. I.P.A., 1978.
23. Dumitrache, I. *Algoritmi și structuri de conducere numerică a proceselor tehnice.* În: Automatica și Electronica.
24. Dumitrache, I. și Atodiroaiei, M. *Simularea sistemelor dinamice.* I.P.B., 1975.
25. Eykhoff, P. *Identificarea sistemelor.* București, Editura tehnică, 1977.
26. Florea, S. și Dumitrache, I. *Elemente de execuție hidraulice și pneumatice.* București, Editura didactică și pedagogică, 1967.
27. Florea, S. *Automatizări pneumatice și hidraulice.* I.P.B., 1977.

Scanned with OKEN Scanner

28. Foulard, C. ș.a. *Commande et regulation par calculateur numérique.* Paris, EYROLLES, 1977.
29. Fransua, Al. *Servomotoare electrice în sistemele automate.* București, Editura tehnică, 1966.
30. Gibson, J. E. *Sisteme automate neliniare.* București, Editura tehnică, 1967.
31. Hăngănuț, M. *Automatica.* București, Editura didactică și pedagogică, 1971.
32. Juri, E. I. *Theory and aplications of the Z-Transform method.* New York, Wiley, 1964.
33. Koppell, L. B. Introduction to control theory. New York, McGraw-Hill Book Company, 1968.
34. Koppelovici, A. P. *Sisteme de reglare automată.* București, Editura tehnică, 1963.
35. Kuo, B. *Sisteme cu eșantionare.* București, Editura tehnică, 1968.
36. Landau, I. D. *Adaptive control the model reference approach.* New York, Morel Dekker Inc., 1976.
37. Lindorf, D. P. *Theory of sampled. Data control,* New York, Willey, 1965.
38. Lee, T. H. ș.a. *Computer Process Control Modeling and optimization.* New York, John Wiley, 1968.
39. Lopez, A. M. ș.a. *Tuning PI and PID digital controllers.* În: Instruments and control systems, vol. 42, nr. 2, 1969.
40. Lopez, A. M. ș.a. *Optimal tuning of proprotional digital controller.* În: Instruments and control systems, vol. 41, nr. 10, 1968.
41. Lopez, A. M. ș.a. *Tunning controllers with eror-integral criteria.* Instrumentation Technology, november, 1967.
42. Lyon-Geen, R. și Groset, J. M. *Microprocesseurs et microordinateurs* Paris, Masson, 1977.
43. Marinoiu, V. ș.a., *Robinete de reglare.* București, Editura tehnică, 1980.
44. Miller, J. A. ș.a. *A comparison of controller tuning techniques.* În: Control Engineering, nr. 14, 1967.
45. Murrill, P. W. *Automatic control of processes.* New York, Intext Educational Publishers, 1967.
46. Netushill, A. *Theory of automatic control.* Moscow, Mir publishers, 1973.
47. Papadache, I. *Automatica aplicată.* București, Editura tehnică, 1971.
48. Papadache, I. *Alegerea și acordarea regulatoarelor.* București, Editura tehnică, 1975.
49. Papadache, I. ș.a. *Regulatoare electronice.* București, Editura tehnică, 1969.
50. Penescu, C. ș.a. *Identificarea experimentală a proceselor automatizate.* București, Editura tehnică, 1971.
51. Penescu, C. *Sisteme.* București, Editura tehnică, 1975.
52. Popov, E. P. *Automaticescoe upravlenia i regulirovanie.* Moscova, Izd. Nauka, 1966.
53. Popeea, C. *Un algoritm de acordare optimală a regulatoarelor PID.* În: A.M.C., nr. 22, 1976.
54. Rastrîghin, L. A. *Sistemi extremalnovo upravlenia.* Moscova, Izd. Nauka, 1974.
55. Rovira, A. A. *Modified PI algoritm for digital control.* În: Instruments and control systems, vol. 43, nr. 8, 1970.
56. Sabac, I. *Matematici speciale.* Vol. II, București, Editura didactică și pedagogică, 1965.

Scanned with OKEN Scanner

57. Samal, E. *Tehnica reglării automate.* Bucureşti, Editura tehnică, 1966.
58. Savant, C. J. *Calculul sistemelor automate.* Bucureşti, Editura tehnică, 1967.
59. Sebastian, L. *Automatica.* Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1973.
60. Shinsky, F. G. *Practica sistemelor de reglare automată.* Bucureşti, Editura tehnică, 1967.
61. Smith, C. ş.a. *Design of industrial regulators.* Integral feedback and feedforward control. In: Proc. I.E.E. 119, nr. 8, 1972.
62. Smith, C. *Proces Computer Control.* International Textbook Company, 1972.
63. Soucek, Branco. *Microprocessors and Microcomputers.* New York, John Wiley, 1976.
64. Streijc, V. *Determination approchee des caracteristiques de regulation d'un processus a response aperiodique.* Automatisme Mass., 1960.
65. Tertişco, M. ş.a. *Identificarea proceselor.* I.P.B., 1978.
66. Tou, J. *Modern control theory.* New York, McGraw-Hill, 1964.
67. Del Toro, V. *Principles of controls systems engineering.* New York, McGraw-Hill, 1960.
68. Vazaca, C. *Analiza şi sinteza sistemelor liniare.* Bucureşti, Editura tehnică, 1961.
69. Zamfirescu, I. ş.a. *Automatizarea cuptoarelor industriale.* Bucureşti, Editura tehnică, 1973.
70. Weinrich, G. *Sisteme de reglare unificate pentru procese rapide.* Vol. I, Bucureşti, Editura tehnică, 1970.

Scanned with OKEN Scanner